应用数学和力学, 第 20 卷 第 3 期(1999 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论文编号: 1000_0887(1999)03_0235_40

一种具有消失矩的小波基的构造*

彭瑞仁[1], 陈基明[1], 彭 康[2]

[1] 上海大学 29 信箱, 上海, 200072;

[2] 常州纺织工业学校, 常州 213000

(钱伟长推荐)

摘要: 在 $N \geqslant 2$ 情况下构造了一种性质良好的小波母函数, 这种小波母函数 N 阶可导并且趋于零的阶数为 $O\left(|t|^{-N}\right)$ $(|t| \to \infty)$, 同时具有 $N-2$ 阶消失矩和某种对称性• 文章还就 $N=4$ 的情况给出了计算实例•

关键词: 消失矩; 尺度函数; 正交小波母函数

分类号: O174.14 文献标识码: A

引 言

Fourier 分析是纯粹数学和应用数学的一个重要工具, 它从 e^{ix} 出发构造了 L^2 空间的正交基, 但 e^{ix} 不具有局部性, 所以 Fourier 分析不能作局部分析• 小波分析保留了 Fourier 分析的优点, 弥补了它的不足, 它从具有正则性、局部性的小波母函数出发构造 L^2 空间的正交基, 使得常见的如 Colderon_Zygmund 算子在其上的表现几乎是对角化的矩阵• 为了使这种矩阵中偏离对角线的元素趋向零的速度加快, 可采用具有若干阶消失矩的小波基•

若小波母函数 $\psi(t)$ 的离散化 $\left\{2^{m/2}\psi(2^m t - sn), m, n \in Z\right\}$ 是 L^2 空间中的标准正交基, 则称 $\psi(t)$ 为正交小波母函数• 本文提出一种构造正交小波基的新方法, 它能构造出既有若干阶消失矩又有很好局部性、光滑性以及对称性的正交小波基• 不难证明

定理 1 若① $\forall \varepsilon > 0$, $\exists c_1$, $|\psi(t)| \leqslant c_1(1+|t|)^{-m-1-\varepsilon}$,

② $\psi(t) \in C^m$, 且 $\psi^{(l)}(t)$ 有界, $l \leqslant m$,

则 $\psi(t)$ 具有 m 阶消失矩•

证明见参考文献[1]•

本文提出的方法能构造出满足以下五个条件的小波母函数 $\psi(t)$:

1) $\left\{2^{m/2}\psi(2^m t - n), m, n \in Z\right.$ 是 L^2 空间的标准正交基,

2) $\hat{\psi}(\omega)$ 有紧支集, 即 $\exists A < B$, 使

$$\operatorname{supp}\hat{\psi} \subset [A, B],$$

3) $\psi(t) = O(|t|^{-N})$, N 为正整数,

4) $\psi(t)$ 有 $N-2$ 阶消失矩,

* 收稿日期: 1998_01_20; 修订日期: 1998_12_20
基金来源: 国家自然科学基金资助项目(69875009)
作者简介: 彭瑞仁(1936~), 教授, 发表论文十余篇

5) $\psi(t)$ 具有对称性•

显然这样的正交小波母函数满足定理 1 中的条件• 所以当 $N \geqslant 2$ 时, 不难看出有 $c_2 > 0$, 使

$$|\psi(t)| \leqslant c_2(1+|t|)^{N-1-\varepsilon}, \tag{1}$$

这里 $\varepsilon > 0$• 记 $\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t-k)$, 利用这样的小波母函数 $\psi(t)$ 可建立一组 $L^2[0,1]$ 中的标准正交基:

$$g_0(t) = 1,$$
$$g_1(t) = \sum_{l\in Z}\psi_{0,0}(t+l),$$
$$g_2(t) = \sum_{l\in Z}\psi_{-1,0}(t+l),$$
$$g_3(t) = g_2\left(t-\frac{1}{2}\right),$$
$$\vdots$$
$$g_{2^j+k}(t) = g_{2^j}(t-k\cdot 2^{-j}),$$
$$\vdots$$

$\forall f \in C[0,1]$ 并且可以延拓为以 1 为周期的周期函数, 则有:

$$\lim_{M\to\infty}\left\| f - \sum_{0}^{M} a_n g_n \right\|_{L^\infty} = 0, \tag{2}$$

