应用数学和力学, 第 20 卷 第 5 期(1999 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 05_0452_09

带弹性范围物质理论和背应力定义*

陈良森[1], 赵兴华[2]

([1] 南昌大学南区工程力学所, 南昌 330029; [2] 上海大学, 上海市应用数学和力学所, 上海 200072)

摘要: 在推广 Lucchesi 和 Podio_Guidugli(1988) 的带弹性范围物质理论的基础上, 表明了背应力作为 Cauchy 应力空间中屈服面"中心"的定义存在问题• 背应力是 Lagrange 型变量, 只能定义在 Lagrange 型应力空间上•

关 键 词: 带弹性范围物质理论; 弹塑性本构; 背应力
中图分类号: O344.1 文献标识码: A

引 言

一般地, 随动强化是由一个称为移动张量或背应力的变量刻划, 它的值表示应力空间中屈服面的"中心"处的应力[1~6]• 由于不同应力张量的不同, 背应力的定义不同• 文献中存在两种基本定义: 其一是背应力的值为 Cauchy 应力空间中屈服面的"几何中心"(Nemat_Nasser(1983), Dafalias(1988) 及 Agah_Tehrani 等(1987)); 另一定义是背应力的值为第二类 Piola_Kirchhoff 应力空间中的屈服面的"中心"[2,3]• 关于第一种定义, 客观性原理表明它只能是球张量 $p\boldsymbol{I}$, p 是实数, $\boldsymbol{I}$ 为二阶单位张量, 因此, 只能描述非常特殊的随动强化特性•

本文研究表明, 一般的背应力只能定义为 Lagrange 型应力空间中屈服面的"几何中心", 即前面所指的第二种定义•

为使以上讨论在较严格的基础上, 本文首先推广了 Lucchesi 和 Podio_Guidugli(1988) 的带弹性范围物质理论[4]• 文[4] 中的理论因采用 Lee(1969) 的定义确定卸载历史, 而不能描述实际弹塑性物质的随动强化特性• 为克服此困难, 在此通过假设 1~ 5 定义了一类带弹性范围物质• 其中假设 1~ 3 和假设 5 与[4] 中的相同• 假设 4 认为对每一历史应力弹性范围 $\mathscr{A}(\boldsymbol{F})$ 的子集 $\mathscr{S}(\boldsymbol{F})$ 的"几何中心" 存在且属于 $\mathscr{S}(\boldsymbol{F})$• 这一假设隐含于文献中的弹塑性物质理论中•

1 基 本 概 念

本节及下面二节将介绍文[4] 中的基本术语、定义和结果•

1.1 符 号

设 R^3 是三维欧氏空间, R_{Lin} 是 R^3 上的所有线性变换之集, $\boldsymbol{I} \in R_{\mathrm{Lin}}$ 恒等变换• R_{Lin} 是 9 维欧氏空间, 其内积定义为

$$A \cdot B = \mathrm{tr}(AB^{\mathrm{T}}), \qquad A, B \in R_{\mathrm{Lin}}, \tag{1}$$

* 来稿日期: 1998_04_14; 修订日期: 1998_11_08
作者简介: 陈良森(1966~), 男, 博士, 副教授; 赵兴华(1939~), 男, 教授.

其中 tr 是迹算子 B^{T} 是 B 的转置• 下面是一些后面要用到的 R_{Lin} 的子集：

$R_{\mathrm{Lin}^+} := R_{\mathrm{Lin}}$ 中行列式为正数的元素之集;

$R_{\mathrm{Sym}} := R_{\mathrm{Lin}}$ 中对称元素之集;

$R_{\mathrm{Sym}^+} := R_{\mathrm{Lin}^+}$ 中正定对称元素之集;

$R_{\mathrm{Rot}} := R_{\mathrm{Lin}^+}$ 旋转变换之集•

对 R_{Lin} 的任意子集 $\mathscr{A}$ 分别记 $\mathring{\mathscr{A}}$ 和 $\partial\mathscr{A}$ 为 $\mathscr{A}$ 的内部和边界• 对任意 $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subset R_{\mathrm{Lin}}$, 定义集合 $\mathscr{A}\mathscr{B} \subset R_{\mathrm{Lin}}$ 为

$$\mathscr{A}\mathscr{B} := \{AB \mid A \subset \mathscr{A}, B \subset \mathscr{B}\} \cdot \tag{2}$$

特别是, $R_{\mathrm{Rot}}\mathscr{A}$ 是集合

$$R_{\mathrm{Rot}}\mathscr{A} := \{QA \mid Q \in R_{\mathrm{Rot}}, A \in \mathscr{A}\} \cdot \tag{3}$$

