应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论文编号: 1000_0887(1999) 03_0241_48

固体的统一弹、粘、塑性理论*

金问鲁

杭州市城建设计院, 杭州 310001

(何福保推荐)

摘要: 提出了一个弹、粘、塑性统一理论, 可用以计算在任意受力过程下物体各点弹、粘、塑性的变化情况· 理论的基础是热力学定律及虚弹性假设· 文中导出本构关系以及有关的变分原理, 由此容易推导空间_时间的有限元构式· 值得指出, 适当选取文中的物质常数, 可以得出类似于当前习用的塑性本构关系·

关键词: 热力学第一、 第二定律; 虚弹性假设
分类号: 文献标识码: A

1 弹、粘、塑性统一理论的假设与说明

固体受到外部的影响时内部将作出反应· 固体主要有弹性、塑性及粘性三种性质· 从分子微观研究实不可能, 只能采用宏观方法· 外部影响只考虑外力功, 反应是应变能和热耗散, 如图 1· 在图 1(a) 中外力功率为 $\dot{W}$, 一部分为可逆的应变能率 $\dot{U}$, 如图 1(b), 另一部分是不可回逆的热耗散: 熵产生 $\dot{S}$ 与绝对温度 T 的乘积· 按照热力学第一、第二定律分别有:

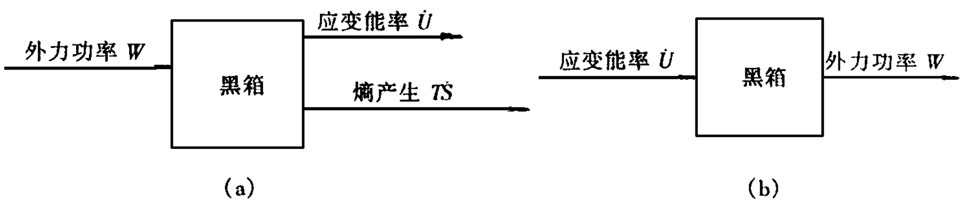


图 1 固体的黑箱性能

$$\dot{W} = \dot{U} + T\dot{S},\quad T\dot{S} \geqslant 0. \tag{1}$$

本文所考虑的情况和假定如下:

1. 理论必须符合热力学基本定律, 在塑性理论中并不要求有屈服面或屈服准则的存在·

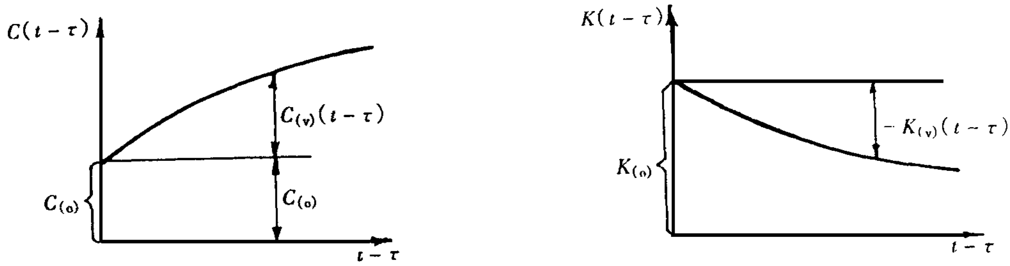
2. 如所周知, 单向荷载试验并不能确认有塑性现象发生, 只有在卸载时才能发现存在不可恢复的塑性变形· 因此, 本文采用虚弹粘性假设, 仅在加载和卸载阶段采用不同的结构参

* 收稿日期: 1997_04_21; 修订日期: 1998_09_20
作者简介: 金问鲁(1925~), 男, 第六、七届全国人大代表, 教授级高工, 原杭州城建设计院院长兼总工程师, 全国土木建筑学会理事及全国力学学会理事, 原浙江省力学学会理事长, 已发表专著 6 部、论文 50 多篇

量• 一般,在卸载时将结构参量取为常数,而在加载时将结构参量取为应力不变量 I_1, J_2, J_3 的正定函数• 这里, I_1 为一次应力不变量, J_2 和 J_3 分别是二和三次应力偏量不变量• 注意,在理性力学中,有多种变参量的弹性力学,在本文中不作讨论•

