应用数学和力学,第 20 卷 第 4 期(1999 年 4 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 04_0411_07

一种对称非奇异核边界元法

姚 志 远

(华东船舶工业学院 基础学科系,江苏 镇江 212003)

(唐立民推荐)

摘要: 本文依据泛函分析的基本理论, 提出利用完备直交的本征函数系构造对称非奇异的基本解,给出了又一种非奇异边界元法

关 键 词: 本征函数; 基本解; 边界元法/ 非奇异边界元法
中图分类号: O231 83 文献标识码: A

引 言

虽然奇异边界元法被认为是一种加权残数法, 但是, 奇异边界元法具有一个独特的特性, 这就是以控制方程在无穷区域 * 上的基本解作为权函数 它的这一重要特性决定了它具有两个基本的优点, 第一点是权函数的选择归一化, 第二点是导出的积分方程简捷 但是, 由于它无穷区域上的基本解具有奇异性, 近来人们开始关注非奇异核积分方程的研究

文[1] 于 1986 年首先明确提出了利用解的完备系作权函数建立积分方程的方法 文[2] 从控制方程的解与加权残数的解应有等价性的观点出发, 讨论了边界积分方程的充要性 本文从完备正交的本征函数系出发, 得到控制方程在有限区域 * 上的一种对称非奇异的基本解, 用它作为积分方程的核函数, 给出了一种与奇异边界元法基本一致的非奇异边界元法

奇异边界元法是以无穷区域 * 上的基本解作为权函数, 求得基本解的主要方法有点源法, Fourier 变换法, 广义函数法等

由方程 $H^{*} w =$ (H 是线性微分算子, H^{*} 是 H 的共轭算子) 经过 Fourier 变换求得基本解的实质是利用三角函数系表示基本解 而作为控制方程的本征函数系, 由于它来源于控制方程, 相对于三角函数系而论更加接近控制方程, 利用它表示基本解比利用三角函数来表示基本解更合理 事实上, 有许多力学问题(Strum_Liourille 本征问题) 是能够通过分离变量法找到完备直交的本征函数系的 而利用完备的本征函数系在有限区域上得到的基本解是一个函数项级数, 它具有对称性、非奇异性以及一致收敛性 用这个方法得到的积分方程不仅具有奇异积分方程的优点, 而且计算更加简单方便

1 本征函数系和基本解

设 $(X, B, \ )$ 是一个测度空间, $E \quad B$, f 是 E 上的实值函数 设 f 是 E 上的可测函数, 而

收稿日期: 1996_08_13; 修订日期: 1998_11_11
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(59775022)
作者简介: 姚志远(1961~) , 男, 硕士, 讲师.

且f 在E 上是可积的, 这种函数f 的全体记做$L^2(E, \ )$[3]

规定内积:

$$(f, g) = \int_E fg\,\mathrm{d} \quad f, g \ : L^2(E, \ ), \tag{1}$$

则 $L^2(E, \ )$ 是一个 Hilbert 空间

设 F 是$L^2(E, \ )$ 内的一个线性子空间, H 是 F 到$L^2(E, \ )$ 内的共轭线性算子 若存在非零函数 , 非零实数 使得

$$\mathrm{H} \ = \ , \tag{2}$$

则称函数 为算子H 的本征函数, 为相应的本征值 所有本征函数的全体组成一个本征函数系, 记为$\{ \ \}$, 相应的本征值的全体记为$\{ \ \}$, 为下标

假设本征函数系满足以下三个条件

1) , $\{ \ \}$ 且 , 有$(\ , \ ) = 0$ $(1, \ ) = 0$; 的 充

2) $\{ \ \}$, 有$(\ , \ ) = 1$; 与 奇 (3)

3) 1, 的扩充子空间为$L^2(E, \ )$

规定函数:

$$G(p, q) = \frac{(p) \quad (q)}{} \quad p, q \quad E \tag{4}$$

称为 G_函数

设f $L^2(E, \ )$, 则存在实数A_0, A , 使得$f(p) = A_0 + \quad A \quad (p)$,

式中 $A_0 = \dfrac{1}{s}\int_E f\,\mathrm{d}$, s 为区域E 的面积$\left(s = \int_E \mathrm{d}\right)$

