应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论文编号: 1000_0887(1999) 03_0319_24

多层厚壁圆筒频率方程的简化及一类贝塞尔函数递推公式*

尹晓春

南京理工大学土木工程与力学系, 南京 210014

(陈予恕推荐)

摘要: 本文从理论上研究了相同材料的多层厚壁圆筒径向振动的频率方程, 证明若干层相互接触的层筒的整体频率方程, 可以用单个厚壁圆筒的频率方程替代, 从而大大简化了求解过程· 并从该实际问题出发, 推导出了一类贝塞尔函数的递推公式·

关键词: 频率; 振动; 特殊函数

分类号: O174.61 文献标识码: A

引 言

层筒结构是工程中的常见结构, 但有关的动力响应分析及振动分析并不多见[1]· 由于对它的研究, 还有助于对地震波的了解, 是值得探讨的· 在利用特征函数展开法[2], 对其动力响应和振动作分析时, 首先必须求出层筒的自然频率· 若各筒之间不是焊接连接时, 各层筒之间的分离与接触, 将产生复杂的动力响应现象[3]· 例如, 考虑轴对称平面应变情况下的双层厚壁圆筒, 当两筒分离时, 两筒以各自的频率振动; 但当两筒相互碰撞接触时, 将以新的整体频率振动· 此时, 求解整体频率的方程数, 比求解单筒频率的方程数增加两个· 增加的两个方程, 是位移连续性条件和应力连续性条件· 对于三层厚壁圆筒碰撞接触时, 方程数将再增加两个, 依次类推· 因此, N 层厚壁圆筒碰撞接触时, 其整体频率方程, 将由 $2N \times 2N$ 矩阵的行列式为零确定, 计算过程复杂· 本文通过理论推导, 简化了多层筒的频率方程, 得到相同材料制成的多个层筒碰撞接触时, 其频率方程可简化为单筒的频率方程, 从而大大简化了求解过程; 另外, 由简化过程中的得出的一个贝塞尔函数关系式, 进一步导出了一类贝塞尔函数递推公式·

1 频率方程的简化

考虑平面应变轴对称情况下的, 内径为 a, 外径为 b 的单层厚壁圆筒的径向振动或动力响应问题, 其所依据的波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad (t \geqslant 0), \tag{1}$$

* 收稿日期: 1997-03-24; 修订日期: 1999_01_09
作者简介: 尹晓春(1963~), 男, 副教授

式中 $u = u(r, t)$ 是径向位移, r 是极坐标, t 是时间, c 是纵波波速• 按照特征函数展开法[2]

$$u(r, t) = u_s(r, t) + \sum_{m=1}^{\infty} U_m(r) q_m(t), \tag{2}$$

$$U_m(r) = A_{1m} \mathrm{J}_1(k_m r) + A_{2m} \mathrm{Y}_1(k_m r), \tag{3}$$

在(2)和(3)式中, $u_s(r, t)$ 是准静态位移解, $U_m(r)$ 是特征函数, $q_m(t)$ 是时间函数(参见[4])• A_{1m}, A_{2m} 是待定系数• J_1 和 Y_1 为一阶第一类及第二类贝塞尔函数, k_m 是特征值, 自然频率(又称特征频率) ω_m 为

$$\omega_m = k_m \cdot c \cdot \tag{4}$$

自然频率由齐次边界条件确定•

$$\sigma_{rm}(a, t) = \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_m}{\partial r} + \lambda \frac{U_m}{r}\right]_{r=a} = 0, \tag{5}$$

$$\sigma_{rm}(b, t) = \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_m}{\partial r} + \lambda \frac{U_m}{r}\right]_{r=b} = 0 \cdot \tag{6}$$

由(3)、(5)和(6)式, 根据非零解条件, 得到频率方程[5]为

$$\begin{vmatrix} M_1(k, a) & M_2(k, a) \\ M_1(k, b) & M_2(k, b) \end{vmatrix} = 0 \cdot \tag{7}$$

(7)式中

$$M_1(k, r) = k \mathrm{J}_1'(kr) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r} \mathrm{J}_1(kr), \tag{8}$$

$$M_2(k, r) = k \mathrm{Y}_1'(kr) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{r} \mathrm{Y}_1(kr), \tag{9}$$

(5)、(6)、(8)及(9)式中 λ, μ 为 Lamé 常数• 由(7)式可导出一系列特征值 $k_m (m = 1, 2, \cdots)$ 及自然频率 $\omega_m (m = 1, 2, \cdots)$, 其中 ω_1 为基频•

