

任意差分精细积分法及数值稳定性分析

强士中, 王孝国, 唐茂林, 刘 民

西南交通大学 桥梁与结构工程系, 成都 610031

(钟万勰推荐)

摘要: 本文在子域精细积分法的基础上, 提出解偏微分方程的任意差分精细积分法, 这种方法既具备子域精细积分法的各种优点, 还能较好描述非均匀介质的物理特性及灵活处理各类边界条件, 且其显式计算格式是无条件稳定的

关键词: 偏微分方程; 差分法; 数值稳定性

分类号: O241 82 **文献标识码:** A

引 言

在实际工程及其它学科中, 许多问题都可归结为求解偏微分方程问题, 如渗流、扩散、热传导、波传播等, 如何快速而有效地求解偏微分方程, 这对解决实际工程问题具有重大的现实意义

通常, 求解偏微分方程总是用有限元法、有限差分法等^[1, 2] 但当计算域较大时, 用有限元法求解, 因其空间坐标离散后未知数多, 势必导致计算机耗时量大; 而用有限差分法求解, 尽管能减少计算机存储量, 但差分法的固有缺陷会限制其应用范围, 因为差分法是从整体上考虑用一组差分方程来代替微分方程, 对于复杂的结构形式及边界条件难以处理 最近, 钟万勰院士提出了一种解偏微分方程的新方法——子域精细积分法^[3-6], 该方法属于半解析法, 具有数值精度高及带宽小的优点, 又是无条件稳定 但该方法在对空间坐标离散时, 仍采用了古典差分法, 使得该方法在处理各类边界条件时颇感吃力 本文在钟及文献[7]方法的基础上加以发展, 提出解偏微分方程的任意差分精细积分法 这种方法既保留了钟方法的各种优点, 又拓宽了它的应用范围, 适合在实际工程中推广

1 计算格式的构造

仍以扩散方程^[3]

$$u/t = D^2 u/x^2, \quad (1)$$

为例来叙述本文方法的原理及应用 首先对(1)式实施空间坐标离散, 在空间坐标上任一点 j 处, (1)式可写成

$$\frac{U}{t} = D_j \frac{u_j^2}{x^2} \quad (0 < j < J), \quad (2)$$

收稿日期: 1996_09_02; 修订日期: 1998_06_10

作者简介: 强士中(1941~), 男, 教授, 西南交通大学土木工程学院院长

其中 $j = 0, 1, 2, 3, \dots, J, J$ 是离散点数

把函数 $u(x, y, t)$ 在 j 点的邻域内用 Taylor 级数展开

$$u_i = u_j + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left[x_i - x_j \right]^k u_j + O(x^{m+1}), \quad \text{介质} \quad (3)$$

在(3)式中, $x_i = x_i - x_j, i = 1, 2, 3, \dots$, 表示 j 点邻域内的任意点 由于 i 是任意取, 便于处理非均匀介质及各类边界条件, 以及实现局部点加密

将(3)式移项, 并对 i 加权求和得

$$i(u_i - u_j) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left[x_i - x_j \right]^k u_j, \quad \text{及边} \quad (4)$$

在(4)式中, i 是加权系数, m 的取值可由所求问题的精度来确定, m 取得大, 其精度就高, 但计算过程也复杂了 在这里, 由于(2)式中对空间坐标的最高阶导数是 2, 所以(4)式中的 m 至少应取 2; 相应地, 当 $m = 2$ 时, (4) 式的右端括号内展开是 2 项, 所以 i , 即 j 点的邻点也应取 2 点 这样(4)式变为

$$\sum_{j=1}^2 i(u_i - u_j) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k!} \left[x_i - x_j \right]^k u_j \quad (5)$$

将(5)式右端展开, 并令其等于(2)式的右端, 则有

$$\sum_{i=1}^2 i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^2 i x_i^2 = 2D_j, \quad (6)$$

