

文章编号: 1000-0887(1999)05-0491-08

## 轴对称圆环壳的一个新解\*

张若京

(同济大学 工程力学与技术系, 上海 200092)

(吴家龙推荐)

**摘要:** 指出了现有渐近解的不足之处。本文统一用广义 Airy 函数表示齐解和非齐特解的完全渐近展开, 而现有的渐近解是用 Bessel 或 Airy 函数表示齐解, 用 Lommel 函数表示非齐特解的。本文所得到的新解是全域一致有效的, 达到了薄壳的理论精度, 且齐解和特解之间满足变动参数关系。事实上, 本文给出了三个特解, 其中之一正好与 Tumarkin(1959) 和 Clark(1963) 的解相同。

**关键词:** 圆环壳; 转点; 渐近解

**中图分类号:** O356 **文献标识码:** A

## 符 号

$\mu = r_0/R_0$ ,

$\kappa = \sqrt{12(1-\nu^2)} \mu r_0/h$ ,

$\lambda^2 = i\kappa$

$\nu$ : Poisson 比,

$\theta$ : 子午圆(小圆)的极角,

$r_0$ : 子午圆(小圆)的半径,

$h$ : 壳厚, 常数,

$R_0$ : 圆环壳顶端到旋转轴的距离, 即大圆半径,

## 1 问题提出

圆环壳的特点在  $\theta = 0$  和  $\theta = \pi$  处存在转点。在该点, 高斯曲率变号。见图 1。用渐近法求解承受轴对称载荷的圆环壳方程是行之有效的。张维(1944, 1949), R. A. Clark(1950), 诺沃日洛夫(V. V. Novozhilov 1951) 和 C. A. Tumarkin(1959) 作了开创和奠基工作。然而, 他们都只给出了齐解的渐近展开式的首项。为了讨论高阶近似, 我们从 Novozhilov(1951) 导出的圆环壳方程开始:

$$(1 + \mu \sin \theta) \frac{d^2 U}{d\theta^2} - \mu \cos \theta \frac{dU}{d\theta} + i\kappa \sin \theta U = \kappa D \cos \theta \quad (1)$$

其中,  $\kappa$  是实型大参数,  $U$  和  $D$  是复函数。解出  $U$  后, 可用它表示全体壳体内力和变形分量。方程(1)可变换为

$$\frac{d^2 y}{d\theta^2} + [\lambda^2 P_1(\theta) + P_2(\theta)]y = \lambda^2 F(\theta), \quad (2)$$

其中,  $\lambda^2$  是复型大参数。非齐次项  $F(\theta)$  在转点无奇性。这是诺沃日洛夫(Novozhilov) 方程

\* 收稿日期: 1997\_10\_10; 修订日期: 1998\_11\_05

基金项目: 国家自然科学基金资助(18972042) 项目

作者简介: 张若京(1946~), 男, 教授, 博士生导师, 系主任兼所长, 已发表论文五十余篇。

的优点。而

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{U}{\sqrt{1 + \mu \sin \theta}}, & P_1(\theta) &= \frac{\sin \theta}{1 + \mu \sin \theta} \\ P_2(\theta) &= -\frac{\mu[2\mu + 2\sin \theta + \mu \cos^2 \theta]}{4(1 + \mu \sin \theta)^2}, \\ F(\theta) &= \frac{iD \cos \theta}{(1 + \mu \sin \theta)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

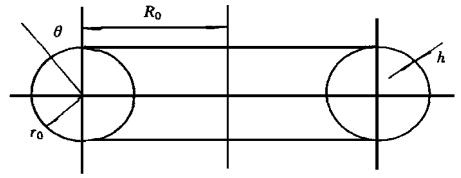


图 1

比(2)的形式更普遍一些的方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\lambda^2 q_1(x) + \lambda q_2(x, \lambda)] y = \lambda^2 G(x, \lambda), \quad (4)$$