3. 为了避免构式的复杂性,假定固体在小应变、小变温情况• 只考虑外力输入的功,由于是小变温不考虑热流的影响•

粘性实质上是时滞性,粘性的积分表示式要较微分表示式妥当,本文采用积分表示,材料的性质主要用蠕变函数曲线和应力松弛曲线来描述,如图 2• 在弹粘性的阶段,各结构参量记为 $C_{(e)}(t-\tau)$, $C_{(eo)}$, $C_{(ev)}(t-\tau)$ 和 $K_{(e)}(t-\tau)$, $K_{(eo)}$, $K_{(ev)}(t-\tau)$;在粘塑性阶段,各结构参量记为 $C_{(p)}(t-\tau)$, $C_{(po)}$, $C_{(pv)}(t-\tau)$ 和 $K_{(p)}(t-\tau)$, $K_{(po)}$, $K_{(pv)}(t-\tau)$• 变位一般可以表示为弹粘性变位与粘塑性变位之和,而对弹粘性和粘塑性则具有同一应力:



(a) 蠕变应变($\sigma=1$, 全部时间) (b) 应力松弛($\varepsilon=1$, 全部时间)

图 2 蠕变与松弛曲线

$$\varepsilon=\varepsilon_{(e)}+\varepsilon_{(p)}, \qquad \sigma=\sigma_{(e)}=\sigma_{(p)}, \tag{2}$$

在加载阶段各实测的结构参数,用上面横划表示,它们也称为折算参数,经过简单的计算容易求得:

$$C_{(o)}=C_{(eo)}+C_{(po)}, \text{或 } C_{(po)}=C_{(o)}-C_{(eo)}, \tag{3}$$

$$C_{(v)}(t-\tau)=C_{(ev)}(t-\tau)+C_{(pv)}(t-\tau), \tag{4a}$$

或

$$C_{(pv)}(t-\tau)=C_{(v)}(t-\tau)-C_{(ev)}(t-\tau), \tag{4b}$$

因为

$$\varepsilon_{(e)}K_{(eo)}=\varepsilon_{(p)}K_{(po)}=(\varepsilon_{(e)}+\varepsilon_{(p)})K_{(o)},$$

$$K_{(eo)}=\frac{\varepsilon_{(p)}}{\varepsilon_{(e)}}K_{(po)}=\left(1+\frac{\varepsilon_{(p)}}{\varepsilon_{(e)}}\right)K_{(o)}, \qquad \frac{\varepsilon_{(p)}}{\varepsilon_{(e)}}=\frac{K_{(eo)}}{K_{(po)}},$$

可得:

$$K_{(o)}=\frac{K_{(eo)}K_{(po)}}{K_{(eo)}+K_{(po)}}, \tag{5a}$$

或:

$$K_{(po)}=\frac{K_{(eo)}K_{(o)}}{K_{(eo)}-K_{(o)}}, \tag{5b}$$

$$K_{v}(t-\tau)=\frac{K_{(ev)}(t-\tau)K_{(pv)}(t-\tau)}{K_{(ev)}(t-\tau)+K_{(pv)}(t-\tau)}, \tag{6a}$$

或:

$$K_{(pv)}(t-\tau)=\frac{K_{(ev)}(t-\tau)K_{(v)}(t-\tau)}{K_{(ev)}(t-\tau)-K_{(v)}(t-\tau)}, \tag{6b}$$

2 弹粘性问题和粘塑性问题的本构方程及应变能

为推导方便,假设荷载是连续函数,并设 $\sigma(0)=0$, 在其它情况的构式仅须作少量修改•

在弹粘性情况有:

$$\varepsilon_{(e)}(t)=\int_0^t [C_{(eo)}+C_{(ev)}(t-\tau)]\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau=C_{(eo)}\sigma(t)+\int_0^t C_{(ev)}(t-\tau)\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau,$$

通过分部积分可得应变_应力关系如下,

$$\varepsilon_{(e)}(t)=C_{(eo)}\sigma(t)+\int_0^t\sigma(\tau)C'_{(ev)}(t-\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{7}$$

