

半无限带状各向异性材料的 应力效应衰减估计^{*}

蔡崇喜¹, 林长好²

¹ 中山大学 应用力学与工程系, 广州 510275

² 华南师范大学 数学系, 广州 510631

(戴世强推荐)

摘要: 对带端面负载的半无限带状各向异性弹性材料建立了 Saint_Venant 原理· 应用能量方法确立了应力效应衰减率的下界, 得出了用各向异性材料的弹性常量表示的估计显式· 最后, 为了说明所得结果, 对带端面负载、纤维偏离主轴的石墨·环氧树脂的衰减率给出数值实例·

关键词: Saint_Venant 原理; 四阶椭圆方程; 能量方法; 材料各向异性; 应力衰减估计

分类号: O343. 8; O175. 2 **文献标识码:** A

引 言

在线性静力学的平面形变理论中, Saint_Venant 原理在理论和实际应用中都起着十分重要的作用, 并常常用以判断忽略端面效应所造成的误差· 对齐次各向同性材料, Saint_Venant 原理的有效性已得到很好确认· 但对齐次各向异性材料, 实验结果证明其端面效应, 比起各向同性材料, 在材料内部持续的距离更远, 因而不能忽略这种效应· 如所周知, 一般的各向异性材料的弹性问题受一个常系数四阶椭圆方程所支配, 这个方程的精确解析解难以得到· 在关于材料的各向异性的应力呈指数式衰减的研究中, 人们通常不必找出其方程的精确解而采取检验有关的弹性问题的方法· 由于各向异性弹性材料的端面效应的复杂性, 至今有关这方面的结果尚不多· 在最近的一篇论文^[1]中, Miller 和 Horgan 检验了半无限带状各向异性弹性材料的应力效应确实呈指数式衰减· 在[1]中, 对各向异性材料的应力建立了基本能量估计, 非线性优化估计及守恒定律估计· 但这些估计并没有建立起使衰减率表示为材料弹性常量的显式公式, 相反, 涉及到解三次或四次的方程或不等式的估值方法· 显然[1]的结果有重大意义, 但不便于实际应用·

本文, 讨论与 Miller 和 Horgan 相同的问题, 应用和[1]不大一样的能量估计方法, 得到了用材料弹性常量表达衰减率的显式公式· 这些公式可用以直接估计衰减率的下界, 并对各向异性带状材料确定其 Saint_Venant 衰减长度· 最后, 作为一个数值实例, 我们对一种各向异性工程

* 收稿日期: 1997_10_20; 修订日期: 1998_08_15

基金来源: 广东省科委资助项目(960181)

作者简介: 蔡崇喜(1944-), 男, 副教授

材料——高强度石墨_环氧树脂计算其衰减率·

1 问题的阐述

考虑定义于 x_1, x_2 平面区域

$$R = \left\{ (x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, -H \leq x_2 \leq H \right\} \quad S_I$$

上的半无限各向异性弹性长条, 它的两边无引力, 在 $x_1 = 0$ 的一端有一个给定的自平衡端负载, 且应力随 $x_1 \rightarrow \infty$ 时衰减为零· 在此情况下, 对 Airy 应力函数 $\phi(x_1, x_2)$, 可以表为如下边值问题:

$$2\beta_{22}\phi_{,1111} - 2\beta_{26}\phi_{,1112} + (2\beta_{12} + \beta_{66})\phi_{,1122} - 2\beta_{16}\phi_{,1222} + \beta_{11}\phi_{,2222} = 0 \quad (\text{在 } R \text{ 上}), \tag{1}$$

满足

$$\phi = 0, \quad \phi_{,2} = 0, \quad x_2 = \pm H, \tag{2}$$

$$\phi = f(x_2), \quad \phi_{,1} = g(x_2), \quad x_1 = 0, \tag{3}$$

$$\phi_{, \alpha\beta} \rightarrow 0 \text{ (对 } x_2 \text{ 一致) 当 } x_1 \rightarrow \infty, \tag{4}$$