设 $Q \in R_{\mathrm{Rot}}$, $\mathscr{A} \subset R_{\mathrm{Lin}}$, 记

$$Q\mathscr{A}Q^{\mathrm{T}} := \{QAQ^{\mathrm{T}} \mid A \in \mathscr{A}\}, \tag{4}$$

$$Q\mathscr{A} := \{QA \mid A \in \mathscr{A}\}, \tag{5}$$

$$\mathscr{A}Q := \{AQ \mid A \in \mathscr{A}\} \cdot \tag{6}$$

首先

1.2 历 史

在此, 一变形过程称为一历史• 注意本文仅考虑率无关的带弹性范围物质, 任意历史的时限假设为实数集 $\mathbf{R}$ 中的闭区间 $[0, 1]$• 一历史 $\boldsymbol{F}$ 是映射

$$\boldsymbol{F}: [0, 1] \to R_{\mathrm{Lin}^+} \tag{7}$$

表示某物质点关于固定参考构型的变形梯度的单参数族, $\boldsymbol{F}(0)$ 和 $\boldsymbol{F}(1)$ 分别是历史的初值和终值• 记 $\mathscr{F}$ 是该物质点所有历史之集•

如果一历史具有常值, 就称之为常历史• 对 $A \in R_{\mathrm{Lin}^+}$, 值为 A 的常历史记为 $\boldsymbol{A}^+$, 它是映射

$$\tau \mapsto A = \boldsymbol{A}^+(\tau), \qquad \tau \in [0, 1] \cdot \tag{8}$$

刚性历史 $\boldsymbol{Q}$ 由条件 $\boldsymbol{Q}(\tau) \in R_{\mathrm{Rot}}$, $\tau \in [0, 1]$ 定义• 尤其是历史 $\boldsymbol{I}^+$ 是刚性的和常值的, 它表示物质点永久地占有参考构型, 因而称为参考历史•

对任意历史 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{F}$, $\tau \in [0, 1]$, $\boldsymbol{F}$ 的 τ_截段是一历史, 记为 $\boldsymbol{F}_\tau$, 由

$$\boldsymbol{F}_\tau(\tau') := \boldsymbol{F}(\tau\tau'), \qquad \tau' \in [0, 1] \tag{9}$$

定义• 显然, $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{F}(0)^+$, $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}(1)^+$ •

历史 $\boldsymbol{G}$ 称为历史 $\boldsymbol{F}$ 的后续, 如果存在 $\tau \in]0, 1]$ 使得 $\boldsymbol{G}_\tau = \boldsymbol{F}$ ° $\boldsymbol{F}$ 的常后续是满足这样的条件的历史: 存在 $\tau \in]0, 1]$ 使得 $\boldsymbol{G}_\tau = \boldsymbol{F}$, 且 $\boldsymbol{G}(\tau') = \boldsymbol{F}(1)$, $\tau' \in [\tau, 1]$• 给定 $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}_{\mathrm{Lin}^+}$, $\boldsymbol{F}$ 的至 A 的后续 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{G}(1) = \boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{F}$ 的后续•

对任意历史 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{F}$, 它们的积 $\boldsymbol{FG}$ 和 $\boldsymbol{GF}$ 是如下历史

$$\boldsymbol{FG}(\tau) := \boldsymbol{F}(\tau)\boldsymbol{G}(\tau), \qquad \tau \in [0, 1], \tag{10}$$

$$\boldsymbol{GF}(\tau) := \boldsymbol{G}(\tau)\boldsymbol{F}(\tau), \qquad \tau \in [0, 1] \cdot \tag{11}$$

1.3 允许集

设 $\boldsymbol{F}$ 是一历史, $\mathscr{E} \subset R_{\mathrm{Lin}^+}$, $\mathscr{E}$ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的允许集, 如果下列条件得到满足:

(i) $\mathscr{E}$ 是 R_{Lin^+} 中一开集的闭包;

(ii) $\mathscr{E}$ 是弧连通的;

(iii) $\boldsymbol{F}(1) \subset \mathscr{E}$;

(iv) 如果 $\boldsymbol{F}(1)\in\partial\mathscr{E}$ 那么存在 $\tau_1,\tau_2,0\leqslant\tau_1<\tau_2\leqslant1$, 使得

$$\boldsymbol{F}(\tau)\in\mathscr{E},\qquad \tau\in]\tau_1,\tau_2[;\tag{10}$$

$$\boldsymbol{F}(\tau)\in\mathscr{E},\qquad \tau\in[\tau_2,1]\cdot\tag{11}$$

设 $\mathscr{E}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的允许集, $\mathscr{C}(\boldsymbol{F},\mathscr{E})$ 是所有 $\boldsymbol{F}$ 的在 $\mathscr{E}$ 取值的后续之集 即历史 $\boldsymbol{G}\in\mathscr{C}(\boldsymbol{F},\mathscr{E})$. 如果存在一 $\tau\in]0,1]$ 使得

(i) $\boldsymbol{G}_\tau=\boldsymbol{F}$;

(ii) $\boldsymbol{G}(\tau')\in\mathscr{E}\ \tau'\in[\tau,1]\cdot$

2 本构泛函

设 $\mathscr{G}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子集 它是所有初值为正交张量的历史之集 即

$$\mathscr{G}=\left\{\boldsymbol{F}\in\mathscr{F}\mid\boldsymbol{F}(0)\in R_{\mathrm{Rot}}\right\}\cdot\tag{12}$$

对任意历史 $\boldsymbol{F}\in\mathscr{G}$ 和任意刚性历史 $\boldsymbol{Q}\in\mathscr{G}$, $\boldsymbol{FQ}\in\mathscr{G}$ 而且 $\boldsymbol{QF}\in\mathscr{G}\cdot$