对于 N 层无间隙厚壁圆筒结构, 若各筒材料相同, 筒 i 的内径为 a_i、外径为 b_i, 显然有 $a_{i+1} = b_i$• 考虑平面应变轴对称情况下的径向振动或动力响应, 不失一般性, 本文仅研究连续 M 个筒处于碰撞接触时的频率方程, 它们是 $i = 1, 2, \cdots, M$ 筒• 齐次边界条件、位移连续性条件和应力连续性条件为

$$\sigma_{rm}(a_1, t) = \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_m^1}{\partial r} + \lambda \frac{U_m^1}{r}\right]_{r=a_1} = 0, \tag{10}$$

$$\sigma_{rm}(b_M, t) = \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_m^M}{\partial r} + \lambda \frac{U_m^M}{r}\right]_{r=b_M} = 0, \tag{11}$$

$$U_m^j(b_j) = U_m^{j+1}(a_{j+1}), \tag{12}$$

$$\sigma_{rm}(b_j, t) = \sigma_{rm}(a_{j+1}, t), \tag{13}$$

其中 $$U_m^j(r) = A_{1m}^j \mathrm{J}_1(k_m r) + A_{2m}^j \mathrm{Y}_1(k_m r) \quad (j = 1, 2, \cdots, M-1) \cdot \tag{14}$$

(10)至(14)式构成 $2M \times 2M$ 矩阵的方程

$$
\begin{bmatrix}
a_1^1 & a_1^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2^{2M-1} & a_2^{2M} \\
a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2M-3}^{2M-5} & a_{2M-3}^{2M-4} & a_{2M-3}^{2M-3} & a_{2M-3}^{2M-2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2M-2}^{2M-5} & a_{2M-2}^{2M-4} & a_{2M-2}^{2M-3} & a_{2M-2}^{2M-2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2M-1}^{2M-3} & a_{2M-1}^{2M-2} & a_{2M-1}^{2M-1} & a_{2M-1}^{2M} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{2M}^{2M-3} & a_{2M}^{2M-2} & a_{2M}^{2M-1} & a_{2M}^{2M}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
A_1^1 \\ A_2^1 \\ A_1^2 \\ A_2^2 \\ \cdots \\ A_{M-1}^1 \\ A_{M-1}^2 \\ A_M^1 \\ A_M^2
\end{bmatrix}
= [0], \tag{15}
$$

其中

$a_1^1 = M_1(k, a_1)$, $a_1^2 = M_2(k, a_1)$, $a_2^{2M-1} = M_1(k, b_M)$, $a_1^{2M} = M_2(k, b_M)$, $a_{2m+1}^{2m-1} = \mathrm{J}_1(kb_m)$, $a_{2m+1}^{2m+1} = -\mathrm{J}_1(ka_{m+1})$, $a_{2m+2}^{2m-1} = M_1(k, b_m)$, $a_{2m+2}^{2m+1} = -M_1(k, a_{m+1})$, $a_{2m+1}^{2m} = \mathrm{Y}_1(kb_m)$, $a_{2m+1}^{2m+2} = -\mathrm{Y}_1(ka_{m+1})$, $a_{2m+2}^{2m} = M_2(k, b_m)$, $a_{2m+2}^{2m+2} = -M_2(k, a_{m+1})$, $(m = 1, 2, \cdots, M-1)$, 其余元素均恒为零•

频率方程由矩阵 $[a_m^n]$ 的行列式为零构成, 即为

$$
\det[a_m^n] = 0 \cdot \tag{16}
$$

由于 $a_{i+1} = b_i$, 可方便地对矩阵作变换而不改变其行列式的值• 将第 $2M$ 列、第 $2M-1$ 列分别加到第 $2M-2$ 列和第 $2M-3$ 列上, 然后再将第 $2M-2$ 列、第 $2M-3$ 列分别加到第 $2M-4$ 列和第 $2M-5$ 列上, 依次类推, 可得到对角线上排列 2×2 的正方矩阵, 而下边元素全为零的新矩阵• 故

$$
\det[a_m^n] = \begin{vmatrix} M_1(k, a_1) & M_2(k, a_1) \\ M_1(k, b_M) & M_2(k, b_M) \end{vmatrix} \prod_{j=2,3,\cdots,M} \begin{vmatrix} -\mathrm{J}_1(ka_j) & -\mathrm{Y}_1(ka_j) \\ -M_1(k, a_j) & -M_2(k, a_j) \end{vmatrix}, \tag{17}
$$

