应用数学和力学, 第 20 卷 第 2 期(1999 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论文编号: 1000_0887(1999)02_0153_160

一类三阶向量微分方程解的有界性和周期性*

西密尔　通兹

玉珍翠延大学 教育学院, 土耳其, 凡城 65080

(钱伟长推荐)

摘要:　对某一类三阶向量微分方程周期解的存在性和解的毕竟有界性给出了充分条件•

关键词:　三阶非线性微分方程组;　毕竟有界性;　周期解
分类号:　O175.14　　文献标识码:　A

引　　言

考虑如下三阶非线性微分方程组

$$\dddot{X} + F(X, \dot{X})\ddot{X} + B\dot{X} + H(X) = P(t, X, \dot{X}, \ddot{X}), \tag{1}$$

其中 $X \in R^n$, R^n 为 n 维 Euclid 实空间 $R \times R \times \cdots \times R$($n$ 个), $R = (-\infty, \infty)$, F 为 $n \times n$ 矩阵函数, B 为 $n \times n$ 实常数对称矩阵, $H: R^n \to R^n$, $P: R \times R^n \times R^n \times R^n \to R^n$•　上标黑点表示对于 t 的微分•　函数 F, H 和 P 为连续函数•　假定(1) 的解存在且唯一•

本文的目的是给出方程(1) 的所有解毕竟有界的充分条件, 并得出方程(1) 至少存在一个周期解的充分条件•　当 $n = 1$ 时, 不同的三阶微分方程解的有界性和周期性, 在近 40 年引起了极大的关注•　文[1] 概述了许多这类研究结果•　本文对(1) 的研究源于 Afuwape[2], Ezeilo[3,4], Ezeilo 及 Tejumola[5], Meng[6] 和 Tung[7,8] 的工作•　在文[3] 中, Ezeilo 研究了如下向量微分方程的解的有界性:

$$\dddot{X} + A\ddot{X} + G(\dot{X}) + H(X) = P(t, X, \dot{X}, \ddot{X})• \tag{2}$$

在文[5] 中, Ezeilo 及 Tejumola 研究了微分方程(2) 的解的毕竟有界性, Afuwape[2] 对向量微分方程

$$\dddot{X} + A\ddot{X} + B\dot{X} + H(X) = P(t, X, \dot{X}, \ddot{X}) \tag{3}$$

进行了类似的研究•　最近, Meng[6] 研究了方程(3) 解的周期性和毕竟有界问题•　方程(3) 在 $n = 1$ 时的类似结果已由 Ezeilo[4] 得到•

为方便叙述, 我们采用了如下一些记号: 已知任一矩阵 D, 其特征值简记为 $\lambda_i(D)$($i = 1, 2, \dots, n$); 如果没有另外说明, $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i(D)$ 和 $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \lambda_i(D)$ 分别记为 δ_d 和 Δd•　已知任意两个向量

---

*　本文原文为英文, 吴承平译, 许政范校

来稿日期:　1997_08_16

X 和Y, 其分量分别为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, (X, Y) 表示它们的标量积 $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, 特别地, $\langle X, X\rangle = \|X\|^2$•

根据文[2]给出如下两个引理:

引理 1 若 D 为 $n\times n$ 实对称矩阵, 则对 R^n 中任意X, 有

$$\delta_d \|X\|^2 \leqslant \langle DX, X\rangle \leqslant \Delta_d \|X\|^2,$$

其中 δ_d, Δ_d 分别为D 的最小和最大特征值•

引理 2 若 Q, D 为任意两个 $n\times n$ 实交换对称矩阵, 则

(i) 积矩阵 QD 的特征值 $\lambda_i(QD)(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数并满足

$$\max_{1\leqslant j,k\leqslant n}\lambda_j(Q)\lambda_k(D) \geqslant \lambda_i(QD) \geqslant \min_{1\leqslant j,k\leqslant n}\lambda_j(Q)\lambda_k(D);$$

