应用数学和力学, 第 20 卷 第 3 期(1999 年 3 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

论文编号: 1000_0887(1999)03_0269_76

Banach 空间中含强增生算子的非线性方程的迭代解*

周海云

军械工程学院基础部, 石家庄 050003

(张石生推荐)

摘要: 设 X 为实 Banach 空间, X^* 为其一致凸的共轭空间• 设 $T: X \to X$ 为 Lipschitzian 强增生映象, $L \geqslant 1$ 为其 Lipschitzian 常数, $k \in (0, 1)$ 为其强增生常数• 设 $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 为 $[0, 1]$ 中的两个实数列满足:

(i) $\alpha_n \to 0 (n \to \infty)$;

(ii) $\beta_n < \dfrac{k(1-k)}{L(1+L)} \quad (\forall n \geqslant 0)$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$•

假设 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 X 中两序列满足: $\| u_n \| = o(\alpha_n)$ 与 $v_n \to 0 \quad (n \to \infty)$•

任取 $x_0 \in X$, 则由

$$(\mathrm{IS}) \begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S y_n + u_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n S x_n + v_n \quad (n \geqslant 0) \end{cases} \qquad (1)$$

所定义的迭代序列 $\{x_n\}$ 强收敛于方程 $Tx = f$ 的唯一解•

一个相关结果处理 φ_半压缩映象的不动点的迭代逼近•

关键词: 带误差的 Ishikawa 迭代; 强增生映象; φ_半压缩映象

分类号: O177.91 **文献标识码:** A

1 引言与预备知识

设 X 为实 Banach 空间, X^* 为其共轭空间, $\|\cdot\|$ 为其中向量的范数• 正规对偶映象 $J: X \to 2^{X^*}$ 定义为

$$Jx = \{x^* \in X^* \mid \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\},$$

其中, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示广义共轭对• 熟知, 若 X^* 为严格凸的, 则 J 为单值的且 $\forall t \geqslant 0$, $x \in X$, 有 $J(tx) = tJx$• 若 X^* 为一致凸的, 则 J 在 X 的任何有界子集上是一致连续的 (参见 Brawder[1], Barbu[2])•

以 $D(T)$, $R(T)$ 分别表示算子 T 的定义域和值域•

* 收到日期: 1997_04_28; 修订日期: 1998_04_05
作者简介: 周海云(1958~), 男, 副教授, 已在国内外重要杂志上发表论文 38 篇

$T: X \supset D(T) \rightarrow X$ 称为增生的, 如果对每 $x, y \in D(T)$, 相应地存在 $j \in J(x-y)$, 使得

$$\langle Tx - Ty, j \rangle \geqslant 0. \tag{1}$$

增生算子的概念于 1967 年由 Browder[1] 和 Kato[3] 独立引入. 在增生算子理论中一个基本结果归功于 Browder, 他证明了初值问题

$$\frac{du}{dt} + Tu = 0, \quad u(0) = u_0, \tag{2}$$

当 T 为局部 Lipschitzian 和增生算子时是可解的. 增生算子 T 称为强增生的, 如果不等式(1) 右端被 $k\|x-y\|^2$ 所代替. 不失一般性, 我们假定 $k \in (0, 1)$. 这些算子已为许多作者所研究(参见[2～6, 7, 8, 9]). Deimling 的[4, 定理 3.1] 证明了若 X^* 为一致凸的, $T: X \rightarrow X$ 为次连续和强增生的, 则 $R(T) = X$. 因此, $\forall f \in X$, 方程 $Tx = f$ 在 X 中至少有一个解.

最近, Chidume 的[5, 定理 2] 证明了下述结果:

定理 C　设 E 为实 Banach 空间, E^* 为其一致凸的对偶空间. 假设 $T: E \rightarrow E$ 为 Lipschitzian 强增生映象满足 $(I-T)$ 的值域为有界集. 对给定的 $f \in E$, 定义 $S: E \rightarrow E$, $Sx = f - Tx + x$, $\forall x \in E$. 设 $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为实数列满足:

(i)　$0 \leqslant \lambda_n \leqslant \beta_n < 1 \ (\forall n \geqslant 0)$;

(ii)　$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$;

(iii)　$\lim_{n \to \infty} \beta_n = 0$;

(iv)　$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n b(\lambda_n) < \infty$.