由(8)式和(9)式易得

$$
\det[a_m^n] = \begin{vmatrix} M_1(k, a_1) & M_2(k, a_1) \\ M_1(k, b_M) & M_2(k, b_M) \end{vmatrix} \prod_{j=2,3,\cdots,M} \begin{vmatrix} \mathrm{J}_1(ka_j) & \mathrm{Y}_1(ka_j) \\ \mathrm{J}_1'(k, a_j) & \mathrm{Y}_1'(k, a_j) \end{vmatrix} \cdot \tag{18}
$$

若定义

$$
f(x) = \mathrm{J}_1(x)\mathrm{Y}_1'(x) - \mathrm{Y}_1(x)\mathrm{J}_1'(x), \tag{19}
$$

式中 x 为自变量, 对(19) 式求导得

$$
\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x}f(x), \tag{20}
$$

故有解

$$
f(x) = C\frac{1}{x}, \tag{21}
$$

式中 C 为常数• 由

$$
x \to \infty \qquad f(x) \to \frac{2}{\pi x}, \tag{22}
$$

得

$$
f(x) = \frac{2}{\pi x} \cdot \tag{23}
$$

因此 $\left|\begin{matrix} J_1(ka_j) & Y_1(ka_j) \\ J_1'(ka_j) & Y_1'(ka_j) \end{matrix}\right| \underset{ka_j>0}{>} 0 \quad (j = 2, 3, \cdots, M)$• (24)

显然频率方程(16)变为

$$\left|\begin{matrix} M_1(k, a_1) & M_2(k, a_1) \\ M_1(k, b_M) & M_2(k, b_M) \end{matrix}\right| = 0 \cdot \tag{25}$$

该方程和内径为 a_1、外径为 b_M 单层厚壁圆筒的频率方程是一致的, 从而大大简化了计算工作量•

2 一类贝塞尔函数递推公式

值得注意的是, 公式(23)来源于多层厚壁圆筒振动或动力响应问题, 有明确的实际背景, 它还可以进一步推广•

易知对任意数 ν,

$$J_\nu(x)Y_\nu'(x) - Y_\nu(x)J_\nu'(x) = J_\nu(x)Y_{\nu-1}(x) - Y_\nu(x)J_{\nu-1}(x) = \frac{2}{\pi x} \tag{26}$$

及对任意数 ν, 及贝塞尔函数 $Z_\nu^{(1)}(x)$ 和 $Z_\nu^{(2)}(x)$, 其中 $Z_\nu^{(1)}(x)$ 和 $Z_\nu^{(2)}(x)$ 可为 $J_\nu(x)$、$Y_\nu(x)$、$H_\nu^{(1)}(x)$ 或 $H_\nu^{(2)}(x)$, 但 $Z_\nu^{(1)}(x)$ 和 $Z_\nu^{(2)}(x)$ 取不同类的贝塞尔函数, 则

$$Z_\nu^{(1)}(x)Z_\nu^{(2)'}(x) - Z_\nu^{(2)}(x)Z_\nu^{(1)'}(x) = Z_\nu^{(1)}(x)Z_{\nu-1}^{(2)}(x) - Z_\nu^{(2)}(x)Z_{\nu-1}^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi x}c^*,$$

其中

$$c^* = \begin{cases} 1 & Z_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x), \quad Z_\nu^{(2)}(x) = Y_\nu(x) \\ i & Z_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x), \quad Z_\nu^{(2)}(x) = H_\nu^{(1)}(x) \\ -i & Z_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x), \quad Z_\nu^{(2)}(x) = H_\nu^{(2)}(x) \\ -1 & Z_\nu^{(1)}(x) = Y_\nu(x), \quad Z_\nu^{(2)}(x) = H_\nu^{(1)}(x) \\ -1 & Z_\nu^{(1)}(x) = Y_\nu(x), \quad Z_\nu^{(2)}(x) = H_\nu^{(2)}(x) \\ -2i & Z_\nu^{(1)}(x) = H_\nu^{(1)}(x), \quad Z_\nu^{(2)}(x) = H_\nu^{(2)}(x), \end{cases} \tag{27}$$

(27)还可进一步推广得:

推论 1 对任意数 ν, 及任意整数 m, 若定义

$$G(m, \nu) = Z_{\nu-m}^{(1)}(x)Z_\nu^{(2)'}(x) - Z_{\nu-m}^{(2)}(x)Z_\nu^{(1)'}(x), \tag{28}$$