本文所考虑的物质由本构泛函 $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{T}:\mathscr{G}\to R_{\mathrm{Sym}},\quad T=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{F})\tag{13}$$

决定, 其中 $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{F})$ 给出历史 $\boldsymbol{F}$ 结束时物质的Cauchy应力 $T\cdot$ 此定义不同于Noll的简单物质理论的定义· (13)式假设物质的某初始状态已知, 而且仅考虑物质的从此初状态开始的可能变形过程· 泛函 $\boldsymbol{T}$ 的进一步限制将有后面的假设给出·

对任意 $\boldsymbol{F}\in\mathscr{G}$, $\mathscr{E}\subset R_{\mathrm{Lin}^+}$, $\mathscr{E}$ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的(相应 $\boldsymbol{T}$ 的)弹性集, 如果

(i) $\mathscr{E}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的允许集;

(ii) $\boldsymbol{T}$ 在 $\mathscr{C}(\boldsymbol{F},\mathscr{E})$ 上路径无关. 即对任意 $\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}\in\mathscr{C}(\boldsymbol{F},\mathscr{E})$ 且 $\boldsymbol{G}(1)=\boldsymbol{H}(1)$, $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{G})=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{H})\cdot$

显然 $\mathscr{E}$ 的任意子集如是 $\boldsymbol{F}$ 的允许集也是 $\boldsymbol{F}$ 的弹性集·

假设1 对任意 $\boldsymbol{F}\in\mathscr{G}$ 存在弹性集 $\mathscr{E}(\boldsymbol{F})$ 使得如 $\mathscr{E}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的弹性集, 则 $\mathscr{E}\subset\mathscr{E}(\boldsymbol{F})\cdot$

对任意 $\boldsymbol{F}\in\mathscr{G}$ 最多存在一个最大弹性集 称它为 $\boldsymbol{F}$ 相应 $\boldsymbol{T}$ 的弹性范围 $\mathscr{E}(\boldsymbol{F})\cdot$ 称 $\boldsymbol{G}$ 为 $\boldsymbol{F}$ 的弹性后续, 如果 $\boldsymbol{G}\in\mathscr{C}(\boldsymbol{F},\mathscr{E}(\boldsymbol{F}))\cdot$ 容易证明, 如 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的弹性后续, 那么, $\mathscr{E}(\boldsymbol{F})\subset\mathscr{E}(\boldsymbol{G})\cdot$ 下面假设它们相等·

假设2 对任意 $\boldsymbol{F}\in\mathscr{G}$ 如 $\boldsymbol{G}\in\mathscr{C}(\boldsymbol{F},\mathscr{E}(\boldsymbol{F}))$, 那么, $\mathscr{E}(\boldsymbol{F})=\mathscr{E}(\boldsymbol{G})\cdot$

3 弹性响应映射

对任意 $\boldsymbol{F}\in\mathscr{G}$, $A\in\mathscr{E}(\boldsymbol{F})$, $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的至 A 的弹性后续, 即 $\boldsymbol{G}\in\mathscr{C}(\boldsymbol{F},\mathscr{E}(\boldsymbol{F}))$ 且 $\boldsymbol{G}(1)=A$, 定义

$$\boldsymbol{T}^*(A;\boldsymbol{F}):=\boldsymbol{T}(\boldsymbol{G})\cdot\tag{14}$$

由于 T 在 $\mathscr{C}(\boldsymbol{F},\mathscr{E}(\boldsymbol{F}))$ 上路径无关, (14)定义映射

$$\boldsymbol{T}^*(\cdot;\boldsymbol{F}):\mathscr{E}(\boldsymbol{F})\to R_{\mathrm{Sym}},\tag{15}$$

称为 $\boldsymbol{F}$ 的弹性响应映射· 尤其是对 $A=\boldsymbol{F}(1)$ 有

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{F}(1);\boldsymbol{F})\cdot\tag{16}$$

由假设2可知, 对任意 $\boldsymbol{G}\in\mathscr{C}(\boldsymbol{F},\mathscr{E}(\boldsymbol{F}))$,

$$\boldsymbol{T}^*(\cdot;\boldsymbol{G})=\boldsymbol{T}^*(\cdot;\boldsymbol{F})\cdot\tag{17}$$

称本构泛函是标架无关的, 如对任意历史 $\boldsymbol{F}\in\mathscr{G}$ 和任意刚性历史 $\boldsymbol{Q}$,

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{QF}) = \boldsymbol{Q}(1)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}(1)^{\mathrm{T}} \cdot \tag{18}$$

假设 3　本构泛函 $\boldsymbol{T}$ 满足(18)· 下面的结果是[4] 中的命题 4. 2·

命题 3. 1　本构泛函 $\boldsymbol{T}$ 是标架无关的当且仅当对任意 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{G}$ 弹性范围 $\mathscr{E}(\boldsymbol{F})$ 和弹性响应映射 $\boldsymbol{T}^*(\cdot;\boldsymbol{F})$ 具有下面的性质:

(i) $\mathscr{E}(\boldsymbol{F}) = R_{\mathrm{Rot}}\mathscr{E}(\boldsymbol{F})$, 而且对任意 $Q \in R_{\mathrm{Rot}}, A \in \mathscr{E}(\boldsymbol{F})$

$$\boldsymbol{T}^*(QA;\boldsymbol{F}) = Q\boldsymbol{T}^*(A;\boldsymbol{F})Q^{\mathrm{T}};$$

