应用数学和力学, 第 20 卷 第 5 期(1999 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 05_0441_04

正交曲线坐标系下极性连续统的动力学方程组*

戴天民[1], 宋彦琦[2]

([1] 辽宁大学 数学应用中心和数学系, 沈阳 110036;
[2] 中国矿业大学 北京研究生部, 北京 100083)

摘要: 应用非完整系物理标架给出正交曲线坐标系下 Boussinesq 型、Kirchhoff 型、Signorini 型和 Novozhilov 型有限变形极性弹性介质动力学方程组的具体形式•

关 键 词: 极性连续统; 非完整系物理标架法; 动力学方程组
中图分类号: O313.2 文献标识码: A

1 引言及符号说明

最近, 文献[1]采用 Dluzewski[2] 提出的以欧拉角为角坐标的建议并引进若干有关变形几何学和动力学的新定义, 从而推导出与专著[3]中提出的五种有限变形弹性介质动力学方程相对应的我们称之为 Cauchy 型、Boussinesq 型、Kirchhoff 型、Signorini 型和 Novzhilov 有限变形极性弹性介质的动力学方程组•

在专著[4]中曾对非完整系物理标架法详加论述, 并应用该法系统地推导出正交曲线坐标系下弹性力学和流体力学的全部基本方程的具体形式• 我们在文献[5]中已按非完整系物理标法推导出 Cauchy 型有限变形极性弹性介质的动力学方程组并用自编程序给出具体形式•

到目前为止, 极性连续统理论在应用方面大多仍局限于直角坐标系下的线性问题• 为了能进一步扩大极性连续统理论的应用范围, 首先应从基本方程组着手, 特别是先要能推导出相应理论结果的具体表达形式, 然后才谈得上去解决问题• 本文将分别对其余四种型式有限变形极性弹性介质的动力学方程组进行必要的补充推导, 从而即可利用非完整系物理标架法得到它们在正交曲线坐标系下的具体表达形式• 最近, 本文第一作者已在文献[6]中对 Dluzewski 提出的角变形梯度加以重新定义, 从而可以得到 Cauchy 型和 Piola 型及 Kirchhoff 型三组应力张量和偶应力张量能够相互协调• 因此, 文献[1]中的有关量也要作相应的修改•

本文仍采用文献[4]和[6]的符号和记法•

符 号 说 明:

ρ_0 质量密度

$\boldsymbol{f}$ 体力矢量

$\boldsymbol{l}$ 体力矩矢量

$\boldsymbol{v}$ 速度矢量

* 收稿日期: 1998_04_06; 修订日期: 1999_01_08
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(19672023)和辽宁省科研基金项目(95211011)
作者简介: 戴天民(1931~), 男, 满族, 博士, 教授, 博士生导师, 已发表专著 12 部, 论文 50 余篇.

$\boldsymbol{k}$　角动量矢量

$\boldsymbol{F} = x_{k,K}\boldsymbol{g}_{\varepsilon}\boldsymbol{g}_k$　变形梯度

$\boldsymbol{D} = \varphi_{\alpha\,\Theta}\boldsymbol{g}_{\alpha}\boldsymbol{g}_{\Theta}$　角变形梯度

$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_0 + \boldsymbol{G}$　Cosserat 变形张量

$\Gamma = \Gamma_0 + \boldsymbol{S}$　扭曲张量

$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}^* \cdot \boldsymbol{F}$　应变张量

$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}^* \cdot \boldsymbol{D}_N$　角应变张量

I　单位张量

2　正交曲线坐标下极性弹性介质的动力学方程组

1　Boussinesq 型动力学方程组

把 Boussinesq 型动力学方程组([1] 中式(3.5)) 改写成下列非完整系物理标架下的形式:

$$\tau \cdot \overleftarrow{\nabla} + \rho_0 \boldsymbol{f} = \rho_0 \dot{\boldsymbol{v}}, \tag{1}$$

$$\mu \cdot \overleftarrow{\nabla} + \varepsilon : \boldsymbol{F} \cdot \tau^* + \rho_0 \boldsymbol{l} = \rho_0 \dot{\boldsymbol{k}}, \tag{2}$$