其中 $Z_\nu^{(1)}(x)$ 和 $Z_\nu^{(2)}(x)$ 取不同类的贝塞尔函数, 则

$$G(0, \nu) = \frac{2}{\pi x}c^*, \quad G(1, \nu) = \frac{2\nu}{\pi x^2}c^*,$$

$$G(m, \nu) = \frac{2(\nu - m + 1)}{x}G(m-1, \nu) - G(m-2, \nu) \cdot$$

证明 $G(1, \nu) = Z_{\nu-1}^{(1)}(x)\left[Z_{\nu-1}^{(2)}(x) - \frac{\nu}{x}Z_\nu^{(2)}(x)\right] -$

$Z_{\nu-1}^{(2)}(x)\left[Z_{\nu-1}^{(1)}(x) - \frac{\nu}{x}Z_\nu^{(1)}(x)\right] =$ 2

$\frac{\nu}{x}[Z_\nu^{(1)}(x)Z_{\nu-1}^{(2)}(x) - Z_\nu^{(2)}(x)Z_{\nu-1}^{(1)}(x)] =$

$\frac{\nu}{x}G(0, \nu) = \frac{2\nu}{\pi x^2}c^*,$

又因为

$$G(m,\nu)=\left[\frac{2(\nu-m+1)}{x}Z^{(1)}_{\nu-m+1}-Z^{(1)}_{\nu-m+2}\right]Z^{(2)'}_{\nu}(x)-$$
$$\left[\frac{2(\nu-m+1)}{x}Z^{(2)}_{\nu-m+1}-Z^{(2)}_{\nu-m+2}\right]Z^{(1)'}_{\nu}(x),$$

故 $$G(m,\nu)=\frac{2(\nu-m+1)}{x}G(m-1,\nu)-G(m-2,\nu),$$ 证毕•

推论 2 对任意数 ν, 及任意整数 m, 若定义

$$H(m,\nu)=Z^{(1)}_{\nu}(x)Z^{(2)}_{\nu-m}(x)-Z^{(2)}_{\nu}(x)Z^{(1)}_{\nu-m}(x), \tag{29}$$

其中 $Z^{(1)}_{\nu}(x)$ 和 $Z^{(2)}_{\nu}(x)$ 取不同类的贝塞尔函数, 则

$$H(0,\nu)=0,\quad H(1,\nu)=\frac{2}{\pi x^2}c^*,$$

$$H(m,\nu)=\frac{2(\nu-m+1)}{x}H(m-1,\nu)-H(m-2,\nu)•$$

证明 显然 $H(0,\nu)=0$,

$$H(1,\nu)=\frac{2}{\pi x}c^*,$$

因为

$$H(m,\nu)=\left[\frac{2(\nu-m+1)}{x}Z^{(2)}_{\nu-m+1}-Z^{(2)}_{\nu-m+2}\right]Z^{(1)}_{\nu}(x)-$$
$$\left[\frac{2(\nu-m+1)}{x}Z^{(1)}_{\nu-m+1}-Z^{(1)}_{\nu-m+2}\right]Z^{(2)}_{\nu}(x),$$

故 $$H(m,\nu)=\frac{2(\nu-m+1)}{x}H(m-1,\nu)-H(m-2,\nu),$$ 证毕•

对于推论 1 和推论 2, m 可为任意数, 其递推公式(28)与(29)式依然存立•

参 考 文 献

[1] Wang X, Gong Y N. An elastodynamic solution for multilayered cylinders[J]. Int J Engng Sci, 1992, **30**(1): 25~33

[2] Eringen A C, Sububi E S. Elastodynamics, Vol. 2, Linear Theory [M]. New York: Academic Press, 1975

[3] Yin Xiaochun. Radial impact of two concentric elastic hollow cylinders[A]. 19th ICTAM[C], Abstract KS7_04, Kyoto: 1996

[4] Gong Y N, Wang X. Radial Vibrations and dynamic stresses in elastic hollow cylinder[A], Structural Dynamics: Recent Advances[M]. England: Elsevier Science Publication Ltd, 1991, 137~147

[5] Gazis D C. Exact analysis of the plain strain vibration of thick_wall hollow cylinders[J]. The J Acoust Soc Amer, 1958, **30**(5): 786~794

Simplification of Frequency Equation of Multilayered Cylinders and Some Recursion Formulae of Bessel Functions

Yin Xiaochun
Department of Civil Engineering and Mechanics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210014, P R China

Abstract: In this paper the axially symmetric, radial vibration frequency equation of multilayered cylinders made of the same materials in plain strain state is studied. It is proved in this paper that the frequency equation of several contact hollow cylinders can be replaced by the frequency equation of a single hollow cylinder, so that the solving process is greatly simplified. Some recursion formulae of Bessel functions are derived from such practice problems as well.

Key words: frequency; vibration; Bessel functions