这里 $\phi_{,\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) 表示对 x_α 的偏导数, $f(x_2), g(x_2)$ 是已知函数, 满足适当的相容条件· 系数 β_{pq} ($p, q = 1, 2, 6$) 是各向异性材料的弹性常量· 由各向异性分析^[1, 2], Airy 函数 $\phi(x_1, x_2)$ 与应力张量 $\tau(x_1, x_2)$ 存在如下关系:

$$\left. \begin{cases} \tau_{11} = \phi_{,22}, & \tau_{22} = \phi_{,11}, & \tau_{12} = -\phi_{,12} \end{cases} \right\} \tag{5}$$

边值问题 (1) ~ (4) 的全应变能量记为 $\int_R W dA$, 应变能量密度 W 可以表为 $2W = \tau_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}$, 其中 $e_{\alpha\beta}$ 是应变张量的分量· 它们与应力张量的关系满足如下之矩阵方程

$$\begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ 2e_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \beta_{61} & \beta_{62} & \beta_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

应用 (6), 可以将应变能量密度表示为二次型 $2W = \mathbf{t}^T \mathbf{B} \mathbf{t}$, 这里 $\mathbf{t}^T = [\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{12}]$, \mathbf{B} 是出现于方程 (1) 之对称矩阵^①. 应变能量通常假设为正定的, 以便方程 (1) 是椭圆的, 即要求矩阵 \mathbf{B} 是正定的· 这等价于

$$\beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{66} > 0, \tag{7}$$

$$\beta_{11}\beta_{22} - \beta_{12}^2 > 0, \tag{8}$$

$$\beta_{11}\beta_{22}\beta_{66} + 2\beta_{12}\beta_{16}\beta_{26} - \beta_{11}\beta_{26}^2 - \beta_{22}\beta_{16}^2 - \beta_{66}\beta_{12}^2 > 0. \tag{9}$$

问题 (1) ~ (4) 称为齐次各向异性弹性端面问题· 对这个问题的分析, 第一步是将所支配的四阶椭圆方程量纲一化, 以减少独立的弹性常量的个数· 定义量纲一的坐标 ξ, η 为

$$\xi = \begin{bmatrix} \beta_{11} & x_1 \\ \beta_{22} & H \end{bmatrix}, \quad \eta = \frac{x_2}{H}. \tag{10}$$

回到方程 (1), 我们得到对 Airy 应力函数 $\phi(\xi, \eta)$ 的量纲一的方程

$$\phi_{,\xi\xi\xi\xi} - \frac{2}{\varepsilon_2}\phi_{,\xi\xi\xi\eta} + \frac{1}{\varepsilon_1}\phi_{,\xi\xi\eta\eta} - \frac{2}{\varepsilon_3}\phi_{,\xi\eta\eta\eta} + \phi_{,\eta\eta\eta\eta} = 0. \tag{11}$$

(11) 定义在新区域

① 斜黑体字母表示矩阵、张量或向量

$$R = \{(\xi, \eta) \mid \xi \geq 0, -1 \leq \eta \leq 1\}, \quad (12)$$

满足边值条件

$$\phi = 0, \quad \phi_{,\eta} = 0 \quad (\eta = \pm 1), \quad (13)$$

$$\phi = F(\eta), \quad \phi_{,\xi} = G(\xi) \quad (\xi = 0), \quad (14)$$

$$\phi_{,\alpha\beta} \rightarrow 0 \quad (\text{对 } \eta \text{ 一致}) \text{ 当 } \xi \rightarrow \infty, \quad (15)$$

这里 $\alpha, \beta \in \{\xi, \eta\}$, $F(\eta), G(\xi)$ 是给定函数. 方程(11) 的量纲一的系数定义为

$$\varepsilon_1 = \left[\frac{2\beta_{12} + \beta_{66}}{(\beta_{11}\beta_{22})^{\frac{1}{2}}} \right]^{-1}, \quad \varepsilon_2 = \left[\frac{\beta_{26}}{\beta_{11}\beta_{22}^{\frac{1}{2}}} \right]^{-1}, \quad \varepsilon_3 = \left[\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}^{\frac{1}{2}}\beta_{22}^{\frac{1}{2}}} \right]^{-1}. \quad (16)$$