(ii) 矩阵 Q 与D 的和矩阵的特征值 $\lambda_i(Q+D)(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数并满足

$$\left\{\max_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j(Q)+\max_{1\leqslant k\leqslant n}\lambda_k(D)\right\} \geqslant \lambda_i(Q+D) \geqslant \left\{\min_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j(Q)+\min_{1\leqslant k\leqslant n}\lambda_k(D)\right\}•$$

1 毕竟有界性和周期解的存在性

首先讨论方程(1)的所有解的毕竟有界性•

定理 1 若以下条件得到满足:

(i) 对 R^n 中任意向量X, Y 存在一个 $n\times n$ 实连续算子 $A(X, Y)$, 使

$$H(X) = H(Y) + A(X, Y)(X - Y), \tag{1.1}$$

$A(X, Y)$ 的特征值 $\lambda_i(A(X, Y))(i=1,2,\cdots,n)$ 满足

$$0 < \delta_h \leqslant \lambda_i(A(X, Y)) \leqslant \Delta_h; \tag{1.2}$$

(ii) 存在 $n\times n$ 实常数对称矩阵A 和B, 且 A, B 有正特征值, $AB = BA$, 对 R^n 中任意X, Y 有$AA(X, Y) = A(X, Y)A$ 和$BA(X, Y) = A(X, Y)B$,

且对 R^n 中任意X, Y 有

$$\left.\begin{aligned}\delta_a &= \min_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\lambda_i(A), \lambda_i(F(X, Y))\right\},\\ \Delta_a &= \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left\{\lambda_i(A), \lambda_i(F(X, Y))\right\}\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

$$\delta_b = \min_{1\leqslant i\leqslant n}(\lambda_i(B)),\ \Delta_b = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(\lambda_i(B)), \tag{1.4}$$

且 $$\Delta h \leqslant k\delta_a\delta_b, \tag{1.5}$$

其中 k 为正常数, 且

$$k = \min\left\{\frac{\alpha(1-\beta)}{4(1+2\alpha)^2}, \frac{(1-\beta)\alpha\delta_b}{16(\alpha+\Delta_a)^2\delta_a}\right\}, \tag{1.6}$$

$\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$ 为常数, δ_a 和 Δ_a 由(1.3) 给出, δ_b 由(1.4) 给出;

(iii) 对 R^n 中任意X, Y,

$$0 \leqslant \min\left\{\lambda_i(F(X, Y) - A), \lambda_i(F(X, Y) - I)\right\} \leqslant \varepsilon, \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{1.7}$$

其中 ε 为一正常数, 且

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{\alpha}{8\Delta_a}\sqrt{\delta_a\delta_b}, \frac{\alpha}{4\Delta_b}\sqrt{\delta_a\delta_b\delta_h}, \frac{23}{32}\frac{\sqrt{\delta_a\delta_b\delta_h}}{\Delta_b}, \frac{\sqrt{5\delta_a\delta_b}}{4}\right\}, \tag{1.8}$$

Δ_b 由(1.4) 式给出, δ_h 由(1.2) 式给出;

(iv) 对 R^n 中任意X, Y, Z, 存在有限常数 $\delta_0 \geqslant 0$, $\delta_1 \geqslant 0$, 使向量 P 关于t 一致满足

$$\|P(t, X, Y, Z)\| \leqslant \delta_0 + \delta_1(\|X\| + \|Y\| + \|Z\|), \tag{1.9}$$

如果 $H(0)=0$ 且 δ_1 充分小, 则存在常数 $\Delta_1>0$ 使方程(1) 的每一解 $X(t)$ 满足

$$\|X(t)\|^2+\|\dot{X}(t)\|^2+\|\ddot{X}(t)\|^2\leqslant\Delta_1,\qquad 当\ t\geqslant T(X,\dot{X}_0,\ddot{X}_0),\tag{1.10}$$