(ii) 对任意刚性历史 $\boldsymbol{Q}$, $\mathscr{E}(\boldsymbol{QF}) = \mathscr{E}(\boldsymbol{F})$, 而且

$$\boldsymbol{T}^*(\cdot;\boldsymbol{QF}) = \boldsymbol{T}^*(\cdot;\boldsymbol{F}) \cdot$$

为了推广 Lucchesi 和 Podio_Guidugli(1988) 的理论, 从而考虑实际材料的任意随动强化特性, 本节以下内容以及下一节将引入一些新概念·

对任意 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{G}$ 和任意 $F \in \mathscr{E}(\boldsymbol{F})$, 极分解定理表明, 存在唯一的旋转张量 $\boldsymbol{R}$ 和伸长张量 $\boldsymbol{U}$ 使得 $F = \boldsymbol{RU}$· 定义 $\mathscr{E}(\boldsymbol{F})$ 的子集 $\mathscr{E}^+(\boldsymbol{F})$ 为

$$\mathscr{E}^+(\boldsymbol{F}) := \left\{ \boldsymbol{U} \in R_{\mathrm{Sym}} \mid \boldsymbol{U} \in \mathscr{E}(\boldsymbol{F}) \right\} \cdot \tag{19}$$

显然, 有

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{F}) = R_{\mathrm{Rot}}\mathscr{E}^+(\boldsymbol{F}) \cdot$$

对 $\boldsymbol{F}$ 的任意弹性后续 $\boldsymbol{G}$, 能进行下面的分解

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{R}_{\mathrm{G}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{G}},$$

其中 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{G}}$ 是刚性历史, $\boldsymbol{U}_{\mathrm{G}}$ 是取值于 R_{Sym^+} 的正历史· 因此有

$$\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{G}_{\mathrm{G}}(1);\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{R}_{\mathrm{G}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{G}};\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{R}_{\mathrm{G}}(1)\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{U}_{\mathrm{G}}(1);\boldsymbol{F})\boldsymbol{R}_{\mathrm{G}}(1)^{\mathrm{T}} \cdot$$

定义

$$\sigma^*(\boldsymbol{U}_{\mathrm{G}}(1);\boldsymbol{F}) := \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{U}_{\mathrm{G}}(1);\boldsymbol{F}), \tag{21}$$

那么, 对任意 $\boldsymbol{G} \in \mathscr{C}(\boldsymbol{F}, \mathscr{E}(\boldsymbol{F}))$,

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{G}(1);\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{R}_{\mathrm{G}}(1)\sigma^*(\boldsymbol{U}_{\mathrm{G}}(1);\boldsymbol{F})\boldsymbol{R}_{\mathrm{G}}(1)^{\mathrm{T}} \cdot \tag{22}$$

显然 $\sigma^*(\cdot;\boldsymbol{F})$ 是一映射

$$\sigma^*(\cdot;\boldsymbol{F}): \mathscr{E}^+(\boldsymbol{F}) \to R_{\mathrm{Sym}} \cdot \tag{23}$$

利用 $\boldsymbol{T}^*(\cdot;\boldsymbol{F})$ 的性质可知, $\sigma^*(\cdot;\boldsymbol{F})$ 也具有下面的性质:

(i) 对任意刚性历史 $\boldsymbol{Q}$,

$$\sigma^*(\cdot;\boldsymbol{QF}) = \sigma^*(\cdot;\boldsymbol{F}); \tag{24}$$

(ii) 对任意 $\boldsymbol{G} \in \mathscr{C}(\boldsymbol{F}, \mathscr{E}(\boldsymbol{F}))$,

$$\sigma^*(\cdot;\boldsymbol{G}) = \sigma^*(\cdot;\boldsymbol{F}) \cdot \tag{25}$$

4　应力弹性范围

对任意 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{G}$ 定义

$$\mathscr{S}(\boldsymbol{F}) := \left\{ T \in R_{\mathrm{Sym}} \mid T = \boldsymbol{T}^*(A;\boldsymbol{F}),\ A \in \mathscr{E}(\boldsymbol{F}) \right\}, \tag{26}$$

称为 $\boldsymbol{F}$ 的相应 $\boldsymbol{T}$ 的应力弹性范围· 它具有下面的性质:

命题 4. 1　对 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{G}$ 和任意刚性历史 $\boldsymbol{Q}$,

(i) $\mathscr{S}(\boldsymbol{QF}) = \mathscr{S}(\boldsymbol{F})$;

(ii) 对任意 $Q \in R_{\mathrm{Rot}}$, $Q\mathscr{S}(\boldsymbol{F})Q^{\mathrm{T}} = \mathscr{S}(\boldsymbol{F})$ ·

证明　(i), 从 $\mathscr{S}(\boldsymbol{F})$ 的定义和 $\boldsymbol{T}^*(\cdot;\boldsymbol{F})$ 及 $\mathscr{E}(\boldsymbol{F})$ 的性质可知, 对任意刚性历史 $\boldsymbol{Q}$,

$$\mathscr{E}(\boldsymbol{QF}) = \mathscr{E}(\boldsymbol{F}),\ \boldsymbol{T}^*(\cdot;\boldsymbol{QF}) = \boldsymbol{T}^*(\cdot;\boldsymbol{F}),$$