对任意 $x_0 \in E$, 定义序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset E$ 如下:

$$\begin{cases} x_0 \in E, \\ x_{n+1} = (1-\lambda_n) x_n + \lambda_n S y_n, \\ y_n = (1-\beta_n) x_n + \beta_n S x_n \ (n \geqslant 0), \end{cases}$$

则 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 强收敛于方程 $Tx = f$ 的唯一解.

一个问题自然出现: 如果不假设 $(I-T)$ 的值域为有界集, 那末定理 C 还正确吗?

本文的主要目的是要解决这个问题. 为此目的, 我们需要下述已知结果.

引理 1.1[10]　设 X^* 为严格凸的, 则 $\forall x, y \in X$,

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, J(x+y) \rangle.$$

引理 1.2[10]　设 $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为非负实数列满足 $\rho_{n+1} \leqslant (1-\lambda_n)\rho_n + o(\lambda_n)$, 其中 $\lambda_n \in [0, 1]$, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n = \infty$. 则 $\rho_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$.

2　主 要 结 果

定理 2.1　设 X 为实 Banach 空间, X^* 为其一致凸的对偶空间. 假设 $T: X \rightarrow X$ 为 Lipschitz 强增生映象, 设 $L \geqslant 1$ 为其 Lipschitz 常数, $k \in (0, 1)$ 为其强增生常数. 对给定的 $f \in X$, 定义 $S: X \rightarrow X$, $Sx = f - Tx + x$, $\forall x \in X$. 设 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为实数列满足:

(i)　$\alpha_n \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$;

(ii) $\beta_n < \dfrac{k(1-k)}{L(1+L)} \quad (\forall n \geqslant 0)$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

假设$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$和$\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$为X中两序列满足: $\|u_n\| = o(\alpha_n), v_n \to 0 \quad (n \to \infty)$.

对任意$x_0 \in X$, 定义序列$\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset X$如下: 如 果

$$(\mathrm{IS})_1 \begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S y_n + u_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n S x_n + v_n \quad (n \geqslant 0), \end{cases}$$

则$\{x_n\}$强收敛于方程$Tx = f$的唯一解.

证 依 Deimling 的[4, 定理 13.1], 方程$Tx = f$有唯一解. 设q为其解, 则q为S的唯一不动点.

因T为强增生的, 故有$k \in (0,1)$使得$\forall x, y \in X$,

$$\langle Tx - Ty, J(x-y)\rangle \geqslant k\|x-y\|^2, \tag{3}$$

而且

$$\langle Sx - Sy, J(x-y)\rangle \leqslant (1-k)\|x-y\|^2. \tag{4}$$

使用引理 1.1 与$(\mathrm{IS})_1$得

$$\begin{aligned} \|x_{n+1}-q\|^2 = {} & \|(1-\alpha_n)(x_n-q) + \alpha_n(Sy_n - Sq) + u_n\|^2 \leqslant \\ & \|(1-\alpha_n)(x_n-q) + \alpha_n(Sy_n - Sq)\|^2 + 2\langle u_n, J(x_{n+1}-q)\rangle \leqslant \\ & \|(1-\alpha_n)(x_n-q) + \alpha_n(Sy_n - Sq)\|^2 + 2\|u_n\|\,\|x_{n+1}-q\| \leqslant \\ & \|(1-\alpha_n)(x_n-q) + \alpha_n(Sy_n - Sq)\|^2 + \|u_n\| + \\ & \|u_n\|\,\|x_{n+1}-q\|^2. \end{aligned} \tag{5}$$

移项得

$$(1-\|u_n\|)\|x_{n+1}-q\|^2 \leqslant \|(1-\alpha_n)(x_n-q) + \alpha_n(Sy_n - Sq)\|^2 + \|u_n\|, \tag{6}$$