这里 $a_n = (f, g_n)$•

证明见参考文献[1]•

同时满足条件 1)~5) 的正交小波母函数是函数奇性分析的有力工具•

1 平移正交系的构造

1988 年, S. Mallat 提出了构造正交小波基的多尺度分析方法(multi_resolution analysis), 简称 MRA 方法, 这实质上是在 L^2 空间中寻找一列子空间 $\{V_m\}_{m\in Z}$, $V_m \subset L^2$ 和一个尺度函数 $\varphi(t)$, 满足

1) $V_m \subset V_{m+1}$, $\forall m \in Z$;
2) $\mathrm{Clos}_{L^2}\left(\bigcup_{m\in Z} V_m\right) = L^2(R)$;
3) $\bigcap_{m\in Z} V_m = \{0\}$;
4) 映照 $\tau: V_m \to V_{m+1}$, $\tau f(t) = f(2t)$, $\forall f \in V_m$, $m \in Z$;
5) $\varphi \in V_0$, 且 $\{\varphi(\cdot - n), n \in Z\}$ 为 V_0 的标准正交基•

由上面的条件3)、5)可知, $\left\{2^{\frac{m}{2}}\varphi(2^m t-n), m, n \in Z\right\}$ 是 V_m 的标准正交基• 而 $\varphi \in V_0 \subset V_1 \Rightarrow \varphi \in V_1$, 故 $\varphi(t)$ 在 V_1 中可表示为

$$\varphi(t) = \sum_{n\in Z} c_n \varphi(2t-n), \tag{3}$$

可以证明

$$\psi(t) = \sum_{n\in Z}(-1)^n c_{1-n}\varphi(2t-n), \tag{4}$$

是正交小波母函数, 即 $\left\{2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m t-n), m, n \in Z\right\}$ 是 L^2 空间的标准正交基(见参考文献[2])• 由 4) 可知 ψ 的性质依赖于 φ•

从Fourier 分析知识可知:

1) 令 $\varphi_n(t)=\varphi(t-n)$, 则$\{\varphi_n, n\in Z\}$ 是标准正交系的充要条件是

$$\sum_{k\in Z}|\hat\varphi(\omega+2k\pi)|^2=1, \tag{5}$$

2) 令 $H(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n\in Z}c_n e^{-in\omega}$, (6)

这里 c_n 是(3) 中的系数• 则

$$|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2\equiv 1, \tag{7}$$

由1) 不难证明:

3) 假定 $\varphi_0\in V_0$, 且$\{\varphi_0(\cdot-n), n\in Z\}$ 是V_0 的一组基, 令

$$\hat\varphi(\omega)=\frac{\hat\varphi_0(\omega)}{\left\{\sum_{k\in Z}|\hat\varphi_0(\omega+2k\pi)|^2\right\}^{1/2}}, \tag{8}$$

则由 $\varphi(t)$ 经平移得$\{\varphi_n, n\in Z\}$, 它将是 V_0 的一组标准正交基•

对等式(4) 的两边作Fourier 变换, 得

$$\begin{aligned}\hat\psi(\omega)&=\frac{1}{2}\sum_{n\in Z}(-1)^n\overline{C_{1-n}}e^{-\frac{1}{2}n\omega}\hat\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\\&=-e^{\frac{1}{2}\omega}\left\{\frac{1}{2}\sum_{n\in Z}(-1)^{n-1}\overline{C_{1-n}}e^{-\frac{1}{2}(n-1)\omega}\right\}\hat\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)=\\&=-e^{\frac{1}{2}\omega}\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\hat\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right),\end{aligned} \tag{9}$$

同理可得

$$\hat\varphi(\omega)=H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$H\left(\frac{\omega}{2}\right)=\frac{\hat\varphi(\omega)}{\hat\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \tag{10}$$

于是有

$$H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)=\left[\frac{\hat\varphi(\omega+2\pi)}{\hat\varphi(\omega/2+\pi)}\right], \tag{11}$$

最后得

$$\hat\psi(\omega)=-e^{-\frac{1}{2}\omega}\left[\overline{\frac{\hat\varphi(\omega+2\pi)}{\hat\varphi(\omega/2+\pi)}}\right]\hat\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right), \tag{12}$$