曾经吸引了大批数学家的兴趣。Nayfeh(1973)在他的专著中介绍了4种方法,可以确定当 $\lambda^2$ 是实型参数时,方程(4)的齐解的完全渐近展开。它是

$$v = A(z, \lambda) \zeta_i(\xi) + B(z, \lambda) \zeta_i'(\xi), \quad \xi = \lambda^{2/3} z \quad (i = 1, 2) \quad (5)$$

其中, $z$ 是Langer变量, $v$ 是 $y$ 的某种象函数, $\zeta_1$ 和 $\zeta_2$ 分别表示两类Airy函数 $A_i$ 和 $B_i$ 。然而,这个展开式不适合圆环壳方程(2)。因为方程(2)中的参数 $\lambda^2$ 是复型。而如果方程(4)中的参数 $\lambda$ 也改为复型,则其解(5)中含有虚宗量的第二类Airy函数 $B_i$ 。Olver(1974)指出,虚宗量的第二类Airy函数 $B_i$ 不是“数值满意的”,建议不要使用。

至于方程(4)的特解,Tumarkin(1959)曾得到了一个完全渐近展开

$$v = C(z, \lambda) + \lambda^{2/3} A(z, \lambda) T(\xi) + \lambda^{1/3} B(z, \lambda) T'(\xi), \quad \xi = \lambda^{2/3} z, \quad (6)$$

其中, $T(\xi)$ 定义为如下方程的解

$$T'' + \xi T = 1, \quad T = \frac{1}{\xi}, \quad \text{当 } |\xi| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

这样, $T(\xi)$ 可以用Lommel函数表示为

$$T(\xi) = \frac{2}{3} \xi^{1/2} S_{0, 1/3} \left( \frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) = \int_0^\infty \exp \left[ -\xi - \frac{1}{3} t^3 \right] dt. \quad (8)$$

数年以后,解(6)被Clark(1963)验证。请注意,特解中的参数 $\lambda^2$ 是复型。

显然,因为采用了不同的函数去展开齐次解和非齐解,所以对同一方程要采用两种不同的变换。同时,也看不出用Lommel函数表示的非齐特解和用Airy函数表示的齐解之间有丝毫关系(这当然是可以的)。而根据方程理论,应当存在与齐解之间满足变动参数关系的非齐特解。

本文得到了当参数 $\lambda^2$ 是复型时,方程(4)的齐解的完全渐近展开。它是数值满意的。在此基础上,采用变动参数法得到了三种可供选择的非齐特解。可以证明,Tumarkin或Clark用Lommel函数 $T(\xi)$ 表示的特解只是上述三种可能形式中的一种。

值得指出的是,本文所得到的轴对称圆环壳方程的齐解和特解都统一用广义Airy函数展开。广义Airy函数是Drazin和Reid(1981)提出的。从而,轴对称圆环壳方程的全部解有了统一的渐近表达式。

除此之外,作者同样用广义Airy函数,求出了承受非对称载荷的圆环壳的全部解的完全渐近展开(见Zhang1994)。可以说,对于承受任意载荷的圆环壳,我们都有了形式统一的完全渐近解。

## 2 解的展开形式

采用 Langer 变换

$$z = \varphi(x), \quad \varphi = \left[ \frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{p_1(\eta)} d\eta \right]^{2/3}, \quad \phi = \sqrt{\varphi} y, \quad (9)$$

方程(4)变为

$$\frac{d^2 \phi}{dz^2} + [\lambda^2 z + \mathcal{R}(z, \lambda)] \phi = \lambda^2 G(z, \lambda), \quad (10)$$

其中, 假设

$$R(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n R_n(z), \quad G(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n G_n(z), \quad \text{当 } \lambda \rightarrow \infty \quad (11)$$