同样可得应力一应变关系如下,

$$\sigma(t)=K_{(eo)}\varepsilon_{(e)}(t)+\int_0^t\varepsilon_{(e)}(\tau)K'_{(ev)}(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{8}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}C'_{(ev)}(t-\tau)&=\frac{\mathrm{d}C_{(ev)}(t-\tau)}{\mathrm{d}(t-\tau)},\\K'_{(ev)}(t-\tau)&=\frac{\mathrm{d}K_{(ev)}(t-\tau)}{\mathrm{d}(t-\tau)}.\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

(

将以上公式推广到塑、弹、粘性情况,注意折算结构参数 $C_{(o)},C_{(v)},K_{(o)},K_{(v)}$ 都是 σ 的函数.

$$\varepsilon(t)=\int_0^t[C_{(o)}+C_{(v)}(t-\tau)]\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau,$$

通过分部积分, 可得应变_应力关系如下,

$$\begin{aligned}\varepsilon(t)&=\int_0^\tau\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[(C_{(o)}+C_{(v)}(t-\tau))\cdot\sigma]-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(C_{(o)}+C_{(v)}(t-\tau))\cdot\sigma\right\}\mathrm{d}\tau=\\&C_{(o)}\sigma(t)-\int_0^t\sigma(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(C_{(o)}+C_{(v)}(t-\tau))\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{10}$$

同样可得应力_应变关系如下,

$$\sigma(t)=K_{(o)}\varepsilon(t)-\int_0^t\varepsilon(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(K_{(o)}+K_{(v)}(t-\tau))\mathrm{d}\tau. \tag{11}$$

以 $A_{(e)}(t)$ 表示弹粘性应变能密度, $A_{(e)}(t)$ 由弹性部分和粘性部分合成, 从(8) 式得:

$$A_{(e)}(t)=A_{(eo)}(t)+A_{(ev)}(t) \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}A_{(eo)}(t)&=K_{(eo)}\varepsilon(t)\mathrm{d}\varepsilon(t),\\\mathrm{d}A_{(ev)}(t)&=\mathrm{d}\varepsilon(t)\int_0^t\varepsilon(\tau)K'_{(ev)}(t-\tau)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

T 时刻的应变能为以上微分量从 0 到 T 的积分:

$$\left.\begin{aligned}A_{(eo)}(T)&=\int_0^T K_{(eo)}\varepsilon(t)\mathrm{d}\varepsilon(t)=\frac{1}{2}K_{(eo)}(\varepsilon(T))^2,\\A_{(ev)}(T)&=\int_0^T\mathrm{d}\varepsilon(t)\int_0^t\varepsilon(\tau)K'_{(ev)}(t-\tau)\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

在卸载时即用以上应变能密度.

以 $A(t)$ 表示弹粘塑性应变能密度, $A(t)$ 也是由虚弹性部分和虚粘性部分合成. 类似地有:

$$A(t)=A_{(o)}(t)+A_{(v)}(t), \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}A_{(o)}(t)&=K_{(o)}\varepsilon(t)\mathrm{d}\varepsilon(t)-\mathrm{d}\varepsilon(t)\int_0^t\varepsilon(\tau)\frac{\mathrm{d}K_{(o)}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau,\\\mathrm{d}A_{(v)}(t)&=-\mathrm{d}\varepsilon(t)\int_0^t\varepsilon(\tau)\frac{\mathrm{d}K_{(v)}(t-\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

T 时刻的应变能为以上微分从 0 到 T 的积分:

$$\left.\begin{aligned}A_{(\mathrm{o})}(T) &= \int_0^T K_{(\mathrm{o})}\,\varepsilon(t)\,\mathrm{d}\varepsilon(t) - \int_0^T \mathrm{d}\varepsilon(t)\int_0^t \varepsilon(\tau)\,\frac{\mathrm{d}K_{(\mathrm{o})}}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau,\\ A_{(\mathrm{v})}(T) &= -\int_0^T \mathrm{d}\varepsilon(t)\int_0^t \varepsilon(\tau)\,\frac{\mathrm{d}K_{(\mathrm{v})}(t-\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau,\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