$(X_0=X(0),\dot{X}_0=\dot{X}(0),\ddot{X}_0=\ddot{X}(0))$ •

证明　为方便计, 在方程(1) 中设 $\dot{X}=Y,\ddot{X}=Z$, 可得如下等价微分方程组:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{X}=Y,\ \dot{Y}=Z,\\&\dot{Z}=-F(X,Y)Z-BY-H(X)+P(t,X,Y,Z)\bullet\end{aligned}\right\}\tag{1.11}$$

定理 1 的实际证明将主要利用连续可微函数 $V=V(X,Y,Z)$ 的某些性质, 对 R^n 中任意 X,Y,Z, V 由下式给出:

$$\begin{aligned}2V=&\langle\beta(1-\beta)BX,BX\rangle+\langle2\alpha BY,Y\rangle+\langle\beta BY,Y\rangle+\langle\alpha Z,Z)\rangle+\\&\langle\alpha(Z+Y),Z+Y\rangle+\langle Z+AY+(1-\beta)BX,Z+\\&AY+(1-\beta)BX\rangle,\end{aligned}\tag{1.12}$$

其中 $\alpha>0,0<\beta<1$ 为常数•

如同 Meng[6] 中定理 1 的作法, 可得出

$$\begin{aligned}&\delta_2(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2)\leqslant2V\leqslant\\&\quad\delta_3(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2),\end{aligned}\tag{1.13}$$

其中 $\delta_2>0,\delta_3>0$ 为常数, 则由(1.13) 可得

$$V(X,Y,Z)\to\infty\qquad 当\ \|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2\to\infty\bullet$$

为完全证明定理 1, 对方程组(1.11) 的任意解 (X,Y,Z) 只要证明存在一个常数 $\Delta_1>0$, 使

$$\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2\leqslant\Delta_1,\qquad 当\ t\geqslant T(X_0,Y_0,Z_0),$$

$(X_0=X(0),Y_0=Y(0),Z_0=Z(0))$ 就够了•

对方程组(1.11) 的任意解 (X,Y,Z), 沿该解的路径, V 对于 t 的全导数为

$$\dot{V}=-U_1-U_2-U_3+U_4,\tag{1.14}$$

其中

$$\begin{aligned}U_1=&\langle\frac{1-\beta}{2}BX,H(X)\rangle+\langle\beta AY,BY\rangle+\langle\frac{\alpha}{4}FZ,Z\rangle,\\U_2=&\langle\frac{1-\beta}{4}BX,H(X)\rangle+\langle\alpha BY,Y\rangle+\langle(\alpha I+A)Y,H(X)\rangle+\langle\frac{\alpha}{2}FZ,Z\rangle+\\&\langle(F-A)Z,Z\rangle+\langle\alpha(F-I)Z,Z\rangle+\langle(1-\beta)(F-A)Z,BX\rangle+\\&\langle(F-A)Z,AY\rangle+\langle\alpha(F-I)Z,Y\rangle,\\U_3=&\langle\frac{1-\beta}{4}BX,H(X)\rangle+\langle\frac{\alpha}{4}FZ,Z\rangle+\langle(1+2\alpha)Z,H(X)\rangle,\\U_4=&\langle(1-\beta)BX+(A+\alpha I)Y+(1+2\alpha)Z,P(t,X,Y,Z)\rangle\bullet\end{aligned}$$

显然由(1.1) 和(iv) 有

$$H(X)=A(X,0)X\bullet\tag{1.15}$$

利用(1.2) 、(1.4) 和(1.15) 有

$$\langle\frac{1-\beta}{2}BX,H(X)\rangle=\langle\frac{1-\beta}{2}BX,A(X,0)X\rangle\geqslant\left(\frac{1-\beta}{2}\right)\delta_b\delta_h\|X\|^2,\tag{1.16}$$