在圆环壳问题中, 见方程(2), 我们有

$$\left. \begin{aligned} R_1(z) &= \frac{p_2}{\varphi'^2} + \frac{3}{4} \frac{\varphi''^2}{\varphi'^4} - \frac{1}{2} \frac{\varphi'' \varphi'''}{\varphi'^3}, \quad R_n = 0 \quad (n \neq 1), \\ G_0(z) &= (\varphi')^{-3/2} F, \quad G_n = 0 \quad (n \neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

为了推断方程(10)或(4)的解的渐近展开式, 先求仅在转点  $z = 0$  附近有效的“局部解”。因为它一定是全域一致有效解当  $z \rightarrow 0$  时的蜕化情况, 所以, 可由它推论出全域一致有效解的一般形式。

为了求局部解, 引进了新尺度

$$\zeta = -\lambda^{2/3} z \quad (13)$$

且将(10)中的变系数用它们各自在  $z = 0$  处的值代替, 令

$$r = R(0, \lambda), \quad g = G(0, \lambda) \quad (14)$$

它们是常数, 则方程(10)成为仅在转点附近成立的“局部方程”:

$$\phi'' - \zeta \phi + \lambda^{1/3} r \phi = \lambda^{2/3} g, \quad (15)$$

式中, 上标'表示对  $\zeta$  求导。

### 2.1 齐解的渐近展开形式

将渐近级数

$$\phi(\zeta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1/3})^n \phi_n(\zeta) \quad (16)$$

代入(15)的相应齐方程, 令  $\lambda^{-1/3}$  的各级幂次的系数对应相等, 得逐级方程

$$\phi_0'' - \zeta \phi_0 = 0, \quad (17)$$

$$\text{和} \quad \phi_n'' - \zeta \phi_n = -r \phi_{n-1} \quad (n \geq 1). \quad (18)$$

为求(17)的解, 可令(A5)中的  $p = 1$ , 得

$$\phi_0 = A_k(\zeta, 0), \quad (19)$$

其中,  $k = 1, 2, 3$ , 下同。令(18)中的  $n = 1$ , 将(19)代入。再令(A5)中  $p = 0$ , 两结果相比较, 得

$$\phi_1 = -r A_k(\zeta, -1). \quad (20)$$

类似, 令(18)中  $n = 2$ , 将(20)代入。再令(A5)中  $p = -1$ , 两结果相比较, 得

$$\phi_2 = \frac{1}{2} (-r)^2 A_k(\zeta, -2). \quad (21)$$

一般地, 有

$$\phi_n = \frac{1}{n!} (-r)^n A_k(\zeta, -n) \quad (n \geq 0) \quad (22)$$

这样,由(16)式,有

$$\phi(\zeta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1/3})^n \frac{1}{n!} (-r)^n A_k(\zeta, -n) \quad (23)$$

又由递推关系(A7)知,对所有的  $A_k(\zeta, p)$  ( $p \leq 0$ ), 均可用  $A_k(\zeta, 0)$  和  $A_k(\zeta, -1)$  线性表出, 最终有

$$\phi^{(k)}(\zeta, \lambda) = \alpha(0, \lambda) A_k(\zeta, 0) + \lambda^{-1/3} \beta(0, \lambda) A_k(\zeta, -1), \quad (24)$$

式中

$$\alpha(0, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(0) \lambda^{-n}, \quad \beta(0, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(0) \lambda^{-n} \quad (25)$$

都是已知的,由(10)中系数在转点  $z = 0$  处取值而组成. 又,增加  $\phi^{(k)}$  的上标是为了强调,我们得到的是基解. 在三个可能的基解中( $k = 1, 2, 3$ ), 任意两个都是线性无关的, 构成基础解系. 显然,有三种可能去选择基础解系. 以后将证明,选  $\phi^{(2)}$  和  $\phi^{(3)}$  较为适当.