在加载时用以上应变能密度•

3 外力功、应变能及最小势能原理

在一维情况,应变_变位关系是:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}\bullet \tag{18}$$

在加载和卸载中外力功采用相同的形式• 用 $p(t)$、$P(t)$ 分别表示 t 时刻物体内部及边界的外载,则外力功 W 为:

$$W = \int \mathrm{d}x\int_0^T p(t)\,\frac{\partial u(t)}{\partial t}\mathrm{d}t + \int_0^T P(t)\,\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\bullet \tag{19}$$

再设 $u(t)$ 在边界点的变分为零,外力功的变分为:

$$\begin{aligned}\delta W = &\int \mathrm{d}x\int_0^T p(t)\,\frac{\partial \delta u(t)}{\partial t}\mathrm{d}t + \int_0^T P(t)\,\frac{\mathrm{d}\delta u(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t =\\ &\int \mathrm{d}x\,p(T)\,\delta u(T) - \int \mathrm{d}x\int_0^T \frac{\partial p(t)}{\partial t}\delta u(t)\,\mathrm{d}t +\\ &P(T)\,\delta u(T) - \int_0^T \frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}\delta u(t)\,\mathrm{d}t\bullet\end{aligned} \tag{20}$$

以下写出应变能的变分•

$\sigma(t)$ 由(8) 或(11) 式给出,在求应变能密度 $A(T)$ 的变分时,由于 $\sigma(t)$ 已由($\tau < t$) 的情况确定,对它不行变分•

首先考虑卸载时的 $\delta A_{(\mathrm{e})}(T)$• 实际上 $A_{(\mathrm{e})}(T)$ 可写为: $A_{(\mathrm{e})}(T) = \int_0^T \sigma(t)\,\mathrm{d}\varepsilon(t)$,由此可求得应变能密度 $A_{(\mathrm{e})}(T)$ 的应变能 $U_{(\mathrm{e})}$ 的变分如下,

$$\begin{aligned}\delta A_{(\mathrm{e})}(T) = &\int_0^T \sigma(t)\,\mathrm{d}\delta\varepsilon(t) - \int_0^T\left\{\mathrm{d}[\sigma(t)\,\delta\varepsilon(t)] - \mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\delta\varepsilon(t)\right\} =\\ &\sigma(T)\,\delta\varepsilon(T) - \int_0^T \mathrm{d}t\,\delta\varepsilon(t)\,\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t},\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}\delta U_{(\mathrm{e})} = &\int \mathrm{d}x\,\delta A_{(\mathrm{e})} = \int \sigma(T)\,\delta\frac{\partial u(T)}{\partial x}\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x\int_0^T \mathrm{d}t\,\delta\frac{\partial u(t)}{\partial x}\,\frac{\partial \sigma(t)}{\partial t} =\\ &\sigma(T)\,\delta u(T)\Big|_{\text{边界}} - \int_0^T \mathrm{d}t\,\delta u(t)\,\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\text{边界}} -\\ &\int \mathrm{d}x\,\frac{\partial \sigma(T)}{\partial x}\delta u(T) + \int \mathrm{d}x\int_0^T \mathrm{d}t\,\delta u(t)\,\frac{\partial^2 \sigma(t)}{\partial x\,\partial t}\bullet\end{aligned} \tag{22}$$

对塑、弹、粘性情况,同样有类似于(17) 式的应变能积分•

$$\begin{aligned}\delta U = &\sigma(T)\,\delta u(T)\Big|_{\text{边界}} - \int_0^T \mathrm{d}t\,\delta u(t)\,\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\text{边界}} -\\ &\int \mathrm{d}x\,\frac{\partial \sigma(T)}{\partial x}\delta u(T) + \int \mathrm{d}x\int_0^T \mathrm{d}t\,\delta u(t)\,\frac{\partial^2 \sigma(t)}{\partial x\,\partial t}\bullet\end{aligned} \tag{23}$$

(23) 式与(22) 式不同之处是(22) 式所用的 σ 表示式是(8) 式,(23) 式所用的 σ 表示式是(11) 式• 当然,两者用来计算 σ 的结构参数是不同的•