这里 $\tau \cdot \overleftarrow{\nabla}$ 和 $\mu \cdot \overleftarrow{\nabla}$ 是非完整系物理标架下 Piola 型应力张量 $\tau = \tau_{iI}\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_I$ 和偶应力张量 $\mu = \mu_{\alpha I}\boldsymbol{g}_{\alpha}\boldsymbol{g}_I$ 的全协变散度, $\boldsymbol{g}_i$ 和 $\boldsymbol{g}_I$ 为 $\{\boldsymbol{x}\}$ 和 $\{\boldsymbol{X}\}$ 坐标系内非完整系物理标架的基矢量•

戴天民和陈勉曾于 1986 年较为系统地研究过非完整系物理标架下两点张量场的各种不变性微分算子等问题, 这里将只用到两点张量场的散度表达形式•

设 $\boldsymbol{T} = T_{iI}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X})\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_I$ 为任意两点张量, 这里 T 可以为 τ 或 μ, 则它的全协变散度记为:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) \cdot \overleftarrow{\nabla} = T_{iI:I}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X})g_i,$$

$$T_{iI:I}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{X}) = T_{iI,I} + \Gamma_{INI}T_{iN} + (T_{iI,k} + \Gamma_{kli}T_{lI})x_{k,I}, \tag{3}$$

当 $\boldsymbol{T} = T_{iI}(\boldsymbol{X})\boldsymbol{g}_i\boldsymbol{g}_I$ 时, 则上式右侧第三项为零, 这时便得到最近由文献[7] 给出的公式(44c)• 于是我们可以把式(1) 和式(2) 写成下列形式:

$$\overleftarrow{\partial}_I \tau_{iI} + \Gamma_{INI}\tau_{iN} + (\Gamma_{kli}\tau_{lI})\overleftarrow{\partial}_I x_k + \rho_0 f_i = \rho_0 \dot{v}_i, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&\overleftarrow{\partial}_I \mu_{\alpha I} + \Gamma_{INI}\mu_{\alpha N} + (\Gamma_{\beta\gamma\alpha}\mu_{\gamma I})\overleftarrow{\partial}_I \varphi_{\beta} \\ &\quad + g_{\alpha k}\varepsilon_{kij}(\overleftarrow{\partial}_I x_i)\tau_{jI} + \rho_0 l_{\alpha} = \rho_0 \dot{k}_{\alpha},\end{aligned} \tag{5}$$

这里 x_k 和 φ_β 分别为曲线坐标和角坐标分量, $g_{\alpha k} = \boldsymbol{g}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{g}_k$ 为非完整物理标架下的转移张量, 而 Γ_{INI}, Γ_{kli} 和 $\Gamma_{\beta\gamma\alpha}$ 则分别为 $\{\boldsymbol{X}\}$, $\{\boldsymbol{x}\}$ 和 $\{\varphi\}$ 坐标系内的 Christoffel 符号•

我们称式(4) 和式(5) 为非完整系物理标架下的 Boussinesq 型动量方程和动量矩方程, 它们合称为 Boussinesq 型动力学方程组• 对其它三种形式, 也取类似的称呼•

2　Kirchhoff 型动力学方程组

把 Kirchhoff 型动力学方程组([1] 中式(3.9)) 改写成下列非完整系物理标架下的形式:

$$[(\boldsymbol{C}_0 + \boldsymbol{u}\overleftarrow{\nabla}) \cdot \boldsymbol{T}] \cdot \overleftarrow{\nabla} + \rho_0 \boldsymbol{f} = \rho_0 \dot{\boldsymbol{v}}, \tag{6}$$

$$[(\Gamma_0 + \gamma\overleftarrow{\nabla}) \cdot \boldsymbol{M}] \cdot \overleftarrow{\nabla} + \varepsilon : (I + \boldsymbol{u}\overleftarrow{\nabla}) \cdot T^* \cdot (I + \overleftarrow{\nabla}\boldsymbol{u}) + \rho_0 \boldsymbol{l} = \rho_0 \dot{\boldsymbol{k}}, \tag{7}$$