解(24)仅在转点附近有效,但由它可推断,方程(10)的解的全域一致有效展开式具有形式

$$\phi^{(k)}(\zeta, \lambda) = \alpha(z, \lambda) A_k(\zeta, 0) + \lambda^{-1/3} \beta(z, \lambda) A_k(\zeta, -1), \quad (26)$$

式中,系数可写成级数形式

$$\alpha(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(z) \lambda^{-n}, \quad \beta(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(z) \lambda^{-n} \quad (27)$$

展开式(26)与 Olver 的结果完全一致. 可看 Nayfeh (1973), p. 348, 方程(7.3.85).

## 2.2 推断非齐特解的渐近展开式

先求仅在转点  $z = 0$  附近成立的“局部特解”. 变动参数法要求特解具有形式

$$\phi^*(\zeta, \lambda) = c_1(\zeta) \phi^{(k)}(\zeta, \lambda) + c_2(\zeta) \phi^{(k+1)}(\zeta, \lambda), \quad (28)$$

式中,  $\phi^{(k)}$  和  $\phi^{(k+1)}$  ( $k = 1, 2, 3$ ; 逢3取余) 是(15)的基础解. 代入(15), 得

$$\left. \begin{aligned} c_1'(\zeta) &= - \frac{\phi^{(k+1)}}{W(\phi^{(k)}, \phi^{(k+1)})} \lambda^{2/3} g, \\ c_2'(\zeta) &= - \frac{\phi^{(k)}}{W(\phi^{(k)}, \phi^{(k+1)})} \lambda^{2/3} g. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

式中,  $W(\phi^{(k)}, \phi^{(k+1)})$  表示由  $\phi^{(k)}$  和  $\phi^{(k+1)}$  组成的 Wronsky 行列式. 把(24)代入, 利用(A6), (A7), (A13) 和(A11), 得

$$W(\phi^{(k)}, \phi^{(k+1)}) = - \frac{[\alpha(0, \lambda)]^2}{2\pi i} \quad (30)$$

代入(29), 再积分, 得

$$c_1(\zeta) = \frac{2\pi i}{[\alpha(0, \lambda)]^2} \lambda^{2/3} g [\alpha(0, \lambda) A_{k+1}(\zeta, 1) + \lambda^{-1/3} \beta(0, \lambda) A_{k+1}(\zeta, 0)]$$

$$\text{和} \quad c_2(\zeta) = \frac{2\pi i}{[\alpha(0, \lambda)]^2} \lambda^{2/3} g [\alpha(0, \lambda) A_k(\zeta, 1) + \lambda^{-1/3} \beta(0, \lambda) A_k(\zeta, 0)] \quad (31)$$

将(31)代入(28), 并利用(A7), (A6), (A13) 和(A11), 得

$$\phi^*(\zeta, \lambda) = g \left[ \frac{\beta(0, \lambda)}{\alpha(0, \lambda)} \lambda^2 + \lambda^{2/3} g B_{k+2}(\zeta, 0) + \lambda^{1/3} g \frac{\beta(0, \lambda)}{\alpha(0, \lambda)} B_{k+2}(\zeta, -1) \right] \quad (32)$$

它是(15)的特解, 仅在转点附近有效. 表达式(32)令我们推断方程(10)的全域一致有效解具有形式

$$\phi^*(\zeta, \lambda) = c(z, \lambda) + \lambda^{2/3} a(z, \lambda) B_{k+2}(\zeta, 0) + \lambda^{1/3} b(z, \lambda) B_{k+2}(\zeta, -1) \quad (33)$$

式中,  $a(z, \lambda)$  和  $b(z, \lambda)$  是待定参数, 它们有展开式

$$a(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) \lambda^n, \quad b(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z) \lambda^n, \quad c(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z) \lambda^n \quad (34)$$

由(33)可看出,  $k$  分别等于1, 2和3时, 特解有三种可能形式. 它们各自有相应配套的基础解系. 由(A3)和图A1可看出, 在特解的展开函数  $B_1, B_2$  和  $B_3$  中, 只有  $B_1$  是实积分, 较简单. 相应地, 在(33)中应取  $k = 2$ . 由此, 最简单的特解是

$$\phi^*(\zeta, \lambda) = c(z, \lambda) + \lambda^{2/3} a(z, \lambda) B_1(\zeta, 0) + \lambda^{1/3} b(z, \lambda) B_1(\zeta, -1) \quad (35)$$

