应用数学和力学, 第 20 卷 第 5 期(1999 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 05_0545_06

中立型捕食者_被捕食者系统的周期正解*

李永昆

(云南大学 数学系, 昆明 650091)

(刘曾荣推荐)

摘要: 研究了中立型捕食者_被捕食者模型

$$\begin{cases} H'(t) = rH(t)\left[1 - \dfrac{a_1(t)H(t-\tau) + a_2H'(t-\tau)}{K}\right] - \alpha(t)H(t)P(t), \\ P'(t) = -b(t)P(t) + \beta(t)H(t)P(t), \end{cases}$$

的周期正解的存在性, 具有 r, a_2, k, τ 均为正常数, $a_1(t), \alpha(t), b(t), \beta(t)$ 均为 ω 周期连续正函数•

关 键 词: 中立型时滞系统; 捕食者_被捕食者系统; 周期正解; 拓扑度

中图分类号: O175.11; 177.2 文献标识码: A

引 言

目前, 关于中立型种群模型的周期解的整体存在性的结果尚不多见[1~3], 因此, 研究一些较具体的中立型模型的周期解的整体存在性是有趣的[3,4]• 本文的目的是应用重合度论中的 Mawhin 连续性引理[5]讨论如下的中立型捕食者_被捕食者系统

$$\left.\begin{aligned} H'(t) &= rH(t)\left[1 - \frac{a_1(t)H(t-\tau) + a_2H'(t-\tau)}{K}\right] - \alpha(t)H(t)P(t), \\ P'(t) &= -b(t)P(t) + \beta(t)H(t)P(t), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

的周期正解的整体存在性, 其中 r, a_2, k, τ 均为正常数, $a_1(t), \alpha(t), b(t), \beta(t)$ 均为 ω 周期连续正函数, $H(t)$ 是被捕食种群的人口数, $P(t)$ 是捕食种群 $H(t)$ 的捕食者种群人口数, r 称为种群 H 的内蕴增长率, K 解释为关于 H 的环境携带能力, $r\left[1 - \dfrac{a_1(t)H(t-\tau) + a_2H'(t-\tau)}{K}\right]$ 表为是时刻 t 时 H 的按人口平均的增长率, αH 表示捕食种群 P 关于被捕食种群 H 的捕食反应函数• 关于系统(1)进一步的生态意义参见文献[6, 7]及其中所引参考文献•

设 X, Z 是两个 Banach 空间, 考虑算子方程

$$Lx = \lambda Nx \quad (\lambda \in (0, 1)),$$

其中 $L: \mathrm{Don}L \cap X \to Z$ 是一个线性算子, λ 是一个参数, $N: X \to Z$ 是一个非线性算子• 定义两个投影算子分别为 $P: \mathrm{Dom}L \cap X \to X$, $Q: Z \to Z/\mathrm{Im}L$, 使得 $\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L$, $\mathrm{Im}L = \mathrm{Ker}Q$•

后面我们将用 Mawhin 的如下结果(见[5, p40])•

---

* 收稿日期: 1997_02_17.
基金项目: 云南省应用基础研究基金资助项目

Mawhin连续性引理　设 X, Z 为Banach空间 L 是指标为0的Fredholm算子, Ω是X 中的有界开集且N: $\bar{\Omega}\to Z$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是L_紧的, 如果下列条件成立:

a)　$Lx\neq\lambda Nx$, $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Dom}L$, $\lambda\in(0,1)$,

b)　$QNx\neq0$, $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$, 且 $\deg\{QN,\ \Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq0$

那么, $Lx=Nx$ 在 $\bar{\Omega}$ 中至少有一个解.

1　主要结果

为方便起见,我们先引入如下的记号,

$$(u)_M=\max_{t\in[0,\omega]}u(t),\quad \bar{u}=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}u(t)\,\mathrm{d}t,$$

其中 u 为 ω 周期连续函数.

定理 1.1　在系统(1)中,假设 $\frac{ra_2}{K}\mathrm{e}^A<1$, $\frac{(a_1)_M}{K}\mathrm{e}^A<1$ 和$\frac{\bar{a},\bar{b}}{K\bar{\beta}}<r\omega$, 其中 $A=\ln\left(\frac{2b}{\beta}\right)_M+\frac{ra_2}{K}\left(\frac{2b}{\beta}\right)_M+2\omega$, 那么系统(1)存在 ω周期正解.