从而由(1.3) 、(1.4) 和(1.16) 可得

$$\begin{aligned}U_1\geqslant&\left(\frac{1-\beta}{2}\right)\delta_a\delta_b\|X\|^2+\beta\delta_a\delta_b\|Y\|^2+\left(\frac{\alpha\delta_a}{4}\right)\|Z\|^2\geqslant\\&\delta_4(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2),\end{aligned}\tag{1.17}$$

其中

$$\delta_4=\min\left\{\left(\frac{1-\beta}{2}\right)\delta_b\delta_h,\ \beta\delta_a\delta_b,\ \frac{\alpha\delta_a}{4}\right\}\cdot 0\leqslant 使$$

如同[6]中定理 1,有

$$\langle(\alpha I+A)Y,H(X)\rangle\geqslant-k_1^2(\alpha+\Delta_a)\|Y\|^2-\frac{1}{4k_1^2}(\alpha+\Delta_a)\delta_h\Delta_h\|X\|^2\geqslant$$

$$-k_1^2(\alpha+\Delta_a)\|Y\|^2-\frac{1}{4k_1^2}(\alpha+\Delta_a)k\delta_a\delta_b\delta_h\|X\|^2 \tag{1.18}$$

和

$$\langle(1+2\alpha)Z,H(X)\rangle\geqslant-k_2^2(1+2\alpha)\|Z\|^2-\frac{1}{4k_2^2}(1+2\alpha)\delta_h\Delta_h\|X\|^2\geqslant$$

$$-k_2^2(1+2\alpha)\|Z\|^2-\frac{1}{4k_2^2}(1+2\alpha)k\delta_a\delta_b\delta_h\|X\|^2, \tag{1.19}$$

其中 $k_1>0,\ k_2>0$ 为待定常数•

类似地,由引理 1、引理 2、(1.3)、(1.4)和(1.7)有

$$\langle(1-\beta)(F-A)Z,BX\rangle\geqslant-(1-\beta)k_3^2\varepsilon\Delta_b\|Z\|^2-\frac{1}{4k_3^2}(1-\beta)\varepsilon\Delta_b\|X\|^2\geqslant$$

$$-k_3^2\varepsilon\Delta_b\|Z\|^2-\frac{1}{4k_3^2}(1-\beta)\varepsilon\Delta_b\|X\|^2, \tag{1.20}$$

$$\langle(F-A)Z,AY\rangle\geqslant-k_4^2\varepsilon\Delta_a\|Z\|^2-\frac{1}{4k_4^2}\varepsilon\Delta_a\|Y\|^2 \tag{1.21}$$

和

$$\langle\alpha(F-I)Z,Y\rangle\geqslant-k_5^2\alpha\varepsilon\|Z\|^2-\frac{1}{4k_5^2}\alpha\varepsilon\|Y\|^2, \tag{1.22}$$

其中 k_3,k_4,k_5 为待定正常数•

由引理 1、引理 2、(1.3)、(1.4)、(1.7)、(1.15)、(1.16)、(1.18)和(1.20)~(1.22)我们得到如下估计式

$$\begin{aligned}U_2\geqslant&\left[\left(\frac{1-\beta}{4}\right)\delta_b\delta_h-\left(\frac{1}{4k_1^2}(\alpha+\Delta_a)k\delta_a\delta_b\delta_h-\frac{(1-\beta)}{4k_3^2}\varepsilon\Delta_b\right)\right]\|X\|^2+\\&\left[\alpha\delta_b-k_1^2(\alpha+\Delta_b)-\left(\frac{1}{4k_4^2}\right)\varepsilon\Delta_a-\left(\frac{1}{4k_5^2}\alpha\varepsilon\right)\right]\|Y\|^2+\\&\left[\frac{\alpha\delta_a}{2}-k_3^2\varepsilon\Delta_b-k_4^2\varepsilon\Delta_a-k_5^2\alpha\varepsilon\right]\|Z\|^2\cdot\end{aligned} \tag{1.23}$$