相应地, 在(28)中令  $k = 2$ , 将给出解  $\phi^{(2)}$  和  $\phi^{(3)}$  的一个线性无关部分组, 它与特解(35)对应. 因此, 方程(10)的两个独立的齐解, 看(26), 应选择为

$$\phi^{(k)}(\zeta, \lambda) = \alpha(z, \lambda) A_k(\zeta, 0) + \lambda^{-1/3} \beta(z, \lambda) A_k(\zeta, -1) \quad (k = 2, 3) \quad (36)$$

值得说明的是, 根据(A3)和(8)有

$$B_1(\zeta, 0) = \int_0^{\zeta} \exp(\zeta - t^3/3) dt = T(-\zeta) \quad (37)$$

$$\text{和} \quad B_1(\zeta, -1) = B_1'(\zeta, 0) = -T'(-\zeta) \quad (38)$$

这说明, Lommel 函数  $T(\zeta)$  就是广义 Airy 函数  $B_1(\zeta, 0)$ . 而特解(35)实际上就是 Tumarkin (1959) 和 Clark (1963) 得到的著名的解.

### 3 最终结果

把(36)和(35)代入方程(4), 令  $A_k(\zeta, 0)$  和  $A_k(\zeta, -1)$  的系数以及  $B_1(\zeta, 0)$  和  $B_1(\zeta, -1)$  的系数等于零, 可得一组关于未知系数  $\alpha(z, \lambda)$ ,  $\beta(z, \lambda)$ ,  $a(z, \lambda)$ ,  $b(z, \lambda)$  和  $c(z, \lambda)$  的常微分方程. 这些未知系数可按(27)和(34)写成渐近级数的形式. 把它们代入上述常微分方程, 令小参数  $\lambda^{-1}$  的各项幂次的系数相等, 可得关于  $\alpha_n, \beta_n, a_n, b_n$  和  $c_n$  的逐级方程. 求解之, 可得方程(4)或(10)的齐解和特解的完全渐近展开.

在圆环壳问题中, 渐近方程只要满足薄壳理论精度就足够了. 所以, (12)式是成立的. 最终得到方程(1)或(4)的两个独立的齐解, 如下

$$\phi^{(k)}(\zeta, \lambda) = \alpha_0 A_k(\zeta, 0) + \lambda^{-4/3} \beta_1(z) A_k(\zeta, -1) \quad (k = 2, 3) \quad (39)$$

其中

$$\alpha_0 = 1, \quad \beta_1 = -\frac{1}{2\sqrt{z}} \int_0^{\zeta} \frac{R_1(\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau \quad (40)$$

方程(1)或(4)的特解的一级近似是

$$\phi_0^*(\zeta, \lambda) = c_0(z) + \lambda^{2/3} a_0 B_1(\zeta, 0) \sim O(\lambda^{-1}) = O(h^{1/2}) \quad (41)$$

其中

$$c_0(z) = \frac{G_0(z) - G_0(0)}{z}, \quad a_0 = G_0(0) \quad (42)$$

表达式(41)与 Holstein (1950), Clark (1958, 1963) 和 Tumarkin (1959) 所得到的结果相同(参看 Nayfeh (1970) pp. 353, 方程(7.3.125)).