联解(6)式, 可得加权系数 i , 此时(2)式转化为对空间坐标的差分方程:

$$\frac{u_j}{t} = \sum_{i=1}^2 i(u_i - u_j), \quad (7)$$

移项得:

$$\frac{u_j}{t} + u_j \sum_{i=1}^2 i = \sum_{i=1}^2 i u_i, \quad (8)$$

类似还可得到其他各类边界条件的差分格式

(8)式是一阶非齐次常微分方程 现在引入近似, 认为(8)式的右端 $\sum_{i=1}^2 i u_i$ 在时间段 $(t_n,$

$t_{n+1})$ 内取其初值 $\sum_{i=1}^2 i u_i^n$, 其中上标 n 表示 $t = t_n = n \Delta t$ 时刻 于是(8)式在时间段 (t_n, t_{n+1}) 内积分, 得向前积分格式解

$$u_j^{n+1} = \left[u_j^n - \sum_{i=1}^2 i u_i^n \right] \Delta t + \sum_{i=1}^2 i u_i^n \Delta t, \quad (9)$$

其中 $\Delta t = \exp \left[- \sum_{i=1}^2 i \Delta t \right]$

(9)式的精度不高, 对时间而言只有 Δt 的一阶精度, 因而还需寻求更高精度的计算格式

采用推导(9)式相同的假设, (8)式在时间段 (t_{n-1}, t_{n+1}) 内积分, 可得蛙跳积分格式解

$$u_j^{n+1} = \left[u_j^{n-1} - \sum_{i=1}^2 i u_i^{n-1} \right] \Delta t^2 + \sum_{i=1}^2 i u_i^{n-1} \Delta t^2, \quad (10)$$

它是 Δt 的二阶精度, 只是具体计算时, 第一步要采用(9)式计算 如果还需寻求更高精度的计算格式, 可将(8)式的右端展成 t_n 处的 Taylor 级数, 只取到第三项, 则(8)式变为

$$\frac{u_j}{t} + u_j \sum_{i=1}^2 i = \sum_{i=1}^2 i u_i^n + \sum_{i=1}^2 i u_i^n (t - t_n) + \sum_{i=1}^2 i u_i^n (t - t_n)^2 / 2, \quad (11)$$

再利用(7)式得:

$$\left. \begin{aligned} u_j^n &= \sum_{i=1}^2 i(u_i^n - u_j^n) \\ u_j^n &= \sum_{i=1}^2 i(u_i^n - u_j^n) \end{aligned} \right\} u \tag{12}$$

(11)式在 t_n 至 t_{n+1} 间积分得其解:

$$u_j^{n+1} = \left[u_j^n - \sum_{i=1}^2 i u_i^n \right] + \sum_{i=1}^2 i u_i^n + \left[\sum_{i=1}^2 i u_i^n \right] \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\alpha - 1 + \dots) \right] t^2, \tag{13}$$

其中 $\dots = t \sum_{i=1}^2 i$, (13) 式是 t 的三阶精度

(9)、(10)、(13)式就是本文所给出的三种计算格式 当 $x_1 = |x_i - x_j|$ 满足时, 这三式分别退化为文献[3]中的单点子域精细积分格式、单点子域精细积分蛙跳格式及三阶精度的单点子域精细积分格式 下面给出(9)、(10)、(13)式的数值稳定性分析

2 数值稳定性分析

采用 Von Neumann 法^[2]来分析(9)、(10)式的稳定性 注意到齐次线性差分方程的误差传播方程和原方程的形式一样, 及 j 点的邻点取在 j 点的两边, 将误差傅氏级数的一个分量表示为:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{G}^n &= V^n e^{ikx_j}, \\ \mathcal{G}^{n-1} &= V^{n-1} e^{ikx_j}, \\ \mathcal{G}_{-1}^n &= V^n e^{ik(x_j^- - x_1)}, \\ \mathcal{G}_{+1}^n &= V^n e^{ik(x_j^+ - x_2)} \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

其中, 这里 $i = \sqrt{-1}$, $x_1 = x_{j-1} - x_j$, $x_2 = x_{j+1} - x_j$, k 为任一波数, V^n 为 n 层处的振幅函数

对于(9)式, 将(14)式代入得

$$V^{n+1} e^{ikx_j} = V^n e^{ikx_j} - \frac{1 V^n e^{ik(x_j^- - x_1)} + 2 V^n e^{ik(x_j^+ - x_2)}}{1 + 2} + \frac{1 V^n e^{ik(x_j^- - x_1)} + 2 V^n e^{ik(x_j^+ - x_2)}}{1 + 2},$$