当材料是直向同性或横向同性, 这时有 $\beta_{16} = 0, \beta_{26} = 0$. 一个类似的“直向同性标量化”使方程(11) 归结为

$$\phi_{,\xi\xi\xi} + \frac{1}{\varepsilon_1} \phi_{,\xi\eta\eta} + \phi_{,\eta\eta\eta} = 0. \quad (17)$$

为了推导各向异性材料的应力衰减估计, 我们定义第一阶各向异性应力能量为

$$E_1(z) = \int_{R_z} \left[\phi_{,\xi\xi}^2 - \frac{2}{\varepsilon_2} \phi_{,\xi\xi} \phi_{,\xi\eta} + \frac{1}{\varepsilon_1} \phi_{,\xi\eta}^2 - \frac{2}{\varepsilon_3} \phi_{,\xi\eta} \phi_{,\eta\eta} + \phi_{,\eta\eta}^2 \right] dA, \quad (18a)$$

这里 $R_z \subseteq R$ 表示区域 $\xi \geq z \geq 0, -1 \leq \eta \leq 1$.

为了得到 $E_1(z)$ 的其他形式, 用 ϕ 乘方程(11), 并在区域 R_z 上积分

$$\int_{R_z} \phi \left[\phi_{,\xi\xi\xi} - \frac{2}{\varepsilon_2} \phi_{,\xi\xi\eta} + \frac{1}{\varepsilon_1} \phi_{,\xi\eta\eta} - \frac{2}{\varepsilon_3} \phi_{,\xi\eta\eta} + \phi_{,\eta\eta\eta} \right] dA = 0.$$

对上式重复分部积分, 应用散度定理及边界条件得出

$$\begin{aligned} \int_{R_z} \left[\phi_{,\xi\xi\xi}^2 - \frac{2}{\varepsilon_2} \phi_{,\xi\xi} \phi_{,\xi\eta} + \frac{1}{\varepsilon_1} \phi_{,\xi\eta}^2 - \frac{2}{\varepsilon_3} \phi_{,\xi\eta} \phi_{,\eta\eta} + \phi_{,\eta\eta}^2 \right] d\xi d\eta = \\ - \int_{L_z} \left[-\phi_{,\xi\xi\xi} + \phi_{,\xi\xi\eta} + \frac{1}{\varepsilon_1} \phi_{,\xi\eta\eta} - \frac{2}{\varepsilon_2} \phi_{,\xi\eta\eta} \right] d\eta, \end{aligned} \quad (19)$$

这里 L_z 表示线段 $-1 \leq \eta \leq 1, \xi = z$. 因而 $E_1(z)$ 可以表为线积分(19).

$E_1(z)$ 对 z 求导, 得出

$$E_1'(z) = - \int_{L_z} \left[\phi_{,\xi\xi}^2 - \frac{2}{\varepsilon_2} \phi_{,\xi\xi} \phi_{,\xi\eta} + \frac{1}{\varepsilon_1} \phi_{,\xi\eta}^2 - \frac{2}{\varepsilon_3} \phi_{,\xi\eta} \phi_{,\eta\eta} + \phi_{,\eta\eta}^2 \right] d\eta. \quad (20)$$

对各向异性带状区域的第二阶能量记为 $E_2(z)$, 它可以在(18) 中以 $\phi_{,\xi}$ 代替 ϕ 而得到.

$$E_2(z) = \int_{R_z} \left[\phi_{,\xi\xi\xi}^2 - \frac{2}{\varepsilon_2} \phi_{,\xi\xi\xi} \phi_{,\xi\eta} + \frac{1}{\varepsilon_1} \phi_{,\xi\eta\xi}^2 - \frac{2}{\varepsilon_3} \phi_{,\xi\eta\xi} \phi_{,\xi\eta\eta} + \phi_{,\xi\eta\eta}^2 \right] d\eta d\xi \quad (21)$$

这个二次泛函同样可以表示为线性积分

$$E_2(z) = - \int_{L_z} \left[\phi_{,\xi\xi\xi} + \phi_{,\xi\eta\eta} \right] d\eta. \quad (22)$$