结构的总势能为 Π, $\Pi = U - W$, 最小势能原理为 $\delta\Pi = \delta(U - W) = 0$• 按照(20), (22), (23) 式具体写出最小势能如下:

$$(\sigma(T) - P(T))\delta u(T)\Big|_{边界} - \int_0^T \mathrm{d}t\,\delta u(t)\left(\frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{边界} -$$

载时

$$\int \mathrm{d}x\left(\frac{\partial\sigma(T)}{\partial x} + p(T)\right)\delta u(T) + \int \mathrm{d}x\int_0^T\left(\frac{\partial^2\sigma(t)}{\partial x\partial t} + \frac{\partial p(t)}{\partial t}\right)\delta u(t)\,\mathrm{d}t = 0, \tag{24}$$

使(24) 式中 $\delta u(T)$ 和 $\delta u(t)$ 的乘数为零, 且用(8) 或(11) 式可得全部问题的控制方程•

在计算时卸载过程中用弹粘性理论构式, 加载过程中用弹粘塑性过程构式, 所以在应用本论文构式时必须区别加载和卸载过程• 在单维情况, 可用如下判别准则:

$$\sigma\mathrm{d}\varepsilon\begin{cases} > 0 & (加载), \\ \leqslant 0 & (卸载)• \end{cases} \tag{25}$$

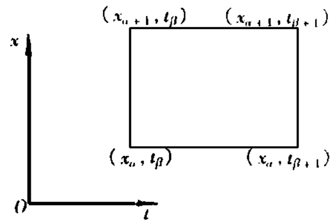


图 3 单维单元图

最后简单说明近似计算方法• 如图 3, 表示单维问题所示的单元• 在一单元中可采用单一的结构常数, 对弹粘塑问题要采用逐步近似法, 在本文中对此不再作详细讨论•

4 三 维 问 题

今将以上的结果推广到三维问题• 在本节中将采用卡特逊坐标系的张量符号• 今在小应变、小变温的三维弹性问题中, 如果逐点结构参数变化不大, 则可采用两个结构参数: 体积刚度 $K_{(eo)}$、剪切刚度 $G_{(eo)}$ 来表示• 在弹粘性问题要用到四个结构参数: $K_{(eo)}$, $K_{(ev)}$, $G_{(eo)}$, $G_{(ev)}$, 应力 _ 应变关系如下:

$$\sigma_{ij}(t) = K_{(eo)}e(t)\delta_{ij} + 2G_{(eo)}\varepsilon'_{ij}(t) + \int_0^t e(\tau)K'_{(ev)}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau + 2\int_0^t \varepsilon'_{ij}(\tau)G'_{(ev)}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau• \tag{26}$$

类似地, 在弹粘塑性问题中, 用到四个结构参数 $K_{(o)}$, $K_{(v)}$, $G_{(o)}$, $G_{(v)}$, 应力 _ 应变关系如下•

$$\sigma_{ij}(t) = K_{(o)}e(t)\delta_{ij} + 2G_{(o)}\varepsilon'_{ij}(t) - \int_0^t e(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(K_{(o)} + K_{(v)}(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau - 2\int_0^t \varepsilon'_{ij}(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(G_{(o)} + G_{(v)}(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau, \tag{27}$$

在(26), (27) 式中有:

$$e = \frac{1}{3}\varepsilon_{ii}, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}• \tag{28}$$

应变能密度 A, 其变分 δA, 以及应变能变分量 δU 分别如下,

$$A = \int_0^T \sigma_{ij}(t)\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij}(t), \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\delta A &= \int_0^T \sigma_{ij}(t)\delta\mathrm{d}\varepsilon_{ij}(t) = \\ &\int_0^T\left\{\mathrm{d}[\sigma_{ij}(t)\delta\varepsilon_{ij}(t)] - \mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}\sigma_{ij}(t)}{\mathrm{d}t}\delta\varepsilon_{ij}(t)\right\} = \\ &\sigma_{ij}(T)\delta\varepsilon_{ij}(T) - \int_0^T \mathrm{d}t\,\delta\varepsilon_{ij}(t)\frac{\mathrm{d}\sigma_{ij}(t)}{\mathrm{d}t},\end{aligned} \tag{30}$$