再次使用引理 1.1 和$(\mathrm{IS})_1$得

$$\begin{aligned} & \|(1-\alpha_n)(x_n-q) + \alpha_n(Sy_n - Sq)\|^2 \leqslant \\ & (1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2 + 2\alpha_n\langle Sy_n - Sq, J((1-\alpha_n)(x_n-q) + \alpha_n(Sy_n-Sq))\rangle \leqslant \\ & (1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2 + 2\alpha_n(1+L)b_n((\beta_n L+1)\|x_n-q\| + \|v_n\|)(1+ \\ & \|x_n-q\|) + 2\alpha_n(1-\alpha_n)(1-k)\|x_n-q\|^2 + 2\alpha_n(1-\alpha_n)(1+L)(L\beta_n\|x_n- \\ & q\| + \|v_n\|)\|x_n-q\| \leqslant ((1-\alpha_n)2 + 2\alpha_n(1-\alpha_n)(1-k))\|x_n-q\|^2 + \\ & 2(1+L)\alpha_n b_n(\beta_n L+1)\|x_n-q\|^2 + 2\alpha_n(1+L)b_n(\beta_n L+1)(1+\|x_n-q\|^2) + \\ & 2\alpha_n(1-\alpha_n)(1+L)L\beta_n\|x_n-q\|^2 + \\ & 2\alpha_n(1-\alpha_n)(1+L)\|v_n\|(1+\|x_n-q\|^2) + 2(1+L)\alpha_n b_n\|v_n\| \leqslant \\ & ((1-\alpha_n)^2 + 2\alpha_n(1-\alpha_n)(1-k) + 2(1+L)\alpha_n b_n(\beta_n L+1) + \\ & 2\alpha_n(1+L)b_n(\beta_n L+1) + 2\alpha_n(1-\alpha_n)(1+L)L\beta_n + \\ & 2\alpha_n(1-\alpha_n)(1+L)\|v_n\|)\|x_n-q\|^2 + \\ & 2\alpha_n(1-\alpha_n)(1+L)\|v_n\| + 2\alpha_n(1+L)n_n(\beta_n L+1) + 4\alpha_n(1+L)b_n\|v_n\| \leqslant \\ & ((1-\alpha_n)^2 + 2\alpha_n(1-\alpha_n)(1-k^2) + 4\alpha_n(1+L)b_n(\beta_n L+1) + \\ & 2\alpha_n(1-\alpha_n)(1+L)\|v_n\|)\|x_n-q\|^2 + r_n, \end{aligned} \tag{7}$$

其中, $b_n = \left\| \dfrac{J((1-\alpha_n)(x_n-q) + \alpha_n(Sy_n - Sq)) - J((1-\alpha_n)(x_n-q))}{1+\|x_n-q\|} \right\|$

$r_n = 2\alpha_n(1+L)(b_n(\beta_n L+1)+2b_n\|v_n\|+(1-\alpha_n)\|v_n\|)$•

现证 $b_n \to 0(n\to\infty)$• 事实上, 因 X^* 为一致凸的, 故 J 在 X 的任何有界集上是一致连续的• 注意到

$$\left\|\frac{\alpha_n(Sy_n-Sq)}{1+\|x_n-q\|}\right\| \leqslant \alpha_n(1+L)((\beta_n L+1)+\|v_n\|)\to 0$$

$(n\to\infty)$, 立知 $b_n\to 0(n\to\infty)$• 于是有 $r_n = o(\alpha_n)$•

选取自然数 $N \geqslant 1$ 使得当 $n\geqslant N$ 时,

理 $$(1+L)\left(\frac{2b_n}{1-\alpha_n}(\beta_n L\text{定}+1)+\|v_n\|\right)< k^2(1-k^2), \tag{8}$$

将(8)代入(7), (7)代入(6)得

$$(1-\|u_n\|)\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant(1-k^4\alpha_n)\|x_n-q\|^2+o(\alpha_n), \tag{9}$$

以 $(1-\|u_n\|)$ 除以(9)式两端得

$$\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant\frac{1-k^4\alpha_n}{1-\|u_n\|}\|x_n-q\|^2+o(\alpha_n)• \tag{10}$$