类似地,由引理 1、引理 2、(1.3)、(1.16)、(1.19)有估计式

$$\begin{aligned}U_3\geqslant&\left[\left(\frac{1-\beta}{4}\delta_b\delta_h-\left(\frac{1}{4k_2^2}\right)(1+2\alpha)k\delta_a\delta_b\delta_h\right)\right]\|X\|^2+\\&\left[\frac{\alpha\delta_a}{4}-(1+2\alpha)k_2^2\right]\|Z\|^2\cdot\end{aligned} \tag{1.24}$$

由 Schwarz 不等式、引理 1、引理 2、(1.3)、(1.4)和(1.9)可看出

$$\begin{aligned}|U_4|\leqslant&[(1-\beta)\Delta_b\|X\|+(\alpha+\Delta_a)\|Y\|+(1+2\alpha)\|Z\|]\|P(t,X,Y,Z)\|\leqslant\\&\delta_5(\|X\|+\|Y\|+\|Z\|)[\delta_0+\delta_1(\|X\|+\|Y\|+\|Z\|)]\leqslant\\&3\delta_1\delta_5(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2)+\sqrt{3}\delta_0\delta_5(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2)^{1/2},\end{aligned} \tag{1.25}$$

其中 $\delta_5 = \max\left\{(1-\beta)\Delta_b, (\alpha+h_1\Delta_a), (1+2\alpha)\right\}$•
令

$$k_1^2 = \frac{\alpha\delta_b}{8(\alpha+\Delta_a)},\quad k_3^2 = \frac{2^{-1}\alpha\delta_a}{\sqrt{\delta_a\delta_b\delta_h}},\quad k_4^2 = \frac{8^{-1}\delta_a}{\sqrt{\delta_a\delta_b}},\quad k_5^2 = \frac{2^{-1}\delta_a}{\sqrt{5\delta_a\delta_b}},$$

则由(1.6)、(1.8)可得

$$U_2 \geqslant 0• \tag{1.26}$$

类似地令 $k_2^2 = \alpha\delta_a/4(1+2\alpha)$, 则由(1.6) 显然有

$$U_3 \geqslant 0• \tag{1.27}$$

综合估计式(1.17)、(1.25)~(1.27)于(1.14)式中, 得

$$\dot{V} \leqslant -2\delta_6(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2)+\delta_7(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2)^{1/2},$$

其中 $\delta_6 = (\delta_4-3\delta_1\delta_5)/2$, $\delta_1 < 3^{-1}\delta_5^{-1}\delta_4$, $\delta_7 = \sqrt{3}\delta_0\delta_5$•
此后的证明类似于[6]中定理1, 此处略去详细过程• 定理证毕•

定理2　若以下条件得到满足:

(ⅰ) 定理1中的条件(ⅰ)和(ⅳ), (1.3)和(1.4)保持有效;

(ⅱ) 常数对称矩阵 A 和 B 具有正的特征值, $AB = BA$, 对 R^n 中任意 X, Y, 有

$$A\mathrm{A}(X,Y) = \mathrm{A}(X,Y)A,\quad B\mathrm{A}(X,Y) = \mathrm{A}(X,Y)B,$$

$$0 \leqslant \lambda_i(F(X,Y)-A) \leqslant \varepsilon,\qquad (i = 1,2,\cdots,n), \tag{1.28}$$

其中 ε 为一正的常数, 且

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{4^{-1}\delta_a\sqrt{\alpha\beta\delta_b}}{\sqrt{2}\Delta_a}, \frac{\sqrt{\alpha\delta_a\delta_b\delta_h}}{4\Delta_b}\right\}, \tag{1.29}$$

则

$$\Delta_h \leqslant k\delta_a\delta_b, \tag{1.30}$$

其中 k 为一正的常数, 且

估计 $$k = \min\left\{\frac{\alpha(1-\beta)}{2(1+\alpha)^2}, \frac{(1-\beta)\beta\delta_b}{8\Delta_a^2}\right\}, \tag{1.31}$$