因为

$$(\mathrm{H}G(p, q), f(q)) = \left(\quad (p) \quad (q), A_0 + \quad A \quad (q) \right) =$$

$$A_0 \quad (p)(\quad (q), 1) + \quad A \quad (p) \quad (\quad (q), \quad (q)) =$$

$$A \quad (p),$$

所以有

定理 1 设f $L^2(E, \ )$, 成立

$$\int_E \mathrm{H}G(p, q)f(q)\,\mathrm{d} = f(p) - \frac{1}{s}\int_E f\,\mathrm{d} \tag{5}$$

设 E, 对于任意f $L^2(\ , \ )$, 规定

$$f^* = \begin{cases} f(p), & p \quad , \\ 0, & p \quad E - \end{cases} \tag{6}$$

称函数f^* 是函数f 在E 上的延拓

将函数f^* 代入(5) 式得

定理 2 设f $L^2(\ , \ )$, 则有

$$\int \mathrm{H}G(p, q)f(q)\,\mathrm{d} = f(p) - \frac{1}{s}\int f\,\mathrm{d} \tag{7}$$

讨论微分方程

$$\mathrm{H}u = f, \quad u, f \quad L^2(\ , \ ) \tag{8}$$

(8) 式的加权残数值弱形式表示为

$$(\mathrm{H}u - f)W\mathrm{d} = 0, \tag{9}$$

式中, W 是权函数

虽然方程(8) 式的解是方程(9) 式的解, 而方程(9) 式的解不一定是方程(8) 式的解 在什么条件下方程(9) 式是方程(8) 式的解呢?

若 u F, 且满足

$$(\mathrm{H}u(q) - f(q))G(p, q)\mathrm{d} = 0, \tag{10}$$

$$(\mathrm{H}u(q) - f(q))\mathrm{d} = 0 \tag{11}$$

令 $\mathrm{H}u - f = g$, g^* 是 g 在 E 上的延拓 由条件(3) 存在实数 A_0, A , 使得

$$g^* = A_0 + A (q)$$

将函数 g^* 与 G 关于变量 q 作内积有:

定函 $(g^*(q), G(p, q)) = \left(A_0 + A (q), \frac{1}{} (p) (q)\right) =$

$$\frac{A}{} (p) \tag{12}$$

由(10) 可得

$$\frac{A}{} (p) = 0, \tag{13}$$

又 $$\left(\frac{A}{s} (p), (p)\right) = \frac{A}{} \tag{14}$$

由(14) 式和(13) 式可得对于任意下标 有

$$A = 0$$

又由(11) 可得

$$A_0 = 0,$$

所以有 $g = 0$, u 是方程(8) 的解

定理 3 函数 u $L^2(E,)$ 满足方程(8) 式的充分必要条件是满足方程(10) 和(11) 式

由定理 2 知道, $G\_$ 函数不是基本解 事实上, 如果将 $G\_$ 函数换成无穷区域上的基本解代入(7) 式时, 没有 $f\mathrm{d}$ 项 利用 $G\_$ 函数导出的积分方程同利用基本解导出的积分方程相比将多出一个待定量 $c(f\mathrm{d})$ 但是, 由于所求解 u 受(11) 式制约, 客观上又少了一个自由度, 抵消了待定量 c 的影响

尽管 $G\_$ 函数与基本解有点不一样, 但是, 它的作用与基本解是一样 因此, 本文仍然称 $G\_$ 函数为基本解

2 简单梁的边界元法

本文的基本思想是利用完备的本征函数系去表示所求的解 在一元函数的情况下, 简单梁的本征函数系为完备的三角函数系 为了对上文所得到的结论有一个更加直观的认识, 本文以付立叶级数为工具, 以简单梁为例子, 进一步说明本文提出的非奇异边界元法的思想方

法

2 1 基本解和解的等价性

梁的控制方程设为:

$$d^4u/dx^4 = T(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{15}$$

式中 u 为位移, $T(x)$ 表示载荷 边界情况一共有8个, u 在两端的值和它的各阶导数为u_j, u_j, u_j, u_j $(j = 0, 1)$, 其中有 4 个总是可以事先知道的, 另外 4 个由边界条件决定