(21) 对 z 求导, 得到

$$E_2'(z) = - \int_{L_z} \left[\phi_{,\xi\xi\xi}^2 - \frac{2}{\varepsilon_2} \phi_{,\xi\xi\xi} \phi_{,\xi\eta} + \frac{1}{\varepsilon_1} \phi_{,\xi\eta\xi}^2 - \frac{2}{\varepsilon_3} \phi_{,\xi\eta\xi} \phi_{,\xi\eta\eta} + \phi_{,\xi\eta\eta}^2 \right] d\eta. \quad (23)$$

能量 $E_1(z), E_2(z)$ 必定为正, 这就要求他们的被积函数是正定的二次型. 这些要求反过来对 $\varepsilon_i (i = 1, 2, 3)$ 加上限制. 回到(18), (21), 我们可以重写 $E_1(z), (E_2(z))$ 的被积函数为二次型 $\Phi_1^T \mathbf{B}_1 \Phi_1, (\Phi_2^T \mathbf{B}_1 \Phi_2)$ 在 Φ_1 中以 $\phi_{,\xi}$ 代替 ϕ 得到 Φ_2 , 其中

$$\Phi_{\perp} = \begin{pmatrix} \phi_{\xi_2} \\ \phi_{\eta} \\ \sqrt{2}\phi_{\xi_1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon_2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon_3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon_2} & -\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon_3} & -\frac{1}{2\varepsilon_1} \end{pmatrix}. \quad (24)$$

矩阵 \mathbf{B}_1 的正定性等价于下面限制

$$\frac{1}{\varepsilon_1} > 0, \quad \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_3} > 0. \quad (25)$$

矩阵 \mathbf{B}_1 在本文推论过程中将起着重要作用。由线性代数教程知, 矩阵 \mathbf{B}_1 的特征多项式 $f(\lambda)$ 可表为

$$f(\lambda) = |\mathbf{B}_1 - \lambda \mathbf{I}| = -\lambda^3 + b_2\lambda^2 - b_1\lambda + b_0 \quad (26)$$

其中 \mathbf{I} 是单位方阵, 系数 b_2, b_1, b_0 是 \mathbf{B}_1 的不变量

$$b_2 = \text{trace} \mathbf{B}_1 = 2 + \frac{1}{2\varepsilon_1}, \quad (27)$$

$$b_1 = 1 + \frac{1}{2\varepsilon_1} + |\mathbf{B}_1| = \sum_{i < j}^3 (b_{ii}b_{jj} - b_{ij}b_{ji}), \quad (28)$$

$$b_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_3} \right) = |\mathbf{B}_1|, \quad (29)$$

$|\mathbf{B}_1|$ 表示矩阵 $\mathbf{B}_1(b_{ij})$ 的行列式。

解三次方程 $f(\lambda) = 0$, 得到 $f(\lambda)$ 的三个实特征值。

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[\xi + \frac{\xi^2}{2\varepsilon_1} - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2\varepsilon_1}\right)^2 + 2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \right], \quad (30)$$

$$\lambda_2 = 1, \quad (31)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2\varepsilon_1} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2\varepsilon_1}\right)^2 + 2} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_3} \right) \right], \quad (32)$$

显然, 有

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3. \quad (33)$$

2 预备不等式

为了建立本文的主要结果, 将有赖于熟知的 Wiringer 不等式, 这一节将这些不等式分列如下:

(i) 若 $\omega(\eta) \in C^1(-1, 1)$ 且 $\omega(-1) = \omega(1) = 0$, 那么

$$\int_{-1}^1 \omega^2 d\eta \leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_{-1}^1 \omega_{,\eta d}^2 \eta. \quad (34)$$

(ii) 若 $\omega(\eta) \in C^2(-1, 1)$ 且 $\omega(1) = \omega_{,\eta}(1) = 0, \omega(-1) = \omega_{,\eta}(-1) = 0$, 那么

$$\int_{-1}^1 \omega_{,\eta d}^2 \eta \leq \frac{h^2}{4\pi^2} \int_{-1}^1 \omega_{,\eta d}^2 \eta. \quad (35)$$

(iii) 若 $\omega(\eta)$ 满足和(ii)一样的条件, 则

$$\int_{-1}^1 \omega^2 d\eta \leq \frac{h^4}{\mu_0^4} \int_{-1}^1 \omega_{,\eta d}^2 \eta, \quad (36)$$

这里 μ_0 是稍大于 $3\pi/2$ 的正数, 为了方便, 我们采用以下的不等式代替(36)

$$\int_{-1}^1 \omega^2 d\eta \leq \left(\frac{2}{3} \frac{h^4}{\pi^4} \int_{-1}^1 \omega_{,m}^2 d\eta \right) \quad (37)$$

在所有这些不等式中, h 表示积分区间的长度, 即, $h = 2$.

