应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(1999) 04_0427_05

确定平板层流边界层速度分布的一种方法*

袁镒吾[1], 刘又文[2]

([1] 中南工业大学 建工系, 长沙 410083; [2] 湖南大学, 长沙 410082)

(钱伟长推荐)

摘要: 用积分关系式方法求解平板层流边界层问题• 首先, 设定速度分布试函数, 使之满足最基本的边界条件• 试函数中的待定系数则利用已有的数值解的一些结果予以确定• 它类似于彭一川(1992) 提出的的方法, 但比后者简便得多• 按照彭一川的方法, 决定试函数中的待定参数时, 需求解一个三次代数方程, 而本文方法则只需求解线性代数方程, 精度也比彭一川的方法略高•

关 键 词: 平板; 层流; 边界层; 速度分布; 权残法
中图分类号: TB126 文献标识码: A

1 引言及速度试函数之选取

平板层流边界层的积分关系式解法, 关键在于选定速度分布函数• 经典的方法是选择一个最佳的速度分布函数, 使之能满足基本的边界条件• 它们有多项式、三角函数、……诸种形式•

最近, 彭一川[1] 提出一种新的方法, 他所选取的速度分布函数(简称速度试函数) , 除了满足主要的边界条件外, 并规定和精确解(数值解) 的某些结果相符合, 用以确定速度试函数中的待定系数• 他所得到的结果, 比经典方法的相应结果要精确些, 但其法计算较烦• 当其利用数值解的某些结果确定试函数中的待定系数时, 需求解三次代数方程• 要确定所得到的 3 个根哪一个是合理的, 也非易事•

本文仍然是利用已有数值解的某些结果来确定速度试函数中的待定系数, 但只需求解线性代数方程, 计算十分简单, 即使增多多项式的项数及幂次, 计算工作量仍然不大, 而所得结果的精度, 则是十分令人满意的, 并胜过文[1] 的精度•

文中指出, 本文方法和文[1] 的方法, 均是模仿权残法的思想• 因而这二种方法的理论基础, 基本上是一致的•

不可压缩流体(不计体力) 绕流平板的二维定常层流边界层的积分关系式方程为[2]

$$d\delta^{**}/dx = C_D/2, \tag{1}$$

式中 δ^{**} 为动量损失厚度, C_D 为局部摩擦阻力系数, 令

$$v_x/v_\infty = F(\xi), \tag{2}$$

式中

* 收稿日期: 1997_12_08
作者简介: 袁镒吾(1929~) , 男, 教授.

$$\xi = y/\delta, \tag{3}$$

v_∞ 为自由来流速度, v_x 为流体质点的纵向速度, δ 为边界层的厚度•

速度分布函数 $F(\xi)$ 所应满足的边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &F(0) = F''(0) = F^{(4)}(0) = \cdots = 0, \\ &F(1) = 1,\ F'(1) = F''(1) = F'''(1) = \cdots = 0,\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

一些式中标号“′”表示对自变量 ξ 的一级导数•

不难验证, 速度分布函数[1]

$$F_1(\xi) = 3\xi/2 - \xi^3/2 \tag{5}$$

满足边界条件

$$F_1(0) = 0,\ F_1(1) = 1,\ F_1'(1) = 0,\ F_1''(0) = 0; \tag{6}$$

函数

$$F_2(\xi) = \frac{9}{5}\xi - \xi^3 + \frac{1}{5}\xi^6 \tag{7}$$

满足

$$F_2(0) = 0,\ F_2(1) = 1,\ F_2'(1) = 0,\ F_2''(1) = 0,\ F_2''(0) = 0; \tag{8}$$

函数

$$F_3(\xi) = \frac{12}{7}\xi - \frac{4}{5}\xi^3 + \frac{3}{35}\xi^8 \tag{9}$$

满足的边界条件和函数 $F_2(\xi)$ 所满足的相同, 即也有式(8)•

于是, 我们取速度试函数为

$$F(\xi) = \beta\left(\frac{3}{2}\xi - \frac{1}{2}\xi^3\right) + \beta\left(\frac{9}{5}\xi - \xi^3 + \frac{1}{5}\xi^6\right) + (1-2\beta)\left(\frac{12}{7}\xi - \frac{4}{5}\xi^3 + \frac{3}{35}\xi^8\right),$$

其中 β 为待定系数, 将上式整理得

$$F(\xi) = \left(-\frac{9}{70}\beta + \frac{12}{7}\right)\xi + \left(\frac{1}{10}\beta - \frac{4}{5}\right)\xi^3 + \frac{1}{5}\beta\xi^6 + \frac{3}{35}(1-2\beta)\xi^8 • \tag{10}$$