方程(1)或(4)的特解的高阶近似是

$$\phi_1^* = \lambda^2 [c_2 + \lambda^{2/3} a_2 B_1(\zeta, 0) + \lambda^{4/3} b_1 B_1(\zeta, -1)] \sim O(\lambda^2) = O(h) \quad (43)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 b_1 &= \frac{G_0(0)}{2\sqrt{z}} \int_0^z \frac{R_1(\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau \\
 a_1 &= -\frac{1}{2}G_0(0)R_1(0) - \frac{1}{3}G_0'(0) - R_1(0)G_0'(0) + \\
 &\quad \frac{G_0(0)R_1(z) - b_1(z)}{4z} - \frac{G_0(0)}{4} \int_0^z \int_0^t \frac{R_1(\tau)R_1(t)}{\sqrt{t}} dt \\
 zc_2 &= -a_2 + \frac{G_0(z)R_1(z) - b_1(z) - G_0''(z)}{z} + \frac{2G_0'(z)}{z^2} - \frac{2G_0(z)}{z^3}
 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

**致谢** 本工作受国家自然科学基金资助。项目名称: 承受任意载荷的薄壁圆环壳的渐近分析, 编号: 18972042。项目负责人是张维教授。特此致谢。

### 附 录

Drazin 和 Reid(1981) 定义了三类广义 Airy 函数

$$A_k(z, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} t^{-p} \exp\left\{zt - \frac{1}{3}t^3\right\} dt, \quad (A1)$$

$$B_0(z, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_0} t^{-p} \exp\left\{zt - \frac{1}{3}t^3\right\} dt, \quad (A2)$$

$$B_k(z, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} t^{-p} \exp\left\{zt - \frac{1}{3}t^3\right\} dt, \quad (A3)$$

其中, 在(A1)和(A2)中  $p = 0, \pm 1, \pm 2$ , 在(A3)中  $p = 0, -1, -2$ ; 路径  $L_k, L_0$  和  $I_k (k = 1, 2, 3)$  如图 A1 所示。

容易看出, 函数  $A_k(z, p), B_0(z, p)$  和  $B_k(z, p)$  是下述微分方程的解

$$(AD + p - 1)u = 0 \quad (A4)$$

其中,  $D = d/dz, A = D^2 - z$ 。

**A1 函数**  $A_k(z, p)$

我们有

$$AA_k(z, p - 1) = -(p - 1)A_k(z, p), \quad (A5)$$

$$D^2 A_k(z, p) = A_k(z, p - n) \quad (A6)$$

和 
$$A_k(z, p - 3) - zA_k(z, p - 1) + (p - 1)A_k(z, p) = 0 \quad (A7)$$

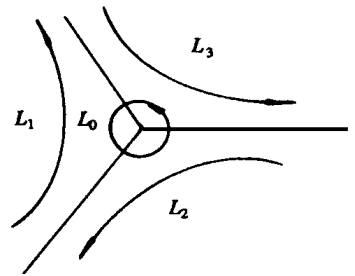


图 A1  $t$  平面上的积分路径

$A_k(z, p)$  在域  $T_k$  中, 见图 A2, 的渐近展开式如下

$$\begin{bmatrix} A_1(z, p) \\ A_2(z, p) \\ A_3(z, p) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -i & -1 & -1 \\ i & -1 & -1 \\ -i & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_+(z, p) \\ B_0(z, p) \\ A_-(z, p) \end{bmatrix} \quad (p \in Z) \quad (A8)$$

其中

$$A_{\pm}(z, p) = \frac{1}{2} \pi^{1/2} (\pm 1)^p z^{-(2p+1)/4} e^{+\zeta} \sum_{s=0}^{\infty} (\pm 1)^s f_s(p) \zeta^{-s}, \quad \zeta = \frac{2}{3} z^{3/2}. \quad (A9)$$