3 衰减估计

在这一节, 我们对各向异性材料的能量推导显式衰减估计, 定义

$$E(z) = E_1(z) + rE_2(z), \quad (38)$$

这里 $r > 0$ 是待定常数.

由(19)及(22), 得到

$$E(z) = \int_{L_z} \left[\phi \phi_{,\xi\xi} - \phi_{,\xi} \phi_{,\xi\xi} - \frac{1}{\varepsilon_1} \phi_{,\eta} \phi_{,\xi\eta} + \frac{2}{\varepsilon_2} \phi_{,\eta} \phi_{,\xi\xi} \right] d\eta - r \int_{L_z} \left[\phi_{,\xi} \phi_{,\xi\xi} + \phi_{,\eta} \phi_{,\xi\eta} \right] d\eta \quad (39)$$

应用 Schwarz 不等式, Wirginter 不等式(34) ~ (37) 以及算术-几何平均不等式, 对(39)式右端每个积分得到

$$\int_{L_z} \phi \phi_{,\xi\xi} d\eta \leq \frac{4}{9} \frac{h^2}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{r}} \left(\int_{L_z} \phi_{,\eta}^2 d\eta \cdot r \int_{-1}^1 \phi_{,\xi\xi}^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{4}{9} \frac{h^2}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\sigma_1}{2} \int_{L_z} \phi_{,\eta}^2 d\eta + \frac{4h^2}{9\pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{1}{2\sigma_1} r \int_{-1}^1 \phi_{,\xi\xi}^2 d\eta \quad (40)$$

$$- \int_{L_z} \phi_{,\xi} \phi_{,\xi\xi} d\eta \leq \frac{h}{\pi} \left(\int_{L_z} \phi_{,\xi\xi}^2 d\eta \cdot \int_{L_z} \phi_{,\xi\eta}^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{h}{\pi} \cdot \frac{\sigma_2}{2} \int_{L_z} \phi_{,\xi\xi}^2 d\eta + \frac{h}{\pi} \cdot \frac{1}{4\sigma_2} \int_{L_z} 2\phi_{,\xi\eta}^2 d\eta \quad (41)$$

$$- \frac{1}{\varepsilon_1} \int_{L_z} \phi_{,\eta} \phi_{,\xi\eta} d\eta \leq \frac{1}{2\varepsilon_1} \frac{h}{\pi} \left(\int_{L_z} \phi_{,\eta}^2 d\eta \cdot \int_{L_z} \phi_{,\xi\eta}^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{h}{\pi} \cdot \frac{\sigma_3}{4\varepsilon_1} \int_{L_z} \phi_{,\eta}^2 d\eta + \frac{h}{\pi} \cdot \frac{1}{8\varepsilon_1 \sigma_3} \int_{L_z} 2\phi_{,\xi\eta}^2 d\eta \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\varepsilon_2} \int_{L_z} \phi_{,\eta} \phi_{,\xi\xi} d\eta &\leq \frac{1}{|\varepsilon_2|} \frac{h}{\pi} \left(\int_{L_z} \phi_{,\xi\xi}^2 d\eta \cdot \int_{L_z} \phi_{,\eta}^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{h}{\pi} \frac{\sigma_4}{2} \int_{L_z} \phi_{,\eta}^2 d\eta + \frac{h}{\pi} \frac{1}{\varepsilon_2^2} \frac{1}{2\sigma_4} \int_{L_z} \phi_{,\xi\xi}^2 d\eta \\ &\leq \frac{h}{\pi} \frac{\sigma_4}{2} \int_{L_z} \phi_{,\eta}^2 d\eta + \frac{h}{\pi} \frac{1}{4\varepsilon_1 \sigma_4} \int_{L_z} \phi_{,\xi\xi}^2 d\eta + \frac{h}{\pi} \frac{1}{4\varepsilon_1 \sigma_4} \frac{h^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2r} \cdot r \int_{L_z} 2\phi_{,\xi\eta}^2 d\eta \end{aligned} \quad (43)$$