显然, 它所满足的边界条件和 $F_1(\xi)$ 所满足的相同, 即也有式(6)•

现确定系数 β• 平板层流边界层问题已有数值解(精确解)• 设本文解与数值解一致, 则有

$$\xi = \eta/3.5,\ v_x/v_\infty = f'(\eta) = F(\xi),$$

其中 η 为文[2] 中的相似变量, $f(\eta)$ 为文[2] 中的量纲一的流函数, $f'(\eta) = \mathrm{d}f(\eta)/\mathrm{d}\eta$•

根据数值解的结果, 当 $\eta = 1$ 时,

$$v_x/v_\infty = f'(1) = 0.460\,6,$$

故设 ($\xi = 1/3.5 = 0.285\,7$)

$$F(0.285\,7) = 0.460\,6 • \tag{11}$$

将式(11) 代入式(10), 可得关于 β 的线性代数方程, 解之可得

$$\beta = 0.306\,7, \tag{12}$$

于是, 我们确定了待定系数 β 的数值• 这种方法类似于权残法的配点法, 所选配点为(由式(3))

$$y = \delta/3.5 •$$

将式(12) 代入式(10) 得速度分布函数为

$$F(\xi) = 1.6749\xi - 0.7693\xi^3 + 0.0613\xi^6 + 0.0331\xi^8. \tag{13}$$

2 结果的检验

2.1 摩擦阻力因数及边界层的各种厚度

由于

$$\frac{1}{2}C_{\mathrm{D}} = \frac{1}{\rho v_\infty^2}\cdot\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{1}{\rho v_\infty^2}\cdot\mu\frac{\partial}{\partial\xi}(v_\infty F(\xi))\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\delta}\right)\bigg|_{y=0} = \frac{\nu}{v_\infty\delta}\cdot F'(0),$$

其中 ρ 为流体的密度, μ 为流体的动力粘性系数, ν 为运动粘性系数, 于是, 式(1) 成为

$$\frac{1}{2}C_{\mathrm{D}} = \mathcal{L}_1\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}x} = \frac{\nu}{v_\infty\delta}\cdot F'(0), \tag{14}$$

式中

$$\mathcal{L}_1 = \frac{\delta^{**}}{\delta} = \int_0^1 F(1-F)\,\mathrm{d}\xi. \tag{15}$$

由式(14) 可得

$$\delta = \sqrt{2F'(0)\nu x/(\mathcal{L}_1 v_\infty)}, \tag{16}$$

即

$$\delta\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = \sqrt{2F'(0)/\mathcal{L}_1}. \tag{17}$$

由式(14)、(16) 得

$$\frac{1}{2}C_{\mathrm{D}}\sqrt{v_\infty x/\nu} = \sqrt{F'(0)\mathcal{L}_1/2}. \tag{18}$$

另两个厚度的计算公式为

$$\delta^*\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = \mathcal{L}_2\sqrt{2F'(0)/\mathcal{L}_1}, \tag{19}$$

$$\delta^{**}\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}} = \sqrt{2F'(0)/\mathcal{L}_1}, \tag{20}$$

式中 δ^* 为排移厚度,

$$\delta^* = \mathcal{L}_2\delta, \tag{21}$$

$$\mathcal{L}_2 = \int_0^1 (1-F)\,\mathrm{d}\xi. \tag{22}$$

将式(13) 代入式(15)、(17) ~ (20) 及(22) 可求得 $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\delta\sqrt{v_\infty/(\nu x)}$, $\delta^*\sqrt{v_\infty/(\nu x)}$, $\delta^{**}\sqrt{v_\infty/(\nu x)}$ 及 $0.5C_{\mathrm{D}}\sqrt{v_\infty x/\nu}$, 列入表 1, 并和文[1] 的相应结果及布拉修斯的精确解(数值解) 相比较.

从表 1 可见, 本文结果和文[1] 的相应结果很接近, 比四次式的结果则明显地好些.

2.2 速度分布

文[1] 确定其速度分布试函数中的待定系数 β 时是假定其所得近似解的局部摩擦阻力因数和精确值相等, 即在式(18) 中令

$$\sqrt{\frac{1}{2}F'(0)\cdot\int_0^1 F(1-F)\,\mathrm{d}\xi} = 0.332. \tag{23}$$

由此式求得待定系数后, 其速度分布函数为[1]

$$F(\xi) = 1.635\xi - 0.905\xi^3 + 0.27\xi^4. \tag{24}$$

表 1　　　　　　　　精确解与积分关系式近似解的比较

解法 $F(\xi)$	$\mathcal{L}_1$	$\mathcal{L}_2$	$F'(0)$	$\delta\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}$	$\delta^*\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}$	$\delta^{**}\sqrt{\frac{v_\infty}{\nu x}}$	$C_D\sqrt{\frac{v_\infty x}{\nu}}$
精确解[2]				5.000	1.721	0.664	0.332
本文式(13)	0.129 6	0.342 4	1.674 9	5.084 0	1.740 8	0.658 9	0.329 4
文[1]式(24)	0.135	0.355	1.635	4.923	1.747	0.664	0.332
四次式(25)	$\frac{37}{315}$	0.3	2	5.836	1.751	0.685	0.343