和

$$\begin{aligned}
 f_0(p) &= 1, \\
 f_1(p) &= \frac{1}{2^3 3^2} (12p^2 + 24p + 5),
 \end{aligned}$$

$$f_2(p) = \frac{1}{2^7 3^4} (144^4 + 1344p^3 + 3864p^2 + 3504p + 385) \cdot$$

A2 函数  $B_0(z, p)$

我们有

$$B_0(z, p) \equiv 0 \quad (\text{如 } p \leq 0) \cdot \tag{A10}$$

其余则是  $z$  的  $p - 1$  次多项式。前几个是

$$\left. \begin{aligned} B_0(z, 1) &= 1, & B_0(z, 4) &= \frac{1}{3!}z^3 - \frac{1}{3}, \\ B_0(z, 2) &= z, & B_0(z, 5) &= \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{3}z, \\ B_0(z, 3) &= \frac{1}{2!}z^2, & B_0(z, 6) &= \frac{1}{5!}z^5 - \frac{1}{6}z^2. \end{aligned} \right\} \tag{A11}$$

同样,  $B_0(z, p)$  也满足方程 (A5) ~ (A7)。

A3 函数  $B_k(z, p)$

容易验证,  $B_k(z, p)$  仍满足方程(A5) ~ (A7), 只要把  $A_k(z, p)$  换成  $B_k(z, p)$ 。  $B_k(z, p)$  在  $T_k$  中的渐近展开式是

$$B_k(z, p) \sim (-1)^{1-p} (-p)! z^{p-1} \times \left\{ 1 - \frac{1}{3}(p-1)(p-2)(p-3)z^3 + \dots \right. \quad \left. \right. \tag{A12}$$

最终,  $A_k(z, p)$  的 Wronsky 行列式是

$$W(A_k, A_{k+1})(z, p) = \begin{cases} -(-p)!(-1)^{-p} \frac{1}{2\pi i} B_0(z, 1-p) & (p = 0, -1, -2, \dots), \\ -\frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2\pi i} B_{k+2}(z, 1-p) & (p = 1, 2, 3, \dots) \cdot I \end{cases} \tag{A13}$$

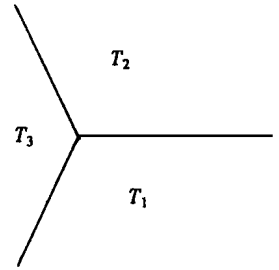


图 A2  $z$  平面上的有效区域

参 考 文 献

- [1] Clark R A. J Math Phys, 1950, **29**: 146~ 178.
- [2] Clark R A. Asymptotic solutions of a non\_homogeneous differential equation with a turning Point[J]. Arch Rational Mech Anal, 1963, **12**: 34~ 51.
- [3] Drazin P D, Reid W H. Hydrodynamic Stability [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- [4] Nayfeh A H. Perturbation Methods [M]. Printed in the Uited States of America: John Wiley and Sons Inc, 1973.
- [5] V. V. 诺沃日洛夫, 薄壳理论[M]. 北京: 科技出版社, 1963.
- [6] Olver F W J. Asymptotic and Special Functions [M]. New York: Academic press, 1974.
- [7] Tumarkin S A. Asymptotic solutions of a linear non\_homogeneous second order differential equation with a transition point and its application to the computation of toroidal shells and propeller blades [J]. J Appl Math Mech, 1959, **23**: 1549~ 1565.
- [8] Zhang W, Dissertation T H. Berlin published partly [J]. Sci Rep Nat Tsinghua Universtiy, Ser, A, 1949, **5**: 289~ 349.
- [9] Zhang Ruojing. Toroidal shells under nonsymmetric loading[J]. Int J Solids Structures, 1994, **31**(19): 2735~ 2750.

# Novel Solutions of Toroidal Shells Under Axisymmetric Loading

Zhang Ruoqing

(Department of Engineering Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, P R China)

**Abstract:** Several improvements are made for existing asymptotic expansions for the axisymmetric toroidal shells. The new expansions are numerically satisfactory and satisfy the accuracy of the theory of thin shells. All of them are expressed in terms of generalized Airy functions, instead of Bessel or Airy function for the homogeneous and Lommel function for the particular solutions, respectively, as in the existing work. In fact, three particular solutions are given in the paper, one of which is just the solution obtained by Tumarkin(1959) and Clark(1963).

**Key words:** toroidal shells; asymptotic; generalized Airy function