$\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$ 为常数, δ_a 和 Δ_a 由(1.3)式给出, δ_b 和 Δ_b 由(1.4)式给出• 如果 $H(0) = 0$, δ_1 充分小, 则定理1的结论成立•

证明　在定理2的证明中, 我们主要要利用到连续函数 $V = V(X, Y, Z)$, 对 R^n 中任意 X, Y, Z, V 由下式定义:

$$\begin{aligned} 2V = {} & \langle\beta(1-\beta)BX, BX\rangle + \langle\alpha BY, Y\rangle + \langle\beta BY, Y\rangle + \langle\alpha Z, Z\rangle + \\ & \langle Z+AY+(1-\beta)BX, Z+AY+(1-\beta)BX\rangle, \end{aligned} \tag{1.32}$$

其中 $\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$ 为常数•

通过重复利用引理1和引理2, 由(1.32)很容易得到:

$$\delta_2(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2) \leqslant 2V \leqslant \delta_3(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2), \tag{1.33}$$

其中 $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ 为常数•

令 (X, Y, Z) 为(1.11)的任意解, 则沿解的路径, V 对 t 的整体导数为

$$\dot{V} = -U_1-U_2-U_3+U_4, \tag{1.34}$$

其中

$$U_1 = \left\langle\left(\frac{1-\beta}{2}\right)BX, H(X2)\right\rangle + \left\langle\frac{1}{2}\beta ABY, Y\right\rangle + \left\langle\frac{\alpha}{4}FZ, Z\right\rangle,$$

$$U_2=\left\langle\frac{1-\beta}{4}BX,H(X)\right\rangle+\left\langle\frac{1}{2}\beta ABY,Y\right\rangle+\langle AY,H(X)\rangle+\left\langle\frac{\alpha}{4}FZ,Z\right\rangle+$$
$$\langle(F-A)Z,Z\rangle+\langle(F-A)Z,AY\rangle+\langle(1-\beta)(F-A)Z,BX\rangle,$$
$$U_3=\left\langle\frac{1-\beta}{4}BX,H(X)\right\rangle+\left\langle\frac{\alpha}{2}FZ,Z\right\rangle+\langle(\alpha+1)Z,H(X)\rangle,$$
$$U_4=\langle(1-\beta)BX+AY+(\alpha+1)Z,P(t,X,Y,Z)\rangle\cdot$$

再由(1.3)、(1.4)、(1.16)得到

$$U_1\geqslant\left(\frac{1-\beta}{2}\delta_b\delta_h\right)\|X\|^2+\frac{\beta}{2}\delta_a\delta_b\|Y\|^2+\left(\frac{\alpha\delta_a}{4}\right)\|Z\|^2\geqslant$$
$$\delta_4(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2),\tag{1.35}$$

其中

$$\delta_4=\min\left\{\left(\frac{1-\beta}{2}\right)\delta_b\delta_h,\ \frac{\beta}{2}\delta_a\delta_b,\ \frac{\alpha\delta_a}{4}\right\}\cdot$$

如同[6]中定理2,我们有

$$\langle AY,H(X)\rangle\geqslant-k_1^2\Delta_a\|Y\|^2-\frac{1}{4k_1^2}\Delta_a k\delta_a\delta_b\delta_h\|X\|^2,\tag{1.36}$$

其中 k_1 为待定常数,在稍后的证明中定义·

类似地,容易得出

$$\langle(1-\beta)(F-A)Z,BX\rangle\geqslant-(1-\beta)k_2^2\varepsilon\Delta_b\|Z\|^2-\frac{1}{4k_2^2}(1-\beta)\varepsilon\Delta_b\|X\|^2\geqslant$$
$$-(1-\beta)k_2^2\varepsilon\Delta_b\|Z\|^2-\frac{1}{4k_2^2}\varepsilon\Delta_b\|X\|^2,\tag{1.37}$$