(43)的最后一步, 应用了限制条件 $1/\varepsilon_2^2 < 1/\varepsilon_1$.

$$\begin{aligned} - r \int_{L_z} \phi_{,\xi} \phi_{,\xi\xi} d\eta &\leq \sqrt{r} \left(\int_{L_z} \phi_{,\xi\xi}^2 d\eta \cdot r \int_{L_z} \phi_{,\xi\xi}^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{r} \frac{\sigma_5}{2} \int_{L_z} \phi_{,\xi\xi}^2 d\eta + \sqrt{r} \cdot \frac{1}{2\sigma_5} r \int_{L_z} \phi_{,\xi\xi}^2 d\eta \\ - r \int_{L_z} \phi_{,\eta} \phi_{,\xi\eta} d\eta &\leq \sqrt{r} \left(\int_{L_z} \phi_{,\eta}^2 d\eta \cdot r \int_{L_z} \phi_{,\xi\eta}^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \end{aligned} \quad (44)$$

$$\sqrt{r} \cdot \frac{\sigma_6}{2} \int_{L_z} \phi_{,\eta\eta}^2 d\eta + \sqrt{r} \cdot \frac{1}{2\sigma_6 r} \int_{L_z} \phi_{,\xi\xi}^2 \eta d\eta \quad (45)$$

我们的目标是对 r 和 $\sigma_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 选择适当的值使衰减率尽可能达到最优。通过计算, 我们作出如下选择:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \frac{h^2}{\pi^2}, \\ \sigma_1 &= \frac{9}{8\sqrt{2}}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}, \\ \sigma_4 &= 1, \quad \sigma_5 = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \sigma_6 = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

结合(40)~(45), 我们最终得到

$$\begin{aligned} E(z) &\leq \frac{h}{\pi} \left[\mathfrak{A} + \frac{1}{4\varepsilon_1} \left(\int_{L_z} \left[\Phi_1^T \Phi_1 + \frac{h^2}{2\pi^2} \Phi_2^T \Phi_2 \right] \eta d\eta \right) \right] = \\ &\xi \frac{h}{2\pi} \left[2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \left(\int_{L_z} \Phi_1^T \Phi_1 d\eta + \frac{h^2}{2\pi^2} \int_{L_z} \Phi_2^T \Phi_2 d\eta \right) \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

注意到矩阵 \mathbf{B}_1 正定, λ_1 是 \mathbf{B}_1 的最小正特征值, 且 $2 + 1/2\varepsilon_1 = b_2 = \text{trace } \mathbf{B}_1$, 由(46) 我们得到

$$\begin{aligned} E(z) &\leq \frac{h}{2\pi} \frac{b_2}{\lambda_1} \left[\int_{L_z} \Phi_1^T \mathbf{B}_1 \Phi_1 d\eta + \frac{h^2}{2\pi^2} \int_{L_z} \Phi_2^T \mathbf{B}_1 \Phi_2 d\eta \right] = \\ &\frac{h}{2\pi} \frac{b_2}{\lambda_1} (-E'(z)), \end{aligned} \quad (47)$$

令 $k = \pi\lambda_1/hb_2$, (47) 可以重新写成

$$(E(z)e^{2kz})' \leq 0, \quad (48)$$

对(48)从 0 到 z 积分得出

$$E(z) \leq E(0)e^{-2kz} \quad (z \geq 0), \quad (49)$$

由(49), 可以得到

$$E_1(z) \leq E(0)e^{-2kz}, \quad (50)$$

$$E_2(z) \leq \frac{2\pi^2}{h^2} E(0)e^{-2kz}. \quad (51)$$

利用(22), 容易得到

$$\begin{aligned} \int_{L_z} (\phi_{,\xi\xi}^2 + \phi_{,\eta\eta}^2) d\eta &= 2 \int_z^\infty E_2(\xi) d\xi \leq \\ &\frac{\pi^2}{kh^2} E(0)e^{-2kz} \quad (z \geq 0), \end{aligned} \quad (52)$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned} \int_{L_z} \phi_{,\xi\eta}^2 d\eta &= \int_z^\infty \int_{L_z} (\phi_{,\xi\eta}^2)_{,\xi} d\eta d\xi = -2 \int_{R_z} \phi_{,\xi\xi} \phi_{,\xi\eta} d\xi d\eta \leq \\ &\frac{\sqrt{2}}{\lambda_1} (E_1(z)E_2(z))^{\frac{1}{2}} \leq \frac{2\pi}{\lambda_1 h} E(0)e^{-2kz}. \end{aligned} \quad (53)$$