由于 $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ (31)

及高斯(Gauss)积分定理可得:

$$\delta U = \int \mathrm{d}v\,\mathrm{d}A = \int \mathrm{d}S\sigma_{ij}(T)n_j\,\delta u_i(T) - \int \mathrm{d}S\int_0^T \mathrm{d}t\,\frac{\partial\sigma_{ij}(t)}{\partial t}n_j\,\delta u_i(t) - \int \mathrm{d}v\,\sigma_{ij,j}(T)\delta u_i(T) + \int \mathrm{d}v\int_0^T \mathrm{d}t\,\delta u_i(t)\,\frac{\partial\sigma_{ij,j}(t)}{\partial t}, \tag{32}$$

v 及 S 分别示固体的体积和表面积· 外力功的变分为:

$$\delta W = \int \mathrm{d}v p_i(T)\delta u_i(T) - \int \mathrm{d}v\int_0^T \frac{\partial p_i(t)}{\partial t}\delta u_i(t)\mathrm{d}t + \int \mathrm{d}SP_i(T)\delta u_i(T) - \int \mathrm{d}S\int_0^T \frac{\partial P_i(t)}{\partial t}\delta u_i(t)\mathrm{d}t· \tag{33}$$

变分原理是:

$$\delta\Pi = \delta W - \delta U = 0· \tag{34}$$

以上原理同时可用于加载和卸载过程,加载和卸载的判别准则是:

$$\sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}\begin{cases} > 0 & (\text{加载}),\\ \leqslant 0 & (\text{卸载})·\end{cases} \tag{35}$$

5 讨 论

如前所述,C、K 的选择仅须符合热力学定律,所以有多样的选取方法,以满足实际问题需要· 今对弹塑性问题的实际应用作几点说明·

(1) 一般塑性力学需要假设有屈服面和屈服准则,在本文方法中并不需要,如岩土、混凝土从开始加荷时,就存在塑性变形,应用本文方法更为有利·

(2) 塑性力学中德罗克公设和伊留申公设不难从本文方法导出,这里不赘· 鹫津久一郎的《塑性论》中提出一种塑性应变_应力关系,写出如下:

$$\mathrm{d}\varepsilon^p_{ij} = \sigma'_{ij}\mathrm{d}\lambda, \tag{36}$$

λ 是应力不变量函数,由(36)式得:

$$\mathrm{d}\varepsilon^p_{ij} = \mathrm{d}(\lambda\sigma'_{ij}) - \lambda\sigma'_{ij}, \tag{37}$$

如果在上式右方的第二项远小于第一项,则(37)式可写为:

$$\mathrm{d}\varepsilon^p_{ij} = \mathrm{d}(\lambda\sigma'_{ij})· \tag{38}$$

在虚弹性理论中有:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_{ij} = \frac{1}{K}\sigma\delta_{ij} + \frac{\sigma'_{ij}}{2G}, \quad \sigma_{ij} = Ke\delta_{ij} + 2G\varepsilon'_{ij},\\ &\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad e = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),\\ \text{变能}\quad &\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon_{ij} - e\delta_{ij}·\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

对于塑性应变,(37)式第一式可改写为:

$$\varepsilon^p_{ij} = \frac{1}{K_p}\sigma\delta_{ij} + \frac{\sigma_{ij}}{2G_p}, \tag{40}$$

如令 $1/K_p = 0$, $1/2G_p = \lambda$, 代入(40)式得:

$$\varepsilon^p_{ij} = \lambda\delta'_{ij}, \quad \mathrm{d}\varepsilon^p_{ij} = \mathrm{d}(\lambda\sigma'_{ij}), \tag{41}$$

(41) 式与(38) 式相同•

(3) 对常见的工程现象有时难用一般力学进行解释• 例如土壤夯实是应力循环造成的永久应变, 地震沙土液化是应变循环造成的应力衰减• 在本文弹塑理论中, 各结构参量采用简单的常数, 即容易解释所述的现象• 见图 4, 图 5•