用(8) 代入(12) 得

$$\begin{aligned}\hat\psi(\omega)&=-e^{-\frac{1}{2}\omega}\left[\overline{\frac{\dfrac{\hat\varphi_0(\omega+2\pi)}{\sqrt{\sum_{k\in Z}|\hat\varphi_0(\omega+2k\pi)|^2}}}{\dfrac{\hat\varphi_0(\omega/2+\pi)}{\sqrt{\sum_{k\in Z}\left|\hat\varphi_0\left(\frac{\omega}{2}+(2k+1)\pi\right)\right|^2}}}}\right]\frac{\hat\varphi_0\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\sum_{k\in Z}\left|\hat\varphi_0\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)\right|^2}}=\\&=-e^{-\frac{1}{2}\omega}\left[\overline{\frac{\hat\varphi_0(\omega+2k\pi)}{\hat\varphi_0(\omega/2+\pi)}}\right]\hat\varphi_0\left(\frac{\omega}{2}\right)\sqrt{\frac{\sum_{k\in Z}\left|\hat\varphi_0\left(\frac{\omega}{2}+(2k+1)\pi\right)\right|^2}{\sum_{k\in Z}|\hat\varphi_0(\omega+2k\pi)|^2\sum_{k\in Z}\left|\hat\varphi_0\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)\right|^2}},\end{aligned} \tag{13}$$

因此问题归结为构造 φ_0•

2　φ_0 的构造法与 ψ 的构造法

现在来构造 φ_0, 使得它的 Fourier 变换 $\hat{\varphi}_0$ 经代入(13) 得到的 ψ, 满足引言中条件 2), 即存在 $\exists A < B$, 使 $\operatorname{supp}\hat{\psi} \subset [A, B]$, 对这个 $\hat{\psi}$ 作 Fourier 逆变换得到的 $\psi(t)$ 满足条件 1)、3)、4)、5)• 条件 3) 中的 N 是正整数, 对于任意给定的 N, 本文给出的方法都是适用的• 为了简单起见不妨选取 $N = 4$ 来构造•

记 $B_b = \left\{ f(t) \mid f \in L^2, \operatorname{supp}\hat{f} \in [-b, b] \right\}$•

取 $b = 0.9\pi$, $h = 1$, 所以 $0 < h < \pi/b$, 再取 $\beta = \pi/h - b$, 即 $\beta = 0.1\pi$•

设

$$G(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3\beta^3}(x + b + 2\beta)^3 & \left(x \in \left[-b - 2\beta, -b - \dfrac{3}{2}\beta\right)\right), \\ \dfrac{-2}{3\beta^3}(x + b + \beta)^3 + \dfrac{x}{\beta^2} + \dfrac{1}{\beta}\left(b + \dfrac{3}{2}\beta\right) & \left(x \in \left[-b - \dfrac{3}{2}\beta, -b - \dfrac{\beta}{2}\beta\right)\right), \\ \dfrac{2}{3\beta^3}(x + b)^3 + 1 & \left(x \in \left[-b - \dfrac{\beta}{2}, -b\right)\right), \end{cases}$$

令

$$\hat{\varphi}_0(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}G(\omega) & (\omega \in [-b - 2\beta, -b)), \\ \dfrac{1}{2} & (\omega \in [-b, b)), \\ \dfrac{1}{2}G(-\omega) & (\omega \in [b, b + 2\beta)), \end{cases}$$

经 Fourier 逆变换, 得

$$\varphi_0(t) = \frac{32000}{\pi^4} \frac{\sin^2 \dfrac{\pi}{40}t \sin \dfrac{\pi}{20}t \sin \pi t}{t^4}• \tag{14}$$

(详见参考文献[3])•

$\forall f \in B_{0.9\pi}$, 则(证明见参考文献[3])

$$f(t) = \sum_{n \in Z} f(n)\varphi_0(t - n), \tag{15}$$

所以 $\left\{ \varphi_0(\cdot - n), n \in Z \right\}$ 是 $B_{0.9\pi}$ 的一组基, 对其正交化• 令

$$\varphi(t) = F^{-1}\left\{ \frac{\hat{\varphi}_0(\omega)}{\sqrt{\sum_{k \in Z} |\hat{\varphi}_0(\omega + 2k\pi)|}} \right\}(t), \tag{16}$$