证明　为证系统(1)存在 ω周期正解,我们先证系统

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=r\left[1-\frac{a_1(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau)}+a_2\dot{x}_1(t-\tau)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau)}}{K}\right]-\alpha(t)\mathrm{e}^{x_2(t)},\\ \dot{x}_2(t)&=-b(t)+\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)},\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

的　环

的 ω周期解的存在性,其中r, K, τ, $a_1(t)$, $\alpha(t)$, $b(t)$, $\beta(t)$ 均与系统(1)的相同. 为此,取$X=\{x(t)=(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}\in C^1(R,R^2)\mid x(t+\omega)=x(t)\}$, $Z=\{z(t)=(z_1(t),z_2(t))^{\mathrm{T}}\in C(R,R^2)\mid z(t+\omega)=z(t)\}$, 记$|x|=|x_1|+|x_2|$, $|x|_\infty=\max_{t\in[0,\omega]}|x|$, $\|x\|=|x|_\infty+|\dot{x}|_\infty$. 则$X$, Z分别在模 $\|\cdot\|$ 和$|\cdot|_\infty$下为Banach空间,令

$$N\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\left[1-\frac{a_1(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau)}+a_2\dot{x}_1(t-\tau)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau)}}{K}\right]-\alpha(t)\mathrm{e}^{x_2(t)}\\-b(t)+\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)}\end{bmatrix},$$

$Lx=\dot{x}$, $Px=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}x(t)\,\mathrm{d}t$, $x\in X$, $Qz=\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}z(t)\,\mathrm{d}t$, $z\in Z$. 有$\mathrm{Ker}L=R^2$ 且$\mathrm{Im}L$ 在Z 中闭,故L 是指标为0的Fredholm算子,进一步有 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是L_紧的[5],这里 Ω是X 中的任一有界开集,对应于算子方程

$$Lx=\lambda Nx\quad(\lambda\in(0,1)),$$

我们有

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1(t)&=\lambda\left\{r\left[1-\frac{a_1(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau)}+a_2\dot{x}_1(t-\tau)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau)}}{K}\right]-\alpha(t)\mathrm{e}^{x_2(t)}\right\},\\ \dot{x}_2(t)&=\lambda[-b(t)+\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)}].\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

设$(x_1(t),x_2(t))^{\mathrm{T}}\in X$ 是(3)的任一解,积分(3)式得

$$\frac{r}{K}\int_0^{\omega}a_1(t)\mathrm{e}^{x_1(t-\tau)}\mathrm{d}t+\int_0^{w}\alpha(t)\mathrm{e}^{x_2(t)}\mathrm{d}t=r\omega\tag{4}$$

和

$$\int_0^{\omega}\beta(t)\mathrm{e}^{x_1(t)}\mathrm{d}t=\int_0^{\omega}b(t)\mathrm{d}t.\tag{5}$$

由(3)式和(4)式可得

$$\int_0^\omega \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[x_1(t) + \frac{\lambda r a_2}{K} e^{x_1(t-\tau)} \right] \right| \mathrm{d}t = \lambda \int_0^\omega \left| r - \frac{r a_1(t)}{K} e^{x_1(t-\tau)} - \alpha(t) e^{x_2(t)} \right| \mathrm{d}t \leqslant$$

$$r\omega + \frac{r}{K}\int_0^\omega a_1(t) e^{x_1(t-\tau)} \mathrm{d}t + \int_0^\omega \alpha(t) e^{x_2(t)} \mathrm{d}t = 2r\omega,$$

即

$$\int_0^\omega \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x_1(t) + \frac{\lambda r a_2}{K} e^{x_1(t-\tau)} \right] \right| \mathrm{d}t < 2r\omega. \tag{6}$$

因为

$$\int_0^\omega \beta(t) e^{x_1(t)} \mathrm{d}t = \int_\tau^{\omega+\tau} \beta(t-\tau) e^{x_1(t-\tau)} \mathrm{d}t = \int_0^\omega \beta(t-\tau) e^{x_1(t-\tau)} \mathrm{d}t.$$

故由(5)式可得

$$\int_0^\omega \beta(t) e^{x_1(t)} \mathrm{d}t + \int_0^\omega \beta(t-\tau) e^{x_1(t-\tau)} \mathrm{d}t = 2\int_0^\omega b(t) \mathrm{d}t.$$

于是, 由积分中值定理可知存在 $\xi \in [0, \omega]$ 使得

$$\beta(\xi) e^{x_1(\xi)} + \beta(\xi-\tau) e^{x_1(\xi-\tau)} = 2b(\xi).$$

所以

$$x_1(\xi) < \ln \frac{2b(\xi)}{\beta(\xi)} \leqslant \ln \left(\frac{2b}{\beta} \right)_M, \quad e^{x_1(\xi-\tau)} < \frac{2b(\xi)}{\beta(\xi-\tau)} \leqslant \left(\frac{2b}{\beta} \right)_M.$$