两边消去公因子 e^{ikx_j} , 并整理得

$$V^{n+1} = V^n \left\{ \left[1 - \frac{1 e^{ik x_1} + 2 e^{ix x_2}}{1 + 2} + \frac{1 e^{-ik x_1} + 2 e^{ik x_2}}{1 + 2} \right] \right\}, \tag{15}$$

从(15)式中得到误差传播放大因子

$$G = \dots + \frac{1 \cos(k x_1) + 2 \cos(k x_2)}{1 + 2} (1 - \dots) + i \frac{2 \sin(k x_2) - 1 \sin(k x_1)}{1 + 2} (1 - \dots), \tag{16}$$

对(16)式取绝对值的平方得

$$|G|^2 = \dots + \frac{2 + \frac{2}{1 + 2} + 2 \frac{1}{(1 + 2)^2} 2 \cos(\dots)}{\dots} (1 - \dots)^2 + \frac{1 \cos(k x_1) + 2 \cos(k x_2)}{(1 + 2)^2}$$

$$2(1-\alpha)^2 + (1-\beta)^2 + 2(1-\gamma) = 1,$$

即 $|G| < 1$, 由此知(9) 式是无条件稳定

对于(10) 式, 将(14) 式代入得

$$V^{n+1} e^{ik_j} = \left[(V^{n-1} e^{ik_j} - \frac{1}{1+\alpha} V^n e^{ik(x_j - x_1)} + \frac{2}{1+\beta} V^n e^{ik(x_j + x_2)}) \right]^2,$$

两边约去公因子 e^{ik_j} 得

$$V^{n+1} = \frac{2}{1+\alpha} V^{n-1} + \frac{1e^{-ikx_1} + 2e^{ikx_2}}{1+\beta} (1-\alpha) V^n = \frac{2}{1+\alpha} V^{n-1} + (1-\alpha) V^n, \tag{17}$$

其中

$$= \frac{1e^{-ikx_1} + 2e^{ikx_2}}{1+\beta} = \frac{1\cos(kx_1) + 2\cos(kx_2)}{1+\beta} + i \frac{2\sin(kx_2) + 1\sin(kx_1)}{1+\beta}, \tag{18}$$

对(18) 式取绝对值的平方得

$$| |^2 = \frac{1^2 + 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2\cos(x_1 + x_2)}{(1+\beta)^2} < 1, \tag{19}$$

即

$$| | < 1$$

由于(17) 式是三层格式, V^{n+1} 与 V^n, V^{n-1} 有关, 不能直接得到误差传播的放大因子 令

$$V^n = 1 \quad V^{n+1} = 0 \quad V^{n-1}, \tag{20}$$

将(20) 式与(17) 式合并写成

$$\begin{bmatrix} V^{n+1} \\ V^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & 2 \\ j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^n \\ V^{n-1} \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} V^n \\ V^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{罐} \tag{21}$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} (1-\alpha) & 2 \\ i & 1 \end{bmatrix},$$

是放大因子, 它现在不是一个简单的数, 而是一个矩阵 求它的特征值 , 即

$$\begin{vmatrix} (1-\alpha) - \lambda & 2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{22}$$

由行列式(22) 式展开得

$$\lambda^2 - (1-\alpha)\lambda - 2 = 0, \tag{23}$$

令(23) 式的两个根是 λ_1, λ_2 则有关系式

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1-\alpha, \quad \lambda_1 \lambda_2 = -2 \quad (0 < \alpha < 1; | \lambda_1 | < 1), \tag{24}$$

因 λ_2 是复数, 故 λ_1, λ_1 也应是复数, 设

$$\lambda_1 = \rho e^{i\theta}, \quad \lambda_2 = -\frac{2}{\rho} e^{-i\theta} \quad (\rho > 0; \theta > 0) \tag{25}$$