以此 $\varphi(t)$ 作为尺度函数, 显然 $\left\{ \varphi(\cdot - n), n \in Z \right\}$ 是 V_0 的标准正交基, 故 $\left\{ V_m \right\}_{m \in Z}$, $V_m \subset L^2$ 和 $\varphi(t)$ 构成一多尺度分析, 其中 $V_0 = \overline{\operatorname{span}\left\{ \varphi(\cdot - n), n \in Z \right\}}$, 而

$$\mathcal{T}f(t) = f(2t),$$

$$\tau: V_m \mapsto V_{m+1}•$$

由于 $\operatorname{supp}\hat{\varphi}_0 \subset [-1.1\pi, 1.1\pi]$, 由(16) 可知:

$$\operatorname{supp}\hat{\varphi} \subset [-1.1\pi, 1.1\pi], \tag{17}$$

而当 $\omega \in [-1.1\pi, 1.1\pi]$ 时,

$$\sum_{k \in Z} |\hat{\varphi}_0(\omega + 2k\pi)|^2 = |\hat{\varphi}_0(\omega - 2\pi)|^2 + |\hat{\varphi}_0(\omega)|^2 + |\hat{\varphi}_0(\omega + 2\pi)|^2,$$

$$\hat{\varphi}(t) = F^{-1}\left\{\frac{\hat{\varphi}_0(\omega)}{\sqrt{|\hat{\varphi}_0(\omega-2\pi)|^2+|\hat{\varphi}_0(\omega)|^2+\hat{\varphi}_0(\omega+2\pi)}}\right\}(t)\text{。} \tag{18}$$

从图 1 看, 由于 $\frac{d}{d\omega}\hat{\varphi}_0(\omega)$, $\frac{d^2}{d\omega^2}\hat{\varphi}_0(\omega)$, $\frac{d^3}{d\omega^3}\hat{\varphi}_0(\omega)$ 均存在且连续, $\frac{d^4}{d\omega^4}\hat{\varphi}_0(\omega)$ 几乎处处存在, 由 Fourier 反变换可以得出结论:

$$\varphi_0(t) = O(|t|^{-4}), \tag{19}$$

同理可以知道

$$\psi(t) = O(|t|^{-4}), \tag{20}$$

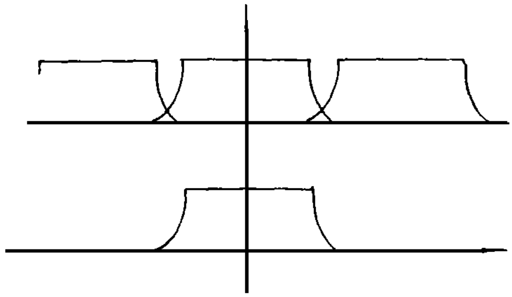

图 1

又因为

$$\operatorname{supp}\hat{\varphi} = [-1.1\pi, 1.1\pi],$$

$$\operatorname{supp}\hat{\varphi}(\cdot+2\pi) = [-3.1\pi, -0.9\pi],$$

$$\operatorname{supp}\hat{\varphi}\left(\frac{1}{2}\cdot\right) = [-2.2\pi, 2.2\pi],$$

$$\operatorname{supp}\hat{\varphi}\left(\frac{1}{2}\cdot+\pi\right) = [-4.2\pi, 0.2\pi],$$

$$\operatorname{supp}\hat{\varphi}(\cdot)\hat{\varphi}(\cdot+2\pi) = [-2.2\pi, -0.9\pi],$$

$$\operatorname{supp}\hat{\varphi}(\cdot)\hat{\varphi}(\cdot+2\pi) \in \operatorname{supp}\hat{\varphi}\left(\frac{\cdot}{2}+\pi\right),$$

$$\operatorname{supp}\hat{\psi} = [-2.2\pi, -0.9\pi]\text{。}$$

下面证明这里的 $\psi(t)$ 有 2 阶消失矩。

由(20)可知 $\psi(t)$ 满足定理 1 中条件 ①。

由 $G(\omega)$, $\hat{\varphi}_0(\omega)$ 的表达式以及(13)可知, 对任意正整数 M, 有

$$(\mathrm{i}\omega)^M\hat{\psi}(\omega) \in L^1(-\infty, \infty)\text{。}$$

定理 2 若 $\hat{f}(\omega)$ 连续且有紧支集, 则对任意正整数 M, $f^{(M)}(t)$ 一致连续。

证 记 F 为 $L^1(-\infty, \infty)$ 上的 Fourier 变换, F^{-1} 为 Fourier 逆变换, 设 $\operatorname{supp}\hat{f} = [-A, A]$