因此有 $\mathscr{S}(\boldsymbol{QF}) = \mathscr{S}(\boldsymbol{F})$• 关于(ii)可由命题3.1中的(ii)证明• 由于对任意 $Q \in R_{\mathrm{Rot}}$ 和 $A \in \mathscr{E}(\boldsymbol{F})$, $QA \in \mathscr{E}(\boldsymbol{F})$, 因此,

$$\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{QA};\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{QT}^*(\boldsymbol{A};\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \in \mathscr{S}(\boldsymbol{F}),$$

即 $Q\mathscr{S}(\boldsymbol{F})Q^{\mathrm{T}} \subset \mathscr{S}(\boldsymbol{F})$• 同样地有 $Q^{\mathrm{T}}\mathscr{S}(\boldsymbol{F})Q \subset \varphi(\boldsymbol{F})$• 因为 $\mathscr{S}(\boldsymbol{F}) = QQ^{\mathrm{T}}\mathscr{S}(\boldsymbol{F})QQ^{\mathrm{T}} \subset Q\mathscr{S}(\boldsymbol{F})Q^{\mathrm{T}}$, 因此, $\mathscr{S}(\boldsymbol{F}) = Q\mathscr{S}(\boldsymbol{F})Q^{\mathrm{T}}$•

另外, $\boldsymbol{T}^*(\cdot;\boldsymbol{F})$ 的连续性表明应力弹性范围满足下列条件:

(i) $\mathscr{S}(\boldsymbol{F})$ 是弧连通的;

(ii) 存在 $\tau \in [0, 1]$ 使得对任意 $\tau' \in [\tau, 1]$, $\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{F}(\tau');\boldsymbol{F}) \in \mathscr{S}(\boldsymbol{F})$•

定义集合

$$\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F}) := \left\{\sigma \in R_{\mathrm{Sym}} \mid \sigma = \sigma^*(U;\boldsymbol{F}),\quad U \in \mathscr{E}(\boldsymbol{F}\right. \quad (27)$$

据定义

$$\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F}) \subset \mathscr{S}(\boldsymbol{F}), \quad (28)$$

而且下面的命题成立•

命题 4.2 $\mathscr{S}(\boldsymbol{F}) = \bigcup_{Q \in R_{\mathrm{Rot}}} Q\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})Q^{\mathrm{T}}$•

证明 对任意 $T \in \mathscr{S}(\boldsymbol{F})$, 存在 $A \in \mathscr{E}(\boldsymbol{F})$ 使得

$$\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{A};\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{RU};\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{RT}^*(\boldsymbol{U};\boldsymbol{F})\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}\sigma^*(\boldsymbol{U};\boldsymbol{F})\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} \in R\mathscr{S}_0(\quad)R^{\mathrm{T}}•$$

因此, $\mathscr{S}(\boldsymbol{F}) \subset \bigcup_{Q \in R_{\mathrm{Rot}}} Q\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})Q^{\mathrm{T}}$•

另一方面, 对任意 $\sigma \in \mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$ 存在 $U \in \mathscr{E}^+(\boldsymbol{F}) \subset \mathscr{E}(\boldsymbol{F})$ 使得 $\sigma = \sigma^*(U;\boldsymbol{F})$• 对任意

$Q \in R_{\mathrm{Rot}}$, $QU \in \mathscr{E}(\boldsymbol{F})$ 而且 $Q\sigma^*(U;\boldsymbol{F})Q^{\mathrm{T}} = QT^*(U;\boldsymbol{F})Q^{\mathrm{T}} = T^*(QU;\boldsymbol{F}) \in \mathscr{S}(\boldsymbol{F})$,

即 $$Q\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})Q^{\mathrm{T}} \subset \mathscr{S}(\boldsymbol{F})•$$

因此命题成立•

极分解的唯一性表明 $\mathscr{E}^+(\boldsymbol{F})$ 是闭的和弧连通的, $\sigma^*(\cdot;\boldsymbol{F})$ 的连续性表明 $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$ 是弧连通的• 如果 $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F}) \subset R_{\mathrm{Sym}}$ 是闭集, 那么它是可测的• 假设对任意 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{G}$,

$$\sigma_0(\boldsymbol{F}) := \frac{\int_{\mathscr{S}_\sigma(\boldsymbol{F})} \sigma \mathrm{d}\Omega}{\int_{\mathscr{S}_\sigma(\boldsymbol{F})} \mathrm{d}\Omega} \quad (29)$$

存在, 其中 $vol(\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})) = \int_{\mathscr{S}_\sigma(\boldsymbol{F})} \mathrm{d}\Omega$ 是 $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$ 的容积, $\mathrm{d}\Omega$ 为开集 R_{Sym} 中的容积元• 由定义可知, $\sigma_0(\boldsymbol{F})$ 如果存在就唯一, 几何上可认为是 $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$ 的"中心"• 进一步假设 $\sigma_0(\boldsymbol{F}) \in \mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$, 即存在 $U_0 \in \mathscr{E}^+(\boldsymbol{F})$ 使得 $\sigma_0(\boldsymbol{F}) = \sigma^*(U_0;\boldsymbol{F})$• 上述假设总结为下面的假设4•