由上式和(6)式可得

$$x_1(t) + \frac{\lambda r a_2}{K} e^{x_1(t-\tau)} \leqslant x_1(\xi) + \frac{r a_2}{K} e^{x_2(\xi-\tau)} + \int_0^\omega \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x_1(t) + \frac{\lambda r a_2}{K} e^{x_1(t-\tau)} \right] \right| \mathrm{d}t <$$

上 $\ln \left(\frac{2b}{\beta} \right)_M + \frac{r a_2}{K} \left(\frac{2b}{\beta} \right)_M + 2r\omega = A.$ 将

因此

$$x_1(t) < A. \tag{7}$$

由(3)式和(5)式可得

$$\int_0^\omega | x_2'(t) | \mathrm{d}t = \lambda \int_0^\omega | - b(t) + \beta(t) e^{x_1(t)} | \mathrm{d}t <$$

$$\int_0^\omega b(t) \mathrm{d}t + \int_0^\omega \beta(t) e^{x_1(t)} \mathrm{d}t =$$

$$2\int_0^\omega b(t) \mathrm{d}t,$$

即

$$\int_0^\omega | x_2'(t) | \mathrm{d}t < 2\int_0^\omega b(t) \mathrm{d}t \tag{8}$$

由(4)式及积分中值定理可知存在 $\eta \in [0, \omega]$ 及常数 B_1 使得

$$x_2(\eta) < B_1. \tag{9}$$

于是, 由(8)和(9)两式可得

$$x_2(t) = x_2(\eta) + \int_\eta^t x_2'(t) \mathrm{d}t <$$

$$B_1 + \int_0^\omega | x_2'(t) | \mathrm{d}t <$$

$$B_1 + 2\int_0^\omega b(t) \mathrm{d}t \stackrel{\mathrm{def}}{=} B_2,$$

即

$$x_2(t) < B_2. \tag{10}$$

由(3)式,(7)式和(10)式可知

$$\begin{aligned} |\dot{x}_1(t)| &< r + \frac{ra_1(t)}{K}e^A + \frac{ra_2}{K}|\dot{x}_1(t-\tau)|e^A + \alpha(t)e^{B_2} \leqslant \\ &r + \frac{r(a_1)_M}{K}e^A + \frac{ra_2}{K}(|\dot{x}_1|)_M e^A + (\alpha)_M e^{B_2}, \end{aligned}$$

从而

$$(|\dot{x}_1|)_M < r + \frac{r(a_1)_M}{K}e^A + \frac{ra_2}{K}(|\dot{x}_1|)_M e^A + (\alpha)_M e^{B_2}.$$

所以,

$$(|\dot{x}_1|)_M < \frac{r + \frac{r(a_1)_M}{K}e^A + (\alpha)_M e^{B_2}}{1 - \frac{ra_2}{K}e^A} \overset{\text{def}}{=} B_3. \tag{11}$$

由(3)式和(7)式可得

$$\begin{aligned} |\dot{x}_2(t)| &< b(t) + \beta(t)e^A \leqslant \\ &(b)_M + (\beta)_M e^A. \end{aligned}$$

所以

$$(|\dot{x}_2|)_M < (b)_M + (\beta)_M e^A \overset{\text{def}}{=} B_4. \tag{12}$$

由(5)式及积分中值定理知存在 $\theta \in [0, \omega]$ 使得

$$|x_1(\theta)| = \left|\ln\frac{b(\theta)}{\beta(\theta)}\right| < \left(\left|\ln\frac{b}{\beta}\right|\right)_M.$$

从而由上式及(11)式可知

$$\begin{aligned} |x_1(t)| &\leqslant |x_1(\theta)| + \int_0^\omega |\dot{x}_1(t)|\,dt < \\ &\left(\left|\ln\frac{b}{\beta}\right|\right)_M + B_3 \overset{\text{def}}{=} B_5. \end{aligned}$$

所以

$$(|x_1|)_M < B_5.$$

从(4)式及积分中值定理可知存在 $\zeta \in [0, \omega]$ 使得

$$\begin{aligned} \alpha(\zeta)e^{x_2(\zeta)} &= r - \frac{r}{K}a_1(\zeta)e^{x_1(\zeta-\tau)} > \\ &r\left(1 - \frac{(a_1)_M}{K}e^A\right), \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} x_2(\zeta) &> \ln\frac{r\left(1 - \frac{(a_1)_M}{K}e^A\right)}{\alpha(\zeta)} > \\ &\ln\frac{r\left(1 - \frac{(a_1)_M}{K}e^A\right)}{(\alpha)_M} \overset{\text{def}}{=} Q. \end{aligned}$$