$$F^{-1}\ f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}d\omega,$$

$$f^{(M)}(t) = F^{-1}\left\{(\mathrm{i}\omega)^M\hat{f}(\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}(\mathrm{i}\omega)^M\hat{f}(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}d\omega,$$

所以对任意 $h > 0$, $t \in (-\infty, \infty)$,

$$|f^{(M)}(t+h)-f^{(M)}(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}|(\mathrm{i}\omega)^M\hat{f}(\omega)||e^{\mathrm{i}\omega(t+h)}-e^{\mathrm{i}\omega t}|d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}|\omega^M\hat{f}(\omega)||e^{\mathrm{i}\omega h}-1|d\omega, \tag{21}$$

(21)式右端不含 t, 故 $f^{(M)}(t)$ 一致连续。 证毕。

由定理 2 知, $\psi^{(M)}(t)$ 一致连续, 并且 $\omega^M\hat{\psi}(\omega) \in L(-\infty, \infty)$, 所以 $\lim_{|t|\to\infty}\psi^{(M)}(t) = 0$, 从而 $\psi(t)$ 满足定理 1 中条件 ②, 就是说 $\psi(t)$ 有 2 阶消失矩。

显然, 当 $t_1 = t - \frac{1}{2}$ 时, 经变换 $\left(\text{平移}\frac{1}{2}\right)$, 记 $\psi(t) = \psi_1(t) + \mathrm{i}\psi_2(t)$, 则

$$\phi_1(t_1) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\cos(t_1\omega)\,\mathrm{d}\omega = \phi_1(-t_1),$$

$$\phi_2(-t_1) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\sin(-t_1\omega)\,\mathrm{d}\omega = -\phi_2(-t_1)\cdot$$

这说明把 t 轴平移 1/2 后, $\phi_1(t)$ 成为偶函数, $\phi_2(t)$ 成为奇函数, 即 $\phi(t)$ 的实部与虚部具有某种对称性· 这就证明我们构造的 $\phi(t)$ 完全满足引言中提出的五个条件·

完全类似地, 可以证明: 若取

$$\varphi_0(t) = \frac{1024\times 10^4}{\pi^5}\frac{\sin^2\frac{\pi}{80}t\sin^2\frac{\pi}{40}t\sin\pi t\cos\frac{\pi}{40}t}{t^5}, \tag{22}$$

代替(14) 可得相应的 $\phi(t)$, 它满足:

1) $\left\{2^{m/2}\phi(2^m t-n), m, n\in Z\right\}$ 是 L^2 中的标准正交小波基,
2) $\mathrm{supp}\,\hat{\phi}$ 有紧支集,
3) $\phi(t) = O(|t|^{-5})$,
4) $\phi(t)$ 具 3 阶消失矩,
5) $\phi(t)$ 有某种对称性·

参 考 文 献

[1] 李世雄, 刘家琦. 小波变换和反演数学基础[M]. 北京: 地质出版社, 1994
[2] 崔锦泰. 小波分析导论[M]. 程正兴译. 西安: 西安交大出版社, 1995
[3] 彭瑞仁. 信息技术中的数据压缩——快速取样定理[J]. 上海工业大学学报, 1994, **15**(4)

Construction of Wavelet Bases with Vanishing Movement

Peng Ruiren[1], Chen Jiming[1], Peng Kang[2]
[1]Science College, Shanghai University; Shanghai 200072, P R China;
[2]Changzhou Textile Industrial Coll, Changzhou, 213000, P R China

Abstract: A kind of mother wavelet with good properties is constructed for any $N\geqslant 2$, which is differentiable for N times, converges to zero at the order of $O(|t|^{-N})(t\to\infty)$ and has N_2 order of vanishing movement and some property of symmetry meanwhile. A computation example for $N=4$ is also given.

Key words: vanishing movement; scaling function; orthgonal mother wavelet