由假设 $\|u_n\|=o(\alpha_n)$ 知, 存在 $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$ 使得 $\|u_n\|=\varepsilon_n\alpha_n$, 从而

$$\frac{1-k^4\alpha_n}{1-\|u_n\|}=\frac{1-k^4\alpha_n}{1-\varepsilon_n\alpha_n}=1-\frac{k^4-\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n\alpha_n}\alpha_n,$$

因 $\dfrac{k^4-\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n\alpha_n}\to k^4(n\to\infty)$, 故对于固定的 $k_1\in(0,k)$, 存在自然数 $N_1\geqslant 1$ 使得当 $n\geqslant N_1$ 时, $\dfrac{k^4-\varepsilon_n}{1-\varepsilon_n\alpha_n}\geqslant k_1^4$• 因此, 当 n 充分大时有

$$\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant(1-k_1^4\alpha_n)\|x_n-q\|^2+o(\alpha_n)• \tag{11}$$

令 $\rho_n=\|x_n-q\|^2$, $\lambda_n=k_1^4\alpha_n$• 则(11)式给出

$$\rho_n\leqslant(1-\lambda_n)\rho_n+o(\lambda_n), \tag{12}$$

由引理1.2知, $\rho_n\to 0(n\to\infty)$• 即 $x_n\to q(n\to\infty)$• 定理2.1证完•

注1 即使 $u_n\equiv v_n\equiv 0$, 定理2.1也是一个新结果• 它改进和扩展了Chidume的[5, 定理2], Deng和Ding的[6, 定理2]•

注2 若误差满足条件: $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\|v_n\|<\infty$, 则我们可用其它方法证明定理2.1结论仍成立•

注3 当 X 为任意Banach空间时定理2.1结论仍成立•

注4 若不假设 T 为Lipschitzian映象, 我们不知道定理2.1是否成立•

下一个结果处理 φ_半压缩映象的不动点的迭代逼近•

令 $F(T)=\{x\in D(T); Tx=x\}$•(T 称为 φ_半压缩的如果 $F(T)\neq\Phi$• 且存在一个严格增加函数 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 满足 $\varphi(0)=0$ 使得

$$\langle Tx-Ty, j(x-y)\rangle\leqslant\|x-y\|^2-\varphi(\|x-y\|)\|x-y\|, \tag{13}$$

$\forall x\in D(T)$ 但 $y\in F(T)$ 成立• 这类映象正为不同的作者深入研究(如, 参见[11, 12, 13])•

定理2.2 设 X 为实光滑Banach空间, $K\subset X$ 为非空凸子集, $T:K\to K$ 为一致连续 φ_半压缩映象• 设 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为两个实数列满足:

(i) $0<\alpha_n,\beta_n<1,\ \forall n\geqslant 0$;

(ii) $\alpha_n\to 0,\ \beta_n\to 0\ (n\to\infty)$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$.

定义 Ishikawa 迭代序列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 如下:

$$(\mathrm{IS})_2\begin{cases}x_0\in K,\\ x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Ty_n,\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Tx_n\ (n\geqslant 0),\end{cases}$$

假设 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是有界的, 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 T 的唯一不动点.

证　由不等式(13) 知, $F(T)$ 必为单点集. 设 x^* 为 T 的唯一不动点.

因 $T:K\to K$ 为一致连续的, 故 T 为有界的. 依假设 $\{x_n\}$ 为有界的, 故 $\{Tx_n\}$ 为有界的, 由 $(\mathrm{IS})_2$ 知, $\{y_n\}$ 也是有界的, 从而 $\{Ty_n\}$ 也是有界的.

令 $M=\sup_{n\geqslant 0}\{\|x_n-x^*\|;\ n\geqslant 0\}$.