$$\left\langle\frac{\alpha}{4}FZ,Z\right\rangle+\langle(F-A)Z,Z\rangle\geqslant\frac{\alpha\delta_a}{4}\|Z\|^2,\tag{1.38}$$

$$\langle(F-A)Z,Y\rangle\geqslant-k_3^2\varepsilon\Delta_a\|Z\|^2-\frac{1}{4k_3^2}\varepsilon\Delta_a\|Y\|^2,\tag{1.39}$$

$$\langle(\alpha+1)Z,H(X)\rangle\geqslant-k_4^2(\alpha+1)\|Z\|^2-\frac{1}{4k_4^2}(\alpha+1)k\delta_a\delta_b\delta_h\|X\|^2,\tag{1.40}$$

其中 k_2,k_3,k_4 为待定正常数·

由(1.16)、(1.36)~(1.39)给出的估计式,有

其

$$U_2\geqslant\left(\frac{1}{4}\right)\left[(1-\beta)\delta_b\delta_h-\frac{1}{k_1^2}\Delta_a k\delta_a\delta_b\delta_h-\frac{1}{k_2^2}(1-\beta)\varepsilon\Delta_b\right]\|X\|^2+$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)\left[\beta\delta_a\delta_b-2k_1^2\Delta_a-\frac{1}{2k_3^2}\varepsilon\Delta_a\right]\|Y\|^2+\left[\frac{\alpha\delta_a}{4}-k_2^2\varepsilon\Delta_b-k_3^2\varepsilon\Delta_a\right]\|Z\|^2\cdot$$

类似容易得出

$$U_3\geqslant\left(\frac{1}{4}\right)\left[(1-\beta)\delta_b\delta_h-\frac{1}{k_4^2}(\alpha+1)k\delta_a\delta_b\delta_h\right]\|X\|^2+$$
$$\left[\frac{\alpha\delta_a}{2}-k_4^2(\alpha+1)\right]\|Z\|^2\cdot$$

取

$$k_1^2=\frac{\beta\delta_a\delta_b}{4\Delta_a},\quad k_2^2=\frac{2^{-1}\alpha\delta_a}{\sqrt{\alpha\delta_a\delta_b\delta_h}},\quad k_3^2=\frac{4^{-1}\alpha}{\sqrt{2\alpha\beta\delta_b}},$$

并利用(1.29)和(1.31),注意到 $\varepsilon\leqslant\sqrt{2\alpha\beta\delta_b}\,\delta_a/2\Delta_a$(由1.29),可得 $U_2\geqslant0$·

取 $k_4^2=\alpha\delta_a/2(\alpha+1)$, 注意到 $k\leqslant(1-\beta)\alpha/2(\alpha+1)^2$(由(1.31), 可得 $U_3\geqslant 0$.

现在来给出 U_4 的估计. 由 Schwarz 不等式有

$$
\begin{aligned}
|U_4| &\leqslant [(1-\beta)\Delta_b\|X\|+\Delta_a\|Y\|+(\alpha+1)\|Z\|]\,\|P(t,X,Y,Z)\|\leqslant\\
&\delta_5(\|X\|+\|Y\|+\|Z\|)[\delta_0+\delta_1(\|X\|+\|Y\|+\|Z\|)]\leqslant\\
&3\delta_1\delta_5(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2)+\\
&\sqrt{3}\,\delta_0\delta_5(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2)^{1/2},
\end{aligned}
$$

其中 $\delta_5=\max\{(1-\beta)\Delta_b,\Delta_a,(1+\alpha)\}$.

综合 U_1, U_2, U_3 和 U_4 的估计式于(1.34) 式, 得

$$
\dot{V}\leqslant-2\delta_6(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2)+\delta_7(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2)^{1/2}, \tag{1.41}
$$

其中 $\delta_6=(\delta_4-3\delta_1\delta_5)/2,\ \delta_1<3^{-1}\delta_5^{-1}\delta_4,\ \delta_7=\sqrt{3}\,\delta_0\delta_5$.