由(52)、(53)和(5), 可以得到平面弹性应力的截面均方估计

$$\int_{L_z} (\tau_{\xi\xi}^2 + \tau_{\eta\eta}^2 + 2\tau_{\xi\eta}^2) d\eta \leq KE(0)e^{-2kz}, \quad (54)$$

这里及下文, K 记某个常量.

从 (50) 和 (54), 可以进一步得到应力衰减估计

$$|\tau_{\alpha\beta}(\xi, \eta)| \leq K e^{-kz} \quad (\text{对固定 } \eta), \quad (55)$$

这里 $\tau_{\alpha\beta}$ 记一个有代表性的应力分量. 有关这方面的点点估计由于比较繁冗复杂, 将不在这里展开. 详细的讨论请读者参考[3].

将上面结果变换成原来变量 x_1, x_2 并应用变换式(10), 可以得到应力衰减估计(55) 中的指数衰减因子为

$$e^{-k\xi} = e^{-k \left[\frac{\beta_{11}}{\beta_{22}} \left(\frac{x_1}{H} \right)^2 \right]} = e^{-k^* x_1}, \quad (56)$$

$$\text{其中 } k^* = \frac{\pi \lambda_1}{2H b_2} \left(\frac{\beta_{11}}{\beta_{22}} \right)^2. \quad (57)$$

这里给出的衰减率结果还可以表达为衰减长度. 如通常所定义, 记特征衰减长度 λ^* 表示方程的解 ϕ , 进而应力函数 τ 的值衰减至原来(在 $x_1 = 0$ 处) 的 1% 时, 所经历的长度, 那么

$$\lambda^* = \frac{\ln 100}{k^*}. \quad (58)$$

显然, 由(57), k^* 和 λ^* 可以直接地用各向异性材料的弹性常量 β_{pq} 来表达. 而 β_{pq} 又可以用通常的工程常量 ν, E 及 G 来表达. ν, E 和 G 分别称为 Poisson 比率, 弹性模量和应变模量^[1,2], 且可以由实验测得.

4 数值实例

这一节, 我们对带端面负载, 纤维偏离主轴的石墨_环氧树脂, 给出一个数值实例, 以说明本文的结果.

考虑一横向同性材料薄片, 它的伴随矩阵为 $\mathbf{B} \equiv \mathbf{B}(0)$, 从薄片上划出一个长长的带状区域, 使它的 x_2 轴与薄片的 x_1 轴形成一个 θ 角(角 θ 一般称为纤维角, 见图 1), 带状区域的伴随矩阵 $\mathbf{B}(\theta)$, 由下式给出

$$\mathbf{B}(\theta) = \mathbf{T}^T(\theta) \mathbf{B}(0) \mathbf{T}(\theta) \quad (59)$$

由 Jones^[4, p.49], (59) 式中之

$$\mathbf{T}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin 2\theta \\ -\frac{1}{2}\sin 2\theta & \frac{1}{2}\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}. \quad (60)$$

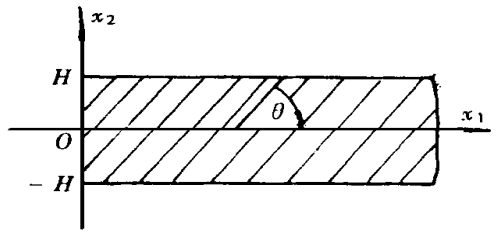


图 1

特别, 设薄片为石墨_环氧树脂, 且 $\theta = 15^\circ$, 那么, 由[5] 的表 1, 得

$$\mathbf{B}(0) = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{16} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{26} \\ \beta_{16} & \beta_{26} & \beta_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.722 & -0.227 & 0 \\ -0.227 & 13.6 & 0 \\ 0 & 0 & 24.2 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