由上式及(12)式可知

$$x_2(t) \geqslant x_2(\zeta) - \int_0^\omega |\dot{x}_2|\,dt > Q - B_4\omega,$$

再注意到(10)式可知•

$$(|x_2|)_M < \max\left\{|Q - B_4\omega|, B_2\right\} \stackrel{\text{def}}{=} B_6 •)$$

现在,记 $B = B_3 + B_4 + B_5 + B_6 + G$,

其中 $G > 0$,取得充分大,使得代数方程组

$$\begin{cases} r\omega - \dfrac{a_1}{K}e^{u_1} - \alpha e^{u_2} = 0, \\ -b + \beta e^{u_1} = 0, \end{cases})$$

的唯一解$((u_1^*, u_2^*) = \left(\ln\dfrac{b}{\beta}, \ln\left[\dfrac{r\omega - (a_1 b/K\beta)}{\alpha}\right]\right)$ 满足 $\|(u_1^*, u_2^*)\| < B$• 取 $\Omega = \left\{x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in X \,\|x\| < B\right\}$,那么易知Mawhin连续性引理的条件(a)成立,当 $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L = \partial\Omega \cap R^2$ 时,x 是R^2 中的常向量且 $|x| = B$• 因此

$$QN\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\omega - \dfrac{a_1}{K}e^{x_1} - \alpha e^{x_2} \\ -b + \beta e^{x_1} \end{bmatrix} \neq 0 •$$

直接计算易知•

$$\deg\left\{QN(x_1, x_2)^{\mathrm{T}}, \Omega, (0, 0)^{\mathrm{T}}\right\} \neq 0 •$$

至此,我们已证得 Ω满足Mawhin连续性引理的所有条件,故系统(2)有 ω周期解$(x_1^*(t), x_2^*(t))$ 于是系统(1)有 ω 周期正解$(e^{x_1^*(t)}, e^{x_2^*(t)})$• 定理1证毕•

注 系统(1)的 ω 周期正解与种群H 和P 的人口数的周期性振动相对应•

例 系统

$$\begin{cases} \dot{H}(t) = H(t)\left[1 - \dfrac{\left(1 - \dfrac{1}{2}\sin t\right)H(t-\tau) + \dot{H}(t-\tau)}{2}\right] - \alpha(t)H(t)P(t), \\ \dot{P}(t) = -(2 + \cos t)P(t) + (e^{16} + 1 - \sin t)H(t)P(t), \end{cases}$$

其中 $\tau > 0$为常数,$\alpha(t) > 0$为连续的2π周期函数,满足本文定理的所有条件,故知它有2π周期正解•

参 考 文 献

[1] Gopalsamy K, He X, Wen L. On a periodic neutral logistic equation[J]. Glasgow Math J, 1991, **33**: 281~ 286.

[2] 李永昆. 中立时滞型种群模型的周期正解[J]. 数学学报, 1996, **39**(6): 789~ 795.

[3] Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics[M]. Boston: Academic Press, 1993.

[4] Kuang Y, Feldstein A. Boundedness of solutions of nonlinear nonautonomous neutral delay equations [J]. J Math Anal Appl, 1991, **156**: 193~ 204.

[5] Gaines R E, Mawhin J L. Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations Lecture Notes

in Mathamatics [M]. Vol 568, New York: Springer_Verlag, 1977.
[6] May R M. Stability and Complexity in Model Ecosystems [M]. Princeton: Princeton U Press, 1974.
[7] Gopalsamy K. Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics [M]. Boston: Kluwer Academic Publisher, 1992.

Positive Periodic Solution of a Neutral Predator_Prey System

Li YongKun
(Department of Mathematics, Yunnan University, Kunming 650091, P R China)

Abstract: In this paper, the existence of a positive periodic solution to the following neutral predator_prey system

$$\begin{cases} \dot{H}(t) = rH(t)\left[1 - \dfrac{a_1(t)H(t-\tau) + a_2\dot{H}(t-\tau)}{K}\right] - \alpha(t)H(t)P(t), \\ \dot{P}(t) = -b(t)P(t) + \beta(t)H(t)P(t) \end{cases}$$

is studied, in which r, a_2, K and τ are positive constants, and $a_1(t)$, $\alpha(t)$, $b(t)$ and $\beta(t)$ are positive continuous functions of period ω.

Key words: neutral delay system; predator_prey system; positive periodic solution; topological degree