如果取 $(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2)^{1/2}\geqslant\delta_8=2\delta_7/\delta_6$, 不等式(1.41) 变为

$$
\dot{V}\leqslant-\delta_6(\|X\|^2+\|Y\|^2+\|Z\|^2).
$$

余下的证明过程同定理 1.

注 定理 1 和定理 2 是相互独立的.

现在来研究方程(1) 周期解的存在性.

定理 3 设方程组(1.11) 满足定理 1 的所有条件, 若下列条件成立:

$P(t,X,Y,Z)$ 为 t 的 w_周期函数,

即 $P(t+w,X,Y,Z)=P(t,X,Y,Z)$,

则方程组(1.11) 至少存在一个 w_周期解 $(X(t),Y(t),Z(t))$.

证明 仿照[6] 中定理 3 的方法, 立即可证明方程组(1.11) 至少存在一个 w_周期解 $(X(t),Y(t),Z(t))$.

定理 4 若(1.11) 满足定理 2 的所有条件, 并满足条件

$P(t+w,X,Y,Z)=P(t,X,Y,Z)$,

其中 w 为 $P(t,X,Y,Z)$ 的周期.

则方程组(2.11) 至少存在一个 w_周期解 $(X(t),Y(t),Z(t))$.

证明 本定理的证明与定理 3 的证明相同, 故不赘述.

参 考 文 献

[1] Reissig R, Sansone G, Conti R. Nonlinear Differential Equations of Higher Order[M]. Noordhoff International Publishing, 1974

[2] Afuwape A U. Ultimate boundedness results for a certain system of third order nonlinear differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1983, **97**: 140~150

[3] Ezeilo J O C. J Math Anal Appl, 1967, **18**: 395~416

[4] Ezeilo J O C. New properties of the equation $\dddot{x}+a\ddot{x}+b\dot{x}+h(x)=p(t,x,\dot{x},\ddot{x})$ for certain special values of the incrementary ratio $y^{-1}\{h(x+\varepsilon y)-h(x)\}$ [A]. In: P Janssens, J Mawhin, N Rouche eds. Equations Differentielles et Fonctionelles Nonlineaires[C]. Paris: Hermann, 1973, 447~462

[5] Ezeilo J O C, Tejumola H O. Atti Accad Naz Lincei Renol Cl Sci Fis Mat Natur[M]. 1975, **50**: 143~151

[6] Meng F W. Ultimate boundedness results for a certain system of third order nonlinear differential e-

quations[J]. J Math Anal Appl, 1993, **177**: 496~ 509

[7] Tun,, C. A global stability result for a certain system of fifth order nonlinear differential equations[J]. University of Marmara, The Journal of Sciences, **10** (in Press)

[8] Tun,, C. Boundedness and stability results for a certain system of fifth order nonlinear differential equations[J]. University of Istanbul, Faculty of Science, The Journal of Mathematics (to appear)

[9] Browder F E. On a generalization of the Schauder fixed point theorem[J]. Duke Math J, 1959, **26**: 291 ~ 303

[10] Tiryaki A, Tun,, C. Boundedness and stability properties of solutions of certain fourth order differential equations via the intrinsic method[J]. Analysis, 1996, **16**: 325~ 334

[11] Tun,, C. A ultimate boundedness result for the solutions of certain fifth order nonlinear differential equations[J]. PUJM, 1997, **30**

[12] Yoshizawa T. Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions[M]. New York/Heidelberg: Springer_Verlag, 1978

On the Boundedness and Periodicity of the Solutions of a Certain Vector Differential Equation of Third_Order

Cemil Tun,,

University of Y z nc YIL, Faculty of Education, 65080, VAN, TURKEY

Abstract: There are given sufficient conditions for the ultimate boundedness of solutions and for the existence of periodic solutions of a certain vector differential equation of third order.

Key words: system of non_linear differential equations of the third order; ultimate boundedness; periodic solutions