假设4 对任意 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{G}$. $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$ 是闭的, $\sigma_0(\boldsymbol{F}) \in \mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$ 存在•

定义集合

$$\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F}) := \left\{\boldsymbol{Q}\sigma_0(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \mid \boldsymbol{Q} \in R_{\mathrm{Rot}}\right\}, \quad (30)$$

它是 $\mathscr{S}(\boldsymbol{F})$ 的子集• 容易证明, $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$ 仅含一个元素当且仅当 $\sigma_0(\boldsymbol{F}) = p_0(\boldsymbol{F})\boldsymbol{I}$, $p_0(\boldsymbol{F}) \in$ **R(实数集)** •

设 g_F 是集合 $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$ 的不变群, $g_F \subset R_{\mathrm{Rot}}$, 准确地说, 对任意 $\boldsymbol{Q} \in g_F$,

$$\boldsymbol{Q}\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \subset \mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})\cdot \tag{31}$$

由 $\sigma_0(\boldsymbol{F})$ 的定义和假设4 可证明下述结论•

命题 4.3　如果 $\boldsymbol{Q} \in g_F$, 那么 $\sigma_0(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{Q}\sigma_0(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$•

如果 $g_F = R_{\mathrm{Rot}}$, 那么 $\sigma_0(\boldsymbol{F}) = p_0(\boldsymbol{F})\boldsymbol{I}$•　在此情形

$$\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F}) = \mathscr{S}(\boldsymbol{F})\cdot \tag{32}$$

注记 1　在此注意 $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$ 而不是 $\mathscr{S}(\boldsymbol{F})$ 被用于定义"几何中心"•　原因是由假设 3 和(32)可知, $\mathscr{S}(\boldsymbol{F})$ 的"中心"必须是 $p_0\boldsymbol{I}$, 因而不能表示任意的随动强化, 详见第 6 节的讨论•

集合 $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$ 和 $\sigma_0(\boldsymbol{F})$ 具有下面的性质:

命题 4.4　对任意 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{S}$ 和任意刚性历史 $\boldsymbol{Q}$,

$$\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F}) = \mathscr{S}_0(\boldsymbol{QF}), \quad \sigma_0(\boldsymbol{F}) = \sigma_0(\boldsymbol{QF})\cdot$$

证明　由于 $\mathscr{E}^+(\boldsymbol{QF}) = \mathscr{E}^+(\boldsymbol{F})$, $\sigma^*(\cdot;\boldsymbol{QF}) = \sigma^*(\cdot;\boldsymbol{F})$, 因此, $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{QF}) = \mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$•　由定义可知 $\sigma_0(\boldsymbol{QF}) = \sigma_0(\boldsymbol{F})$•

5　塑性历史

在本节对任意历史 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{G}$ 赋予唯一一塑性历史 $\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}$•　此定义是基于 Dafalias(1988) 为推广 Lee(1969) 的无应力构型概念提出的思想•

对任意 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{G}$ 称历史 $\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}} \in \mathscr{F}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的塑性历史, 如果 $\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}$ 满足下列条件: 对任意 $\tau \in [0, 1]$

(i) $\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}(\tau) \in \mathscr{E}^+(\boldsymbol{F})$;

(ii) $\sigma^*(\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}};\boldsymbol{F}) = \sigma_0(\boldsymbol{F}_\tau)$•　(33)

据假设 4 上述定义是有意义的•　当对任意 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{G}$, $\sigma_0(\boldsymbol{F}) \equiv \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{F} \in \mathscr{G}$ 的塑性历史 $\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}$ 就是[4]中的正定卸载历史•　这也是把 $\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}$ 称为 $\boldsymbol{F}$ 的塑性历史而不是卸载历史的原因•　塑性历史的上述定义使得理论可表述任意随动强化行为•　类似[4]下面提出假设 5•

假设 5　对任意历史 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{G}$, 存在唯一的塑性历史 $\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}$•

命题 5.1　对任意 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{G}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 的任意弹性后续 $\boldsymbol{G} \in \mathscr{C}(\boldsymbol{F}, \mathscr{E}(\boldsymbol{F}))$, $\boldsymbol{G}$ 的塑性历史是 $\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}$ 的常后续•

证明　设 $\boldsymbol{G} \in \mathscr{C}(\boldsymbol{F}, \mathscr{E}(\boldsymbol{F}))$, 那么存在 $\tau \in [0, 1]$ 使得 $\boldsymbol{G}_\tau = \boldsymbol{F}$•　这表明 $(\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}})_\tau = \boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}$•　定义

$$\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{G}}(\tau') = \boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}(1) \in \mathscr{E}^+(\boldsymbol{G}_{\tau'}) = \mathscr{E}^+(\boldsymbol{F}), \qquad \tau' \in [\tau, 1]\cdot$$

由于对任意 $\tau' \in [\tau, 1]$,

$$\sigma^*(\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{G}}(\tau');\boldsymbol{G}_{\tau'}) = \sigma^*(\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{G}}(\tau');\boldsymbol{F}) = \sigma^*(\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}(1);\boldsymbol{F}) = \sigma_0(\boldsymbol{F}) = \sigma_0(\boldsymbol{G}_{\tau'})\cdot$$