将(25) 式代入(24) 式得

$$\left. \begin{aligned} \rho + \frac{2}{\rho} &= 1-\alpha, \\ (1-\alpha)\cos\theta + i(1+\alpha)\sin\theta &= (1-\alpha), \end{aligned} \right\} \tag{26}$$

将(26) 式中的第二式取绝对值的平方得

$$|1 + \frac{\Delta t^2}{2} - 2 \cos \theta| = |1 - \Delta t^2| \quad (27)$$

把(26)式中的第一式代入到(27)式得

$$(1 + \frac{\Delta t^2}{2})^2 = |1 - \Delta t^2|^2 + 2 \Delta t^2 (1 + \cos \theta) \quad (1 - \Delta t^2)^2 + \Delta t^4 = (1 + \frac{\Delta t^2}{2})^2,$$

即 $|1 + \frac{\Delta t^2}{2}| = |1 + \Delta t^2|$ (28)

由(28)式与(26)式中的第一式知

$$(i - \Delta t^2) (i - 1) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (29)$$

这表明 $\Delta t^2 \leq i - 1$, 由此得出 $|\Delta t| \leq 1$, 进而得到 $|G| \leq 1$, 故积分蛙跳格式(10)式也是无条件稳定

至于计算格式(13)式, 它是条件稳定, 当 $\Delta t > 1$ 时, 它会出现不稳定现象. 其原因用 Taylor 级数来近似(8)式右端引起的, 参照文献[3], 可引入一参数 r 来限制 Δt 的影响:

$$r = 1.5 / (1 + \Delta t^2 / 2) \quad \text{当 } \Delta t > 1 \text{ 时, 否则 } r = 1,$$

则(13)式修改为:

$$u_j^{n+1} = \left(u_j^n - \sum_{i=1}^2 \Delta t^2 u_i^n \right) + \sum_{i=1}^2 \Delta t^2 u_i^n + \left(\sum_{i=1}^2 \Delta t^2 u_i^n \right) \left[1 - \frac{1}{2} (1 - r \Delta t^2) \right] (r \Delta t^2) + \left(\sum_{i=1}^2 \Delta t^2 u_i^n \right) \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - r \Delta t^2) \right] (r \Delta t^2)^2, \quad (30)$$

(30)式将给出稳定的结果

值得指出的是, 当 j 点的邻点取在 j 点的同一边时, 计算格式(9)、(10)、(30)式仍给出稳定结果, 这对处理各类边界问题及复杂结构形式很重要, 证明略。

3 数值算例及结论

采用文献[5]中的算例, 扩散方程是

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (31)$$

其区域是 $0 \leq x \leq 2, t \geq 0$, 初边值条件是

$$u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, \quad \left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \begin{cases} 10x & (0 \leq x < 1), \\ (2-x) \cdot 10 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

下面分两种情况计算(31)式:

1.1 等分 $\Delta x = 0.11m$, 时间步长 Δt 可以变化, 借以考察计算格式对时间步长 Δt 的敏感程度. 此时(9)、(10)式已退化为文献[4]中的单点子域精细积分格式及蛙跳积分格式, 已有数值结果及讨论. 这里采用(30)式计算, 其数值结果列于表1.

2.1 取非等长值. 其节点坐标分别为:

$$x = 0.10; 0.11; 0.12; 0.14; 0.16; 0.18; 0.19; 1.10; 1.11; 1.12; 1.14; 1.16; 1.18; 1.19; 2.10 \#$$

采用蛙跳格式(10)式计算(31)式, 其中第一步要用向前积分格式(9)式计算. 计算结果列于表2.

表 1 高精度计算格式计算结果($t = 0.5$ s)

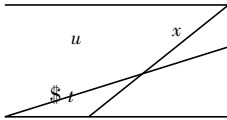
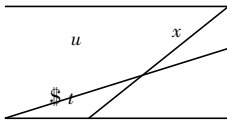
	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.02	11 575 262	31004 473	41194 916	41890 824	51147 813
0.01	11 037 126	11972 920	21715 813	31192 936	31357 375
0.007	01 907 912	11727 011	21377 130	21794 518	21938 435
0.005	01 732 777	11393 835	11918 466	21255 308	21371 378
0.0025	01 732 777	11393 827	11918 455	21255 296	21371 365
精确解 ^[5]	01732 77	11393 83	11911 845	21255 29	21371 36