由引理 1.1 与 $(\mathrm{IS})_2$ 得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2&=\|(1-\alpha_n)(x_n-x^*)+\alpha_n(Ty_n-Tx^*)\|^2\leqslant\\ &(1-\alpha_n)^2\|x_n-x^*\|^2+2\alpha_n\langle Ty_n-Tx^*,J(x_{n+1}-x^*)\rangle,\end{aligned}\tag{14}$$

注意到

$$\begin{aligned}&\langle Ty_n-Tx^*,J(x_{n+1}-x^*)\rangle=\\ &\quad\langle Ty_n-Tx_{n+1},J(x_{n+1}-x^*)\rangle+\langle Tx_{n+1}-Tx^*,J(x_{n+1}-x^*)\rangle\leqslant\\ &\quad\|Ty_n-Tx_{n+1}\|\,\|x_{n+1}-x^*\|+\|x_{n+1}-x^*\|^2-\\ &\quad\varphi(\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x^*\|\leqslant\\ &\quad M\|Ty_n-Tx_{n+1}\|+\|x_{n+1}-x^*\|^2-\varphi(\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x^*\|=\\ &\quad a_n+\|x_{n+1}-x^*\|^2-\varphi(\|x_{n+1}-x^*\|)\|x_{n+1}-x^*\|,\end{aligned}\tag{15}$$

其中, $a_n=M\|Ty_n-Tx_{n+1}\|\to 0(n\to\infty)$. 事实上, 因 $y_n-x_{n+1}=\alpha_n x_n-\beta_n x_n+\beta_n Tx_n-\alpha_n Ty_n\to 0(n\to\infty)$ 而 $T:K\to K$ 为一致连续的, 故 $Ty_n-Tx_{n+1}\to 0(n\to\infty)$, 因此 $a_n\to 0(n\to\infty)$.

将(15) 代入(14) 并移项得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant&\frac{(1-\alpha_n)^2}{1-2\alpha_n}\|x_n-x^*\|^2-\frac{2\alpha_n}{1-2\alpha_n}\varphi(\|x_{n+1}-\\ &x^*\|)\|x_{n+1}-x^*\|+o(\alpha_n).\end{aligned}\tag{16}$$

我们现在考虑两种可能情形.

情形 1　存在 $n\geqslant 0$ 使得 $x_{n+1}=x^*$.

此时反复使用 $(\mathrm{IS})_2$ 知 $x_{n+m}=x^*\ (\forall m\geqslant 1)$. 这表明 $x_n\to x^*\ (n\to\infty)$.

情形 2　$\forall n\geqslant 0,\ \|x_{n+1}-x^*\|>0$.

再考虑两种可能情形.

情形 2.1　$\inf_{n\geqslant 0}\dfrac{\varphi(\|x_{n+1}-x^*\|)}{\|x_{n+1}-x^*\|}=\sigma>0$.

不失一般性, 假设 $\sigma\in(0,1)$.

由(16)得对充分大的 $n\geqslant 0$,

$$\|x_{n+1}-x^*\|^2\leqslant\frac{1-2\alpha_n+\alpha_n^2}{1-2\alpha_n(1-\sigma)}\|x_n-x^*\|^2+o(\alpha_n)\leqslant$$
$$(1-\sigma\alpha_n)\|x_n-x^*\|^2+o(\alpha_n),\tag{17}$$

令 $\rho_n=\|x_n-x^*\|^2$, $\lambda_n=\sigma\alpha_n$, 则(17)给出

$$\rho_{n+1}\leqslant(1-\lambda_n)\rho_n+o(\lambda_n),$$

其中 $\lambda_n\in(0,1)$, $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n=\infty$, 由引理 1.2 知, $\rho_n\to 0(n\to\infty)$, 即 $x_n\to x^*(n\to\infty)$•

情形 2.2 $\inf\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{\varphi(\|x_{n+1}-x^*\|)}{\|x_{n+1}-x^*\|}=0$•

因 $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 为严格增加的, 故存在某子列$\{x_{n_j+1}\}$强收敛于 $x^*(j\to\infty)$•

我们要证明 $x_n\to x^*(n\to\infty)$•

因 $x_{n_j+1}\to x^*(j\to\infty)$, $\alpha_n\to 0$, $a_n\to 0(n\to\infty)$, 故 $\forall\varepsilon>0$, 存在固定的 $j\geqslant 1$ 使得 $\forall n\geqslant n_j$,

$$\|x_{n_j+1}-x^*\|<\varepsilon,\ \alpha_n<\frac{\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{2M},\ a_n<\frac{\varepsilon\varphi(\varepsilon)}{2},\tag{18}$$