表 2　　　　　　　　速度分布

η	ξ	$v_x/v_\infty = F(\xi)$			
		本文式(13)	精确解[2]	文[1]式(24)	四次式(25)
0	0	0	0	0	0
0.2	0.057 1	0.095 5	0.093 9	0.093 2	0.113 8
0.4	0.114 3	0.190 3	0.187 6	0.185 6	0.225 8
0.6	0.171 4	0.283 2	0.280 5	0.275 9	0.333 6
0.8	0.228 6	0.373 7	0.371 9	0.363 7	0.436 0
1.0	0.285 7	0.460 6	0.460 6	0.447 8	0.531 4
1.2	0.342 9	0.543 4	0.545 2	0.527 9	0.619 0
1.4	0.400 0	0.621 0	0.624 3	0.603 0	0.697 6
1.6	0.457 1	0.692 7	0.696 6	0.672 7	0.766 8
1.8	0.514 3	0.758 0	0.761 0	0.736 7	0.826 5
2.0	0.571 4	0.816 0	0.816 6	0.794 2	0.876 3
2.2	0.628 6	0.866 3	0.863 3	0.845 1	0.916 6
2.4	0.685 7	0.908 4	0.901 0	0.889 0	0.947 7
2.6	0.742 9	0.942 2	0.930 6	0.925 8	0.970 4
2.8	0.800 0	0.967 7	0.952 8	0.955 2	0.985 6
3.0	0.857 1	0.985 1	0.969 0	0.977 2	0.994 6
3.2	0.914 3	0.995 4	0.980 3	0.991 9	0.998 8
3.4	0.971 4	0.999 6	0.987 9	0.999 1	1
3.5	1.000 0	1.000 0	0.990 0	1.000 0	1

由式(23)知，文[1]确定其速度试函数中的待定系数 β 的方法也是类似于权残法和变率配点法的混合方法．实际上，式(23)中含有 $\int_0^1 F\,\mathrm{d}\xi$，$\int_0^1 F^2\mathrm{d}\xi$ 及 $F_1'(0)$ 等三个因素，其中前两个均是权残法的表式，第一个的权函数是 1，第二个的权函数是试函数本身，第三个因素则是变率配点法的表式．而本文方法，如前所述，则是单纯的配点法，且只取一个配点．所以，本文确定速度试函数中的待定系数 β 的方法和文[1]的相应方法具有相同的理论基础，但后者的计算过程相当烦琐．因为利用式(23)决定其待定系数 β 值时，需求解三次代数方程，十分烦琐，要判定所得 3 个根究竟哪一个是合理的也非易事．反之，本文方法是利用式(10)及(11)式决定待定系数 β，只需求解线性代数方程，十分简单，即使适当增多速度试函数的项数及其幂次，其

计算过程仍不十分麻烦, 而精度则是很令人满意的•

表2把本文的速度分布函数式(13)与文[1]的相应函数式(24)以及布拉修斯精确解(数值解)进行了比较• 表2中还列入了经典的四次多项式速度函数

$$F_4(\xi) = 2\xi - 2\xi^3 + \xi^4 \tag{25}$$

的结果

从表2可见, 本文的速度分布函数比文[1]的更接近精确解, 四次式(25)则显得很差•

总之, 本文方法具有和文[1]基本相同的理论基础, 而计算过程则十分简便, 精度又高, 值得向工程界推荐•

参 考 文 献

[1] 彭一川. 平板层流边界层的最佳近似速度分布[J]. 东北工学院学报, 1992, **13**(1): 110~129.

[2] 赵学端, 廖其奠. 粘性流体力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 1983, 113.

An Approximate Method for Determing the Veloctiy Profile in a Laminar Boundary_Layer on Flat Plate

Yuan Yiwu[1], Liu Youwen[2]

([1]Central South Univeristy of Technology, Changsha 410083, P R China;

[2]Hunan University, Changsha 410082, P R China)

Abstract: In this paper, using the integration method, it is sought to solve the problem for the laminar boundary_layer on a flat plate. First, a trial function of the velocity profile which satisfies the basical boundary conditions is selected. The coefficients in the trial function awaiting decision are decided by using some numerical results of the boundary_layer differential equations. It is similar to the method proposed by Peng Yichuan, but the former is more simple. According to the method proposed by Peng, when the awaiting decision coefficients of the trial function are decided, it is sought to solve a third power algebraic equation. On the other hand, in this paper, there is only need for solving a linear algelbraic equation. Moreover, the accuracy of the results of this paper is higher than that of Peng.

Key words: flat plate; laminar flow; boundary_layer; velocity profile; method of weighted residuals (MWR)