假设 5 表明 $\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 的塑性历史•

对 $\boldsymbol{F}$ 是常历史的情形, $\boldsymbol{F}$ 的弹性后续满足 $\boldsymbol{G}_0 = \boldsymbol{F}$•　如果定义

$$\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}(\tau') = \boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}(1), \qquad \tau' \in [0, 1]\cdot$$

容易证明 $\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{G}}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 的塑性历史•

命题 5.2　对所有 $\boldsymbol{F} \in \mathscr{G}$ 和所有刚性历史 $\boldsymbol{Q}$,

$$\boldsymbol{P}^+_{\mathrm{QF}} = \boldsymbol{P}^+_{\mathrm{F}}\cdot$$

证明 因为 $\mathscr{E}^+(\boldsymbol{QF})=\mathscr{E}^+(\boldsymbol{F})$, $\sigma^*(\cdot;\boldsymbol{QF})=\sigma^*(\cdot;\boldsymbol{F})$, 且命题 4.4 表明 $\sigma_0(\boldsymbol{F})=\sigma_0(\boldsymbol{QF})$, 因此, 假设5 说明 $\boldsymbol{P}^+_{QF}=\boldsymbol{P}^+_F$•

至此, 通过假设 1~5 定义了一类带弹性范围的物质, 此理论推广了 Lucchesi 和 Podio_Guidugli(1988) 的理论•

最后指出, Lee(1969) 提出的变形梯度的乘法分解

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{V}^e\boldsymbol{F}^p,\ (\boldsymbol{V}^e)^T=\boldsymbol{V}^e, \tag{34}$$

可推广至一般情形, 其中 F 为变形梯度, $\boldsymbol{F}^p$ 为塑性变形[1], 对任意 $\tau\in[0,1]$, $\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{F}^p(\tau);\boldsymbol{F}_\tau)=\boldsymbol{0}$• 实际上, 根据假设 5, 对任意 $\boldsymbol{F}\in\mathscr{G}$和 $\tau\in[0,1]$, 存在变形梯度 $\boldsymbol{F}(\tau)$ 的唯一积分解

$$\boldsymbol{F}(\tau)=\boldsymbol{V}^e_F(\tau)\boldsymbol{F}^p_F(\tau), \tag{35}$$

其中 $\boldsymbol{F}(\tau)(\boldsymbol{P}^+_F(\tau))^{-1}=\boldsymbol{V}^e_F(\tau)\boldsymbol{R}^p_F(\tau)$, $\boldsymbol{F}^p_F(\tau)=\boldsymbol{R}^p_F(\tau)\boldsymbol{P}^+_F(\tau)$•

6 背应力的定义

背应力或移动张量的定义是, 应力空间中屈服面的"中心"的应力值作为背应力或移动张量的值• 所选择的应力空间不同, 按此定义的背应力也不同• 两种基本定义是, 背应力作为 Cauchy 应力空间中屈服面的"中心"和作为第二类 Piola_Kirchhoff 应力空间中屈服面的"中心"• 下面讨论前者存在的困难•

对任意 $\boldsymbol{F}\in\mathscr{G}$, 其应力弹性范围为 $\mathscr{C}(\boldsymbol{F})$• 背应力定理第一种定义即背应力记为 α 应为 $\mathscr{C}(\boldsymbol{F})$ 的"几何中心"处的 Cauchy 应力•

1) 注记 1 指出, 标架无关性原理表胆 $\mathscr{S}(\boldsymbol{F})$ 的"中心"的应力为 $p_0\boldsymbol{I}$, 因此, $\alpha=p_0\boldsymbol{I}$ 只有一个标量变量, 不能描述复杂的随动强化现象•

2) 实验获得的本构关系是应力与应变的方程• 如果实验计算得到的应力是真实应力, 它应当是 Lagrange 型应力张量 σ 而不是 Cauchy 应力张量• 因此, 实验得到的弹性本构关系是映射 $\sigma^*(\cdot;\boldsymbol{F})$• 这是 Zheng(1992)[7] 的与客观性原理等价的所谓本构等价性原理的具体要求• 这表明实验得到的屈服面是定义在 Lagrange 型应力 σ 空间上而非 Cauchy 应力空间上• 因此, 应当把 $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$ 的"中心"的 $\sigma_0(\boldsymbol{F})$ 而不是把 $\mathscr{S}(\boldsymbol{F})$ 的"中心"的 Cauchy 应力作为背应力 α, 即

$$\alpha(\boldsymbol{F})=\sigma_0(\boldsymbol{F})• \tag{36}$$

显然, α 是唯一确定的而且是 Lagrange 型变量, 参见注记 1•

因此, 背应力的第一种定义应是(36), 而且背应力应该定义在某不随标架变换的 Lagrange 型应力空间上, 给出的是 Lagrange 型背应力张量, 例如, Casey 和 Naghdi(1992)[3] 提到的 α 的就是定义在第二类 Piola_Kirchhoff 应力空间上的•