根据线性假定, 容易算出每次循环及 n 次循环的永久应变以及应力衰减值, 写出如下,

$$\Delta\varepsilon(\text{每次永久应变}) = (\sigma_2 - \sigma_1) C_p, \qquad (42a)$$

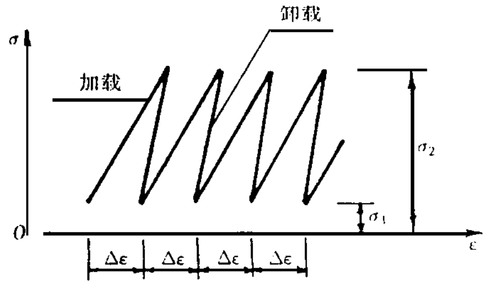


图 4 应力循环与永久应变

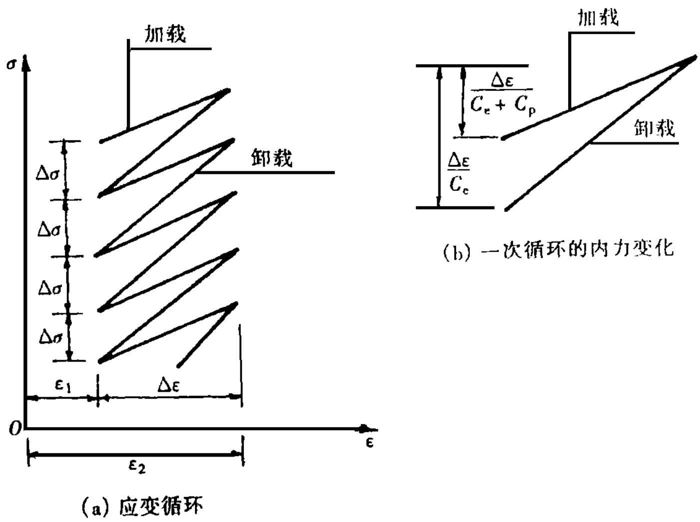


图 5 应变循环及应力衰减

$$\varepsilon(n\text{ 次永久应变}) = \sum_{j=1}^{n} \Delta\varepsilon(j) =$$

$$\Delta\varepsilon[1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}] = \Delta\varepsilon \frac{1 - r^n}{1 - r},$$

$$(r\text{ 为强化系数}) \qquad (42b)$$

$$\Delta\sigma(\text{每次应力衰减}) = \frac{C_p}{C_e(C_e + C_p)} \Delta\varepsilon, \qquad (43a)$$

$$\sigma(n\text{ 次应力衰减值}) = \Delta\sigma(1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1}) =$$

$$\Delta\sigma \frac{1 - r^n}{1 - r} \qquad (r\text{ 为强化系数}) \bullet \qquad (43b)$$

参 考 文 献

[1] 王竹溪. 统计物理学导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1955

[2] Washizu Kyuichiro, Variational Methods in Elasticity and Plusticity [M]. Pergumon Press Ltd, 1975

[3] Eringen A C, Suhubi E S. Elastodynamics Vol 1 [M]. New York and London: Advanced Press, 1974

[4] 龚晓南, 叶黔元, 徐日庆编著. 工程材料本构方程[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 1995

[5] 范镜泓等. 材料本构关系及其应用专辑[J], 重庆大学学报, 1985, **8**(6): 1~ 34

[6] 金问鲁. 预应力混凝土弹性_徐变状态统一计算理论[M]. 北京: 中国铁道出版社, 1990

The Unified Theory of Elastic_Viscosic_Plastic Theory of Solids

Jin Wenlu

Hangzhou Architectural and Civil Engineering Design Institute, Hangzhou 310001, P R China

Abstract: In this paper, unified elastic_viscosic_plastic theory which can compute the change of elastic, viscosic and plastic situation of each point in the body is suggested. The theory is based on the laws of thermodynamics and the pseudo elastic postulate. In the paper, the constitutive equations and variational principles are deduced. From which the finite element method of both space and time may be esily formulated. Note that, by choosing the material parameters properly, the plastic constitutive equations currently used may be given.

Key words: the first and second laws of thermodynamics; pseudo elastic postulate