式中 $\boldsymbol{u}$ 和 γ 以及 $\boldsymbol{T} = T_{KL}\boldsymbol{g}_K\boldsymbol{g}_L$ 和 $\boldsymbol{M} = M_{\Theta L}\boldsymbol{g}_{\Theta}\boldsymbol{g}_L$ 分别为非完整系物理标架下的线位移矢量和角位移矢量以及 Kirchhoff 型应力张量和偶应力张量•

这里只需对 $[(\boldsymbol{a}\overleftarrow{\nabla}) \cdot \boldsymbol{B}] \cdot \overleftarrow{\nabla}$ 型式的表达形式进行下列补充推导, 其中 $\boldsymbol{a}$ 为任意矢量, 可以是 $\boldsymbol{u}$ 和 γ• $\boldsymbol{B}$ 为二阶张量, 可以是 $\boldsymbol{T}$ 或 $\boldsymbol{M}$•

$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{a}\overleftarrow{\nabla}) \cdot \boldsymbol{B}] \cdot \overleftarrow{\nabla} &= [(a_N \boldsymbol{g}_N)(\boldsymbol{g}_K\overleftarrow{\partial}_K) \cdot (B_{IJ}\boldsymbol{g}_I\boldsymbol{g}_J)] \cdot (\boldsymbol{g}_M\overleftarrow{\partial}_M) = \\ &\quad \{\overleftarrow{\partial}_M[(\overleftarrow{\partial}_N a_I + \Gamma_{NLI})B_{LM}] + (\overleftarrow{\partial}_P a_I + \Gamma_{PLI}a_L)B_{IM}\Gamma_{MPN}\}\boldsymbol{g}_N•\end{aligned} \tag{8}$$

3　Signorini 型动力学方程组

把 Signorini 型动力学方程组([1] 中式(3.13)) 写成下列非完整系物理标架下的形式:

$$\boldsymbol{G} \cdot (\boldsymbol{T} \cdot \overleftarrow{\nabla}) + \boldsymbol{F}^* \cdot (\boldsymbol{F}\overleftarrow{\nabla}) : \boldsymbol{T} + \rho_0 \boldsymbol{F}^* \cdot \boldsymbol{f} = \rho_0 \boldsymbol{F}^* \cdot \dot{\boldsymbol{v}}, \tag{9}$$

$$\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{M}\cdot\overline{\iddots})+\boldsymbol{D}^{*}\cdot(\boldsymbol{D}\overline{\square}):\boldsymbol{M}+\boldsymbol{D}^{*}\cdot\varepsilon:\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{F}^{*}+\rho_0\boldsymbol{D}^{*}\cdot\boldsymbol{l}=\rho_0\boldsymbol{D}^{*}\cdot\dot{\boldsymbol{k}}, \tag{10}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 及 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 分别表示变形梯度和应变张量及由[6]中定义的角变形梯度和角应变张量•

这里只需补充推导 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\overline{\iddots})$ 型式的表达形式, 其中 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 均为二阶张量, 可分别为 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{M}$, 则 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\overline{\iddots})$ 的表达形式为

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\overline{\iddots})=(A_{IJ}\boldsymbol{g}_I\boldsymbol{g}_J)\cdot[(B_{KL}\boldsymbol{g}_K\boldsymbol{g}_L)\cdot\boldsymbol{g}_M\bar{\partial}_M]=A_{IJ}(\bar{\partial}_LB_{JL}+B_{PL}\Gamma_{LPJ}+B_{JL}\Gamma_{PLP})\boldsymbol{g}_I, \tag{11}$$