给一个定数 $l > 0$, 使$[0, 1]$ $[- l, l]$, 设f 是$[- l, l]$ 上的分段连续函数 将函数f 在区间$[- l, l]$ 上展开付立叶级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1} a_i \cos\frac{i x}{l} b_i \sin\frac{i x}{l}, \tag{16}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} a_i &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{i x}{l} f(x) dx, \qquad\qquad \right), \\ b_i &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{i x}{l} f(x) dx, \right. \end{aligned}\right\} (i = 0, 1, 2, \quad) \tag{17}$$

当 x 是$f(x)$ 的连续点时, (16) 式取等号, 当 x 是第一类间断点时, (16) 式收敛于$(f(x - 0) + f(x + 0))/2$

设f 是$[0, 1]$ 上任一分段连续函数, f^* 为f 在$[- l, l]$ 上的延拓函数, 规定

$$f^* = \begin{cases} f(x), & x \quad [0, 1], \\ 0, & x \,/\, [0, 1] \end{cases} \tag{18}$$

下文仍以f 表示f^*

有了延拓的概念, 将所讨论的函数的定义域限制在区间 $[- l, l]$ 上, 梁方程(15) 式所对应的本征函数系为 :

$$\left\{ \quad _i \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{l}} \cos\frac{i x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin\frac{i x}{l} \right\}_{i=1}^{+} \tag{19}$$

换成

本征值系为:

$$\left\{ \quad _i \right\} \overset{量}{=} \left\{ \left(\left(\frac{i}{l}\right)^4, d\left(\frac{i}{l}\right)^4 \right) \right\}_{i=1}^{+} \tag{20}$$

解观上

由(4) 式得基本解为:

$$G(x, x_0) = \sum_{i=1}^{+} \frac{1}{_i} \frac{1}{l} \cos\frac{i (x - x_0)}{l}, \tag{21}$$

式中 $_i = (i / l)^4$

利用(21) 、(16) 式可得:

$$\int_{-l}^{l} \frac{d^4}{dx^4} G(x, x_0) f(x_0) dx_0 = f(x) - \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x_0) dx_0 \tag{22}$$

当函数$f(x)$ 是由(18) 式延拓后的函数时, 由(22) 式可得:

$$\int_{0}^{1} \frac{d^4}{dx^4} G(x, x_0) f(x_0) dx_0 = f(x) - \frac{1}{2l}\int_{0}^{1} f(x_0) dx_0 \tag{23}$$

上文利用付立叶级数法得到了与定理2 相同的结论 本文将进一步以简单梁为例, 说明在一元函数的情况下, 控制方程和加权残数值弱形式的等价关系

定理4 设函数 u 具有4 阶导数, u 是方程(15) 式的解的充分必要条件是对一切 x $[0,$

1] 成立:

$$\int_0^1\left\{\frac{d^4u(x_0)}{dx^4}-T(x_0)\right\}G(x,x_0)dx_0=0 \tag{24}$$

和
$$\int_0^1\left\{\frac{d^4u(x_0)}{dx^4}-T(x_0)\right\}dx_0=0 \tag{25}$$
先知必要性显然成立

下面将证明充分性, 设 u 具有4阶导数, 并满足(24) 和(25) 式 记 $f(x)=d^4u(x)/dx^4-T(x)$, 将 $f(x)$ 在区间[$-l$, l] 延拓, 并代入(24) 和(25) 式可得:

$$\int_{-l}^{l}G(x,x_0)f(x_0)dx_0=0 \tag{26}$$

和
$$\int_{-l}^{l}f(x_0)dx_0=0 \tag{27}$$

将(26) 式两边同乘 $\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{i\ x}{l}$ 或 $\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{i\ x}{l}$ 再关于 x 在[$-l$, l] 上积分可得:

$$\int_{-l}^{l}f(x_0)\cos\frac{i\ x_0}{l}dx_0=0,\quad \int_{-l}^{l}f(x_0)\sin\frac{i\ x_0}{l}dx_0=0 \tag{28}$$