对 $\theta = 15^\circ$,

$$T(\theta) |_{\theta=15^\circ} = \begin{bmatrix} 0.933 & 0.067 & 0.5 \\ 0.067 & 0.933 & -0.5 \\ -0.25 & 0.25 & 0.866 \end{bmatrix} \quad (62)$$

由(59), 直接计算导致

$$\text{指数 } B(\theta) |_{\theta=15^\circ} = \begin{bmatrix} 2.175 & -0.817 & -5.259 \\ -0.817 & 13.327 & -1.18 \\ -5.259 & -1.18 & 21.844 \end{bmatrix} \cdot \quad (63)$$

应用变换(10), $B(\theta)$ 对应于 ε 矩阵

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon_2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon_3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon_2} & -\frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon_3} & \frac{1}{2\varepsilon_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.0985 \\ 0 & 1 & 1.0879 \\ 0.0985 & 1.0879 & 1.8797 \end{bmatrix} \quad \text{表 (64)}$$

经计算, 得到矩阵 B_1 的特征值和不变量如下:

$$\lambda_1 = 0.2633, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2.6177,$$

$$b_0 = |B_1| = 0.6866,$$

$$b_2 = \text{trace } B_1 = 3.8797,$$

将数据代入(57), 由(50)和(55)得到

$$E_1(x_1) \leq E(0)e^{-\frac{0.270}{2H}x_1} \quad (x_1 \geq 0), \quad (65)$$

$$|\tau_{\alpha\beta}(x_1, x_2)| \leq Ke^{-\frac{0.135}{2H}x_1} \quad (\text{对固定 } x_2) \cdot \quad (66)$$

我们同时得到特征衰减长度

$$\lambda^* = 34.11 \cdot 2H, \quad (67)$$

在(65)~(67)中, $2H$ 代表石墨_环氧树脂长条的宽度。

将本文的衰减率 $2k^*$ 与石墨_环氧树脂的基本能量估计曲线(参见[1], 图4)相比较, 我们发现本文的结果与[1]的结果基本吻合。

参 考 文 献

- [1] Miller K L, Horgan C O. End effects for plane deformations of an elastic anisotropic semiinfinite strip [J]. Journal of Elasticity, 1995, **38**: 261~ 316
- [2] Lekhniskii S G. Theory of Elasticity of an Anisotropic Body [M]. Moscow: MIR Publishers, 1981
- [3] Horgan C O, Knowles J K. Recent developments concerning Saint_Venant's principle[A]. In: J W Hutchinson and T Y Wu eds, Advances in Applied Mechanics [M], Volume **23**, New York: Academic Press, 1983, 179~ 269
- [4] Jones R M. Mechanics of Composite Materials [M]. New York: Hemisphere Publish Co, 1975
- [5] Choi I, Horgan C O. Saint_Venant's principle and end effects in anisotropic elasticity[J]. Journal of Applied Mechanics, 1977, **44**: 424~ 430
- [6] Horgan C O. Recent developments concerning Saint_Venant's principle: an update[J]. Applied Mechanics Reviews, 1989, **42**: 295~ 303
- [7] Crafter E C, Heise R M, Horgan C O, Simmonds J G. The eigenvalues for a self-equilibrated semi_in-

finite: anisotropic elastic strip[J]. Journal of Applied Mechanics, 1993, 60: 276~ 281

Stress Effect Decay Estimates for Anisotropic Material in a Semi_Infinite Strip

Cai Chongxi¹, Lin Changhao²

¹Zhongshan University, Guangzhou 510275, P R China ;

²South China Normal University, Guangzhou 510631, P R China

Abstract: In this paper, Saint_Venant' s principle for anisotropic material in an end_loaded. semi_infinite elastic strip is established. Energy method is used to establish the lower bounds of the decay estimate of stress effect. An explicit estimate formula in terms of the elastic constants of the anisotropic materials is presented. Finally, a numerical example for an end_loaded, off_axis, graphite_epoxy strip is given to illustrate the results.

Key words: Saint_Venant' s principle; fourth order elliptic equation; energy method; material anisotropy; stress decay estimate