表 2 蛙跳格式变空间步长的计算结果($t = 0.5$ s)

	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
0.01	11 082 304	21047 499	21914 363	31497 082	31756 602
0.008	01 992 427	11882 508	21659 859	31176 228	31395 094
0.006	01 889 154	11714 348	21370 889	21854 576	31034 402
0.005	01 848 890	11617 509	21257 810	21675 886	21836 517
0.004	01 808 392	11553 098	21145 030	21553 867	21700 058
0.0025	01 766 531	11465 255	21028 052	21391 577	21520 190
0.001	01 739 861	11415 794	11954 078	21300 575	21419 479
0.0005	01 735 454	11407 588	11941 933	21285 720	21413 139
0.00025	01 734 124	11405 099	11938 294	21281 297	21398 309
精确解 ^[5]	01732 77	11393 83	11918 45	21255 29	21371 36

从表 1 中看出,在古典差分的稳定性界限 $\Delta t \leq \Delta x^2/2 = 0.0005$ s 内,利用本文高精度计算格式(30)式得出的结果已达到精确解,且当 $\Delta t = 0.0005$ s 时,在 IBM/486 微机上所用的 CPU 时间约为 4s。然而随着时间步长 Δt 超过古典差分的稳定性界限 0.0005 s 后,尽管还能得到稳定的结果,但误差太大,已失去使用价值。

在表 2 中注意到,即便是空间坐标非等距离散,随着时间步长 Δt 的变化,利用本文蛙跳格式计算出的结果变化很平稳,无古典差分格式的跳动性及不稳定性,且随着时间步长 Δt 的减小而收敛于精确解。当 $\Delta t = 0.00025$ s 时其计算结果已接近精确解,在 IBM/486 微机上所用的 CPU 时间约为 7s。显然,本文提供的蛙跳格式计算出的结果收敛较慢,如何加快收敛速度还需进一步研究。

本文尽管只讨论了一维扩散方程,但其方法很容易推广到三维问题及求解波动方程或其它动力方程中去。同时,由于本文讨论的计算格式属于无条件稳定,同样适宜处理变系数偏微分方程。

参 考 文 献

- [1] Batge K J, Wilson E L. Numerical Methods in Finite Element Analysis[M]. Engelwood Chiff, NJ: Prentice_Hall, 1976
- [2] Lapidus L, Pinder G F. Numerical Solution of Partial Differential Equations in Science and Engineering[M]. John Wiley & Sons, 1982
- [3] 钟万勰, 朱建平. 对差分法时程积分的反思[J]. 应用数学和力学, 1995, 16(8): 663~ 668
- [4] 钟万勰. 单点子域积分与差分[J]. 力学学报, 1996, 28(2): 159~ 163
- [5] 钟万勰. 子域精细积分及偏微分方程的数值解[J]. 计算结构力学及其应用, 1995, 12(3): 253~ 260
- [6] 蔡志勤, 钟万勰. 子域精细积分的稳定性分析[J]. 水动力学研究与进展 A 辑, 1995, 10(6): 588~ 593
- [7] 李光耀, 周汉斌. 变厚度薄板弯曲问题的任意网格差分法[J]. 应用数学和力学, 1993, 14(3): 281~ 286

O n t h e A r b i t r a r y D i f f e r e n c e P r e c i s e I n t e g r a t i o n
M e t h o d a n d I t s N u m e r i c a l S t a b i l i t y

Qiang Shizhong, Wang Xiaoguo, Tang Maolin, Liu Min
Department of Bridge and Structural Engineering, Southwest Jiaotong University,
Chengdu 610031, P R China

Abstract: Based on the subdomain precise integration method, the arbitrary difference precise integration method (ADPIM) is presented to solve PDEs. While retaining all the merits of the former method, ADPIM further demonstrates advantages such as the abilities of better description of physical properties of inhomogeneous media and convenient treatment of various boundary conditions. The explicit integration schemes derived by ADPIM are proved unconditionally stable.

Key words: partial differential equations; difference method; numerical stability