4 Novozhilov 型动力学方程组

把 Novozhilov 型动力学方程组([1]中式(3.15))写成下列非完整系物理标架下的形式:

$$(\boldsymbol{T}\cdot\overline{\iddots})+\overset{-1}{\boldsymbol{G}}\cdot\left\{(\boldsymbol{G}\overline{\iddots}):\boldsymbol{T}-\frac{1}{2}(\overline{\iddots}\boldsymbol{G}):\boldsymbol{T}_s-[(\overline{\square}\boldsymbol{F}^{*})\cdot\boldsymbol{F}]_a:\boldsymbol{T}_a\right\}+\rho_0\boldsymbol{B}=\rho_0\dot{\boldsymbol{v}}, \tag{12}$$

$$(\boldsymbol{M}\cdot\overline{\iddots})+\overset{-1}{\boldsymbol{S}}\cdot\left\{(\boldsymbol{S}\overline{\iddots}):\boldsymbol{M}-\frac{1}{2}(\overline{\iddots}\boldsymbol{S}):\boldsymbol{M}_s-[(\overline{\square}\boldsymbol{D}^{*})\cdot\boldsymbol{D}]_a:\boldsymbol{M}_a+\overset{-1}{\boldsymbol{D}}\cdot\varepsilon:\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}^{*}\cdot\boldsymbol{F}^{*}\right\}+\rho_0\boldsymbol{L}=\rho_0\dot{\boldsymbol{k}}, \tag{13}$$

这里只需对 $\overset{-1}{\boldsymbol{A}}\cdot(\boldsymbol{A}\overline{\iddots}):\boldsymbol{B}$ 型式的表达形式进行下列推导, 其中 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{B}$ 均为二阶张量, 可分别为 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 及 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{M}$•

$$\overset{-1}{\boldsymbol{A}}\cdot(\boldsymbol{A}\overline{\iddots}):\boldsymbol{B}=(\overset{-1}{A}_{IJ}\boldsymbol{g}_I\boldsymbol{g}_J)\cdot[(A_{KL}\boldsymbol{g}_K\boldsymbol{g}_L)\boldsymbol{g}_M\bar{\partial}_M]:(B_{NQ}\boldsymbol{g}_N\boldsymbol{g}_Q)=\overset{-1}{A}_{IJ}(\bar{\partial}_MA_{JL}+A_{PL}\Gamma_{MPJ}+A_{JP}\Gamma_{MPL})B_{LM}\boldsymbol{g}_I• \tag{14}$$

3 结 语

1. 应用专著[4]中的有关表达形式和本文所做的必要补充, 已可给出正交曲线坐标系下的 Boussinesq 型、Kirchhoff 型、Signorini 型、Novozhilov 型的有限变形极性连续统的动力学方程组的具体形式•

2. 本文连同文献[5]中给出的 Cauchy 型的结果一起已可推导出正交曲线坐标系下所有五种型式的有限变形极性连续统的动力学方程组的全部具体形式, 这便为分析和计算这类问题提供了可能性•

致谢 本文第二作者还得到了辽宁大学青年科研基金资助, 谨此致谢•

参 考 文 献

[1] 戴天民. 有限变形极性弹性介质的各型动力学方程组[J]. 应用数学和力学, 1997, **18**(10): 861~865.

[2] Dluzewski P H. Finite deformations of polar elastic media[J]. Int J Solids Structures, 1993, **30**(16): 2277~2285.

[3] 郭仲衡. 非线性弹性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1980.

[4] 戴天民. 张量和连续介质力学[M]. 沈阳: 辽宁大学出版社, 1986.

[5] 宋彦琦, 戴天民. 计算机辅助推导微极连续统方程[J]. 工程力学(增刊), 1995, 247~249.

[6] 戴天民. 三组非局部极性热力连续统的均衡方程和跳变条件[J]. 中国科学(A 辑), 1997, **27**(12):

1106~ 1110.

[7] Altman W, Marmo de Oliveira A. Physical and anholonomic components of tensors of elastic theory [J]. Int J Non_Linear Mechanics, 1995, **30**(3): 341~ 358.

Dynamical Equations for Polar Continua in Orthogonal Curvilinear Coordinates

Dai Tianmin[1], Song Yanqi[2]

([1]Center for the Application of Mathematics and Department of Mathematics, Liaoning University, Shenyang 110036, P R China;

[2]Graduate School of China Mine University, Beijing 100083, P R China)

Abstract: In this paper the concrete forms of dynamical equations for finite deformable polar elastic media of Boussinesq type, Kirchhoff type, Signorini type and Novozhilov type with help of the anholonomic physical frame method are derived.

Key words: polar continua; dynamical equations; anholonomic physical frame