比较(27)、(28) 和(16)、(17) 式, 可得

$$f(x)=0,$$

所以充分性成立

2 2 简单梁的边界元法

从控制方程(15) 式的弱形式(24) 式和(25) 式经过分部积分导出边界积分方程是方法之一 但是, 由于基本解的高阶导数收敛性差, 本文利用间接方法导出边界积分方程 又为了提高精度, 本文利用了两个已知的解析函数 u_1, T_1

假设函数 u_1 在区间[0, 1] 上有连续的4 阶导数, T_1 在区间[0, 1] 上连续 且满足:

$$\frac{d^4u_1}{dx^4}=T_1,\quad \int_0^1 T_1dx\quad 0, \tag{29}$$

称 u_1, T_1 为方程的一次解

作函数 u :

$$\begin{aligned}u=\ &\frac{s}{s_1}u_1+\int_0^1G(x,x_0)\left\{T(x_0)-\frac{s}{s_1}T_1(x_0)\right\}dx_0+\\&c_1+(G(x,l)-G(x,-l))c_2+\\&G(x,l)c_3+G(x,-l)c_4,\end{aligned} \tag{30}$$

式中 $s=\frac{1}{2l}\int_0^1T(x)dx,\quad s_1=\frac{1}{2l}\int_0^1T(x)dx,$

c_1, c_2, c_3, c_4 是待定常数

可以验证(30) 式满足方程(15) 式, 是方程(15) 式的解, 式中含有4 个待定常数可以由边界条件唯一确定

2 3 例题1

设梁的控制方程为:

$$d^4u/dx^4=\sin x,\qquad 0\quad x\quad 1, \tag{31}$$

边界条件为:

$$u_0=u_0=u_0=0,\qquad u_1=\quad , \tag{32}$$

见图 1

取一次解

$$u = \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{8} + 3\ {}_1\ x^2 - {}_{x\,0}\right)\frac{1}{3!}\left(\frac{5}{8} + 3\ {}_1\ x^3 + \frac{1}{4!}x^4,\right. \qquad (33)$$

和

$$T_1 = 1, \qquad T$$

式中 $\quad {}_1 = \frac{}{s}, \quad s = \frac{1}{2l}\int_0^1 \sin x\,dx, \quad l = 1$

当 $\ = 0\ 229\ 8 \quad 10^{-2}$ 时, 计算结果如表 1

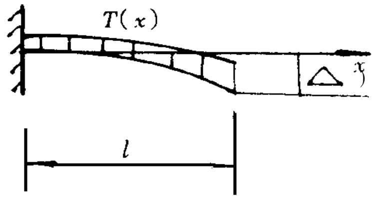

图 1

表 1

坐　标	0 2	0 4	0 6	0 8	1 0
边界元解 u	$0\ 964\ 2 \quad 10^{-3}$	$0\ 273\ 0 \quad 10^{-2}$	$0\ 389\ 5 \quad 10^{-2}$	$0\ 369\ 9 \quad 10^{-2}$	$0\ 229\ 8 \quad 10^{-2}$
理论解 u^*	$0\ 963\ 9 \quad 10^{-3}$	$0\ 267\ 5 \quad 10^{-2}$	$0\ 382\ 7 \quad 10^{-2}$	$0\ 365\ 2 \quad 10^{-2}$	$0\ 229\ 8 \quad 10^{-2}$

3 二维 Poisson 方程和 Laplace 方程的边界元法

3 1 Poisson 方程的基本解和边界元法

二维 Poisson 方程为:

$$ {}^2 u = \frac{{}^2 u}{x^2} + \frac{{}^2 u}{y^2} = T(x, y) \qquad (x, y) \qquad , \qquad (34)$$

式中, 为有限区域

边界条件为:

$$u\,|_L = u \qquad (35)$$

或 $\qquad u/\ n\,|_L = u, \qquad (36)$

式中, L 为区域 的边界, $u/5n$ 为L 的外法向导数#

设 $E = [-\ a, a] @[-\ b, b], a, b > 0$, 且满足条件 $8 < E$#

由(4) 式可得基本解:

$$G(p, q) = \mathop{E}_{i=0}^{+]}\mathop{E}_{j=0}^{+]} \frac{1}{K_{ij}} L_{ij}\cos\frac{iP(x - x_0)}{a}\cos\frac{iP(y - y_0)}{b}, \qquad (37)$$