为证 $x_n\to x^*(n\to\infty)$, 只需证明

$$\|x_{n_j+m}-x^*\|\leqslant\varepsilon,\ \forall m\geqslant 1$$

先证 $\|x_{n_j+2}-x^*\|\leqslant\varepsilon$• 若否, 假设

$$\|x_{n_j+2}-x^*\|>\varepsilon, \text{则}$$

$$\varphi(\|x_{n_j+2}-x^*\|)>\varphi(\varepsilon)\tag{19}$$

使用(16),(18)和(19)式有

$$\|x_{n_j+2}-x^*\|^2\leqslant\left(1+\frac{\alpha_{n_j+1}^2}{1-2\alpha_{n_j+1}}\right)\|x_{n_j+1}-x^*\|^2-\frac{2\alpha_{n_j+1}}{1-2\alpha_{n_j+1}}(\varphi(\varepsilon)\varepsilon-a_{n_j+1})\leqslant$$
$$\|x_{n_j+1}-x^*\|-\frac{\alpha_{n_j+1}}{1-2\alpha_{n_j+1}}[2\varphi(\varepsilon)\varepsilon-\alpha_{n_j+1}M-2a_{n_j+1}]\leqslant$$
$$\|x_{n_j+1}-x^*\|^2,$$

这推出 $\|x_{n_j+2}-x^*\|\leqslant\|x_{n_j+1}-x^*\|<\varepsilon$, 矛盾• 用同样方式可证 $\forall m\geqslant 1$, $\|x_{n_j+m}-x^*\|\leqslant\varepsilon$• 定理 2.2 证完•

注 5 因 q_一致光滑 Banach 空间为光滑 Banach 空间, Lipschitzian 算子为一致连续算子, 而在 Osilike[13] 的假设下, 易证$\{x_n\}$是有界的, 因而由定理 2.2 可推出 Osilike 之[13] 的定理 2• 由于强伪压缩映象必为 φ_半压缩映象, 由定理 2.2 可推出 Chidume 之[14] 的定理 4, 13•

注 6 最近, 我们已证明定理 2.2 在更一般的赋范线性空间成立•

致谢 作者向审稿人表示真诚的感谢!

参 考 文 献

[1] Browder F E. Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces, [J]. Proc Sympos Fure Math, 1976, **18**

[2] Barbu V. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces [M]. Leyden, The Netherlands: Noordhoff Int Publ, 1976

[3] Kato T. Nonlinear semigroups and evolution equations[J]. J Math Soc Japan, 1967, **19**(18): 508~ 520

[4] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis [M]. New York/Berlin: Springer_Verlag, 1985

[5] Chidume C F. Iterative solution of nonlinear equations with strongly accretive operators[J]. J Math Anal Appl, 1995, **195**: 502~ 518

[6] Deng I, Ding Xieping. Iterative approximation of Lipschitz strictly pseudocontractive mappings in uniformly smooth Banach spaces[J]. Nonlinear Anal, 1995, **24**: 981~ 987

[7] Chidume C E. Steepest descent approximations for accretive operator equations[J]. Nonl Anal, 1996, **26**: 299~ 311

[8] Bruck R E. The iterative solution of the equation $y \in x + Tx$ for a monotone operator T in Hilbert space, [J]. Bull Amer Soc, 1973, **79**: 1258~ 1261

[9] Ishikawa S. Fixed points by a new iteration method[J]. Proc Amer Math Soc, 1974, **149**: 147~ 150

[10] Zhou H Y, Jia Y T. Approximation of fixed points of strongly psrudocontractive maps without Lipschitz assumption[J]. Proc Amer Math Soc. (to appear)

[11] Zhou H Y, Jia Y T. Approximating the zeros of accretive operators by the Ishikawa iteration process [J]. Abtr Appl Anal, 1996, **1**(2): 153~ 167

[12] Zhou H Y. A remark on ishikawa iteration[J]. Chinese Science Bulletin, 1997, **42**: 631~ 633

[13] Osilike M O. Iterative solution of nonlinear equations of the Φ_strongly accretive type[J]. J Math Anal Appl, 1996, **200**: 259~ 271