3) 如果本构理论中要求使用欧拉型背应力, 此时 $\alpha\in\mathscr{S}_0(\boldsymbol{F})$ 为 Cauchy 应力空间中的值, 它将不唯一• 但存在许多种办法避免这一情形, 这些办法都归结为确定 $\boldsymbol{F}$ 的某种刚性历史 $\boldsymbol{Q}_F$, 于是欧拉型背应力 α_E 可定义为

$$\alpha_E(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{Q}_F\alpha(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}_F^T=\boldsymbol{Q}_F\sigma_0(\boldsymbol{F})\boldsymbol{Q}_F^T=\boldsymbol{T}^*(\boldsymbol{Q}_F\boldsymbol{P}^+_F(1);\boldsymbol{F})• \tag{37}$$

它由 $\sigma_0(\boldsymbol{F})$(即 $\alpha(\boldsymbol{F})$) 与 Cauchy 应力空间中的变换关系确定• 其中 $\boldsymbol{Q}_F$ 可以是利用 Lee 的乘法分解(35) 定义为 $\boldsymbol{Q}_F=\boldsymbol{R}^p_F$; Nemat_Nasser(1983)[5] 则选择 $\boldsymbol{Q}_F=\boldsymbol{R}$, 其中 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{RU}$; 另外, 由物质旋率 $\boldsymbol{w}$ 也可定义 $\boldsymbol{Q}_F$, 其中

$$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{L}^T),\ \boldsymbol{L}(\tau)=\left\{\frac{d}{d\tau}\boldsymbol{F}(\tau)\ (\boldsymbol{F}(\tau))^{-1};\right.$$

文献中的其它办法是引入某种机制定义 $\boldsymbol{Q}_F$, 如[1, 8]• 对于其他 Lagrange 型背应力, 在定义欧拉型背应力 α_E 时也必须根据该 Lagrange 型背应力于 Cauchy 应力空间中的值的变换关系来确定• 例如, 假设 Lagrange 型背应力 $\alpha = \boldsymbol{S}_0(\boldsymbol{F})$ 是第二类 Piola_Kirchhoff 应力空间上的屈服面的"中心", 那么欧拉型背应力必须是

$$\alpha_E(\boldsymbol{F}_\tau) = (\det \boldsymbol{P}_F^+)\boldsymbol{Q}_F(\tau)\boldsymbol{P}_F^+(\tau)\boldsymbol{S}_0(\boldsymbol{F}_\tau)\boldsymbol{P}_F^+(\tau)\boldsymbol{Q}_F(\tau)^T \tag{38}$$

此时 $\alpha_E(\boldsymbol{F}_\tau)$ 是 Cauchy 应力空间上的值•

致谢 作者之一感谢南昌大学工程力学所各位老师的帮助及南昌大学的资助•

参 考 文 献

[1] Agah_Tehrani A, Lee E H, Mallett R L, et al. The theory of elastic_plastic deformation at finite strain with induced anisotropy modeled as combined isotropic_kinematical hardening[J]. J Mech Phys Solids, 1987, **35**(5): 519~ 539.

[2] Casey J, Naghdi P M. On the relationship between the Eulerian and Lagrangian description of finite rigid plasticity[J]. Arch Rational Mech Anal, 1988, **102**(4): 351~ 375.

[3] Casey J, Naghdi P M. A prescription for the identification of finite plastic strain[J]. Int J Engng Sci, 1992, **30**(10), 1257~ 1278.

[4] Lucchesi M. Podio_Guidugli P. Materials with elastic range: a theory with view to applications, Part Ⅰ[J]. Arch Rational Mech Anal, 1988, **102**(1): 23~ 43.

[5] Nemat_Nasser S. On finite plastic flow of crystalline solids and geomaterials[J]. J Appl Mech, 1983, **50**(4): 1114~ 1126.

[6] Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media[J]. Arch Rational Mech Anal, 1958, **2**(3): 197~ 226.

[7] Zheng Q S. On the generalization of constitutive laws from their arotational forms[J]. Acta Mech, 1992, **91**(1_2): 97~ 105.

[8] Dafalias Y F. Issues on the constitutive formulation at large elsatic_plastic deformations, Part Ⅰ: Kinematics[J]. Acta Mech, 1987, **69**(1_4): 119~ 138.

[9] Dafalias Y F. Issues on the constitutive formulation at large elastic_plastic deformations, Part Ⅱ: Kinematics[J]. Acta Mech, 1988, **73**(1_4): 121~ 146.

[10] Naghdi P M. A critical review of the state of the finite plasticity[J]. J Appl Math Phys (ZAMP), 1990, **4**(3): 315~ 394.

A Mathematical Theory of Materials with Elastic Range and the Definition of Back Stress Tensor

Chen Liangsen[1], Zhao Xinghua[2]

([1]Institute of Engineering Mechanics, Nanchang University, Nanchang 330029, P R China;
[2]Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P R China)

Abstract: In this paper, the theory of materials with elastic range by Lucchesi and Podio_Guidugli (1988) has been generalized. It has also shown that there are some difficulties on the definition of back stress as the "center" of the yield surface in the Cauchy space. The back stress tensor is Lagrangian, and must be defined in the Lagrangian stress space.

Key words: theory of materials with elastic range; elastic_plastic constitutive relation; back stress