式中

$$K_{ij} = \left(\frac{iP}{a}\right)^2 + 1\left(\frac{iP}{b}\right)^2, \quad L_{ij} = \begin{cases} 0, & i = 0, j = 0, \\ 1/ab, & i\ X\ 0, j\ X\ 0, \\ 1/2ab, & 其它, \end{cases} \quad p = (x, y), q(x_0, y_0)\#$$

取一次解为 $u_1, T_1\left\{ {}^2u_1 = T_1, \ QQ\,8\ T_1 dL\ X\ 0\right.$,

作函数

$$u = \frac{s}{s_1}u_1 + QQ\,8\ G(p, q)\left(T(q) - \frac{s}{s_1}T_1(q)\right) dL(q) + \qquad 4\ 个$$

$$c_1 + Q_L G(p, q_s)\,c(q_s)\,dL(q_s), \qquad (38)$$

式中, $p(x, y), q = (x_0, y_0)$, c 是待定常数, $c(q_s)$ 为边界 L 上的待定函数, q_s 为边界L 上的点#

当(38) 式满足边界条件(35) 式或(36) 式, 和

$$Q_L c(q_s)\,dL(q_s) = 0 \qquad (39)$$

时, u 是方程(34) 式的解#

虽然在(38) 式中多了一个未知常数 c_1, 边界条件(35) 或(36) 式不能唯一确定常数 c_1 和边界函数 $c(q_s)$# 但是, 由于受(39) 式制约, 常数 c_1 的影响恰好被抵消#

312 例题 2

设 Poisson 方程为:

$$^2u = -, 2\left(\frac{P}{0122}\right)^2 \sin\left(\frac{Px}{0122}\right)\sin\left(\frac{Py}{0122}\right), \qquad (40)$$

边界条件

$$u\,|_L = 0, \qquad (41)$$

式中, L 为区域[0, 0122] @[0, 0122] 的边界#

取一次解为:

$$u_1 = x(x - 0122)y(y - 0122), \quad T_1 = 2x(x - 0122) + 2y(y - 0122)\#$$

计算结果见表 2#

表 2

坐标 (x, y)	(01 01, 01 01)	(01 05, 01 11)	(01 09, 0109)	(01 05, 0105)	(01 03, 0103)
边界元解 u	01 150 69	01839 47	01811 71	01428 46	01192 68
理论解 u^*	01 142 31	01959 49	01920 63	01428 84	01172 04

4 结 束 语

本文给出了又一种非奇异边界元法# 利用这个方法求解梁方程和二维 Poisson 方程, 计算结果同理论解相比基本吻合# 本文提出的方法适用于求解 Strum_Liourille 型一类方程, 在工程中有着广泛的应用领域, 具有较强的实用性#

参 考 文 献

[1] 唐立民. 边界元的基本问题和一个新途径[J]. 计算结构力学及其应用, 1986, 3(3): 7~ 12.

[2] 赵成刚. 关于残值法的充要性问题及其权函数的选择[J]. 力学学报, 1991, 23(3): 332~ 338.

[3] 夏道行, 吴卓人, 严绍宗, 等. 实变函数论与泛函分析[M]. 北京: 人民教育出版社, 1979.

[4] Brebbia C A. Topics in Boundary Element Research[M]. Berlin Heidelberg: Springer_Verlag, 1984.

[5] 王左辉. 薄板弯曲问题的非奇异核边界元法[J]. 应用数学和力学, 1993, 14(8): 729~ 737.

A Symmetrical Nonsingular Boundary Element Method

Yao Zhiyuan

(East China Ship_Building Institute, Zhenjiang, Jiangsu 212003, P R China)

Abstract: In this paper, on the basis of the theory of functional analysis, by the use of the complete orthogonal eigenfunction system, a fundamental solution of the control equation is constructed. By this method, a symmetrical nonsingular boundary element method is derived.

Key words: eigenfunction; fundamental solution; boundary element/ nonsingular boundary element