[14] Chidume C E. Iterative solutions of nonlinear equations in smooth Banach spaces[J]. Nonl Anal, 1996, **26**: 1823~ 1834

[15] Browder F E. Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, **73**: 875~ 882

[16] Browder F E, Petryshyn W V. Contruction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space [J]. J Math Anal Appl, 1967, **20**: 197~ 228

[17] Deimling K. Zeros of accretive operators, Manuscripta Math, 1974, **13**: 365~ 374

[18] Chidume C E. Approximation of fixed points of strongly pscudocontractive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1994, **120**: 545~ 551

[19] Chidume C E, Osilike M O. Fixed point iterations for strictly hemi_contractive maps in uniformly smooth Banach spaces[J]. Numercal Funct Anal Optim, 1994, **15**: 779~ 790

[20] Deng L. On Chidume's open qucstions[J]. J Math Anal Appl, 1993, **174**: 441~ 449

[21] Deng L. An iterative process for nonlinear Lipschitzian and strongly accretive mappings in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces[J]. Acta Appl Math, 1993, **32**: 183~ 196

[22] Zhou H Y. Iterative solutions of nonlinear equations involving strongly accretive operators without Lipschitz assumption[J]. J Math Anal Appl, (to appear soon)

[23] Wann W R. Mean value methods in iteration[J]. Proc Amer Math Soc, 1953, **4**: 506~ 510

[24] Rhoades B E. Commcnts on two fixed point iteration methods[J]. J Math Anal Appl, 1976, **56**: 741~ 750

[25] Reich S. An iterative procedure for constructing zeros of accretive sets in Banach spaces, [J]. Non-linear Anal, 1978, **2**

[26] Reich S. Constructive techniques for accretive and monotone operators[A]. In: V. Lakshmikantham Ed. Appl Nonl Anal [M], New York: Academic Press, 1979, 335~ 345

[27] Reich S. Constructing zers of accretive operators [J]. Appl Anal, 1979, **9**: 159~ 163

[28] Reich S, Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1980, **85**: 287~ 292

[29] You Z Y, Xu Z B. A class of iteration methods for a strongly monotone operator equation and application to finite element approximate solution of nonlinear elliptic boundary value problem[J]. J Comput Math, 1984, **2**: 112~ 121

[30] Xu Z B, Roach G F. A necessary and sufficient condition for convergence of steepest descent approximation to accretive operator equations[J]. J Math Anal Appl, 1991, **167**: 189~ 210

[31] Schu J. On a theorem of C E Chidume concerning the iterative approximation of fixed points [J]. Math Nachr, 1991, **153**: 313~ 319

[32] Schu J. Iterative construction of fixed points of strictly pseudocontractive mappings[J]. Appl Anal, 1991, **40**: 67~ 72

Iterative Solution of Nonlinear Equations with Strongly Accretive Operators in Banach Spaces

Zhou Haiyun

Department of Basic Science, Ordnance Engineering College, Shijiazhuang 050003, P. R. China

Abstract: Let X be a real Banach space with a uniformly convex dual X^*. Let $T: X \to X$ be a Lipschitzian and strongly accretive mapping with a Lipschitzian constant $L \geqslant 1$ and a strongly accretive constant $k \in (0, 1)$. Let $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ be two real sequences in $[0, 1]$ satisfying:

(i) $\alpha_n \to 0$ as $n \to \infty$;

(ii) $\beta_n < \frac{k(1-k)}{L(1+L)}$, for all $n \geqslant 0$;

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

Set $Sx = f - Tx + x$, $\forall x \in X$.

Assume that $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ be two sequences in X satisfying $\|u_n\| = o(\alpha_n)$ and $v_n \to 0$ as $n \to \infty$.

For arbitrary $x_0 \in X$, the iteration sequence $\{x_n\}$ is defined by

$$(\mathrm{IS})\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S y_n + u_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n S x_n + v_n \quad (n \geqslant 0) \end{cases}$$

then $\{x_n\}$ converges strongly to the unique solution of the equation $Tx = f$.

A related result deals with iterative approximation of fixed points of φ_hemicontractive mappings.

Key words: Ishikawa iteration with errors; strongly accretive mapping; φ_hemicontractive mapping