应用数学和力学, 第 20 卷 第 2 期(1999 年 2 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

论文编号: 1000_0887(1999)02_0201_210

摩擦问题中的边界混合变分不等式*

丁方允[1], 张 欣[1], 丁 睿[2]

[1] 兰州大学 数学系, 兰州 730000; [2] 西南交通大学 力学博士后流动站, 成都 610031

(程昌钧推荐)

摘要: 本文以弹性力学中的摩擦问题为背景, 讨论了非线性、不可微的混合变分不等式解的存在唯一性, 给出相应的边界变分不等式及其解的存在唯一性· 为使用边界元方法数值求解提供了理论依据·

关键词: 混合变分不等式; 摩擦问题; Sobolev 空间

分类号: O175.2 文献标识码: A

引 言

本文所讨论的静态摩擦问题是一种非线性单侧边值问题· 众所周知, 一般线性椭圆边值问题往往对应某个线性变分方程, 其解的存在唯一性通常可利用 Lax_Milgram 定理或 Babuska 定理获得· 然而这里的单侧边值问题却对应了一种混合变分不等式[1]· 由于其中含有非线性不可微泛函项, 因此无法采用通常线性化手段, 从而有关线性变分不等式解的存在唯一性定理也不适用· 由此可见, 这里所讨论的摩擦问题解的存在唯一性问题较一般边值问题的难度大· 在第 1 节中, 首先简化摩擦问题的单侧边值问题, 然后给出了一个混合变分不等式解的存在唯一性定理, 它的已知条件同线性变分不等式解的存在唯一性定理中的已知条件十分相似· 在第 2 节中把在区域上作积分的区域型变分不等式化成在边界上作积分的边界型变分不等式, 这样可避免使用有限元方法, 代之以边界元方法, 这对减少计算量, 提高计算精度十分有效, 尤其对非线性变分不等式这种减少计算量的考虑是很有必要的· 然而采用边界元方法的基础需先建立相应的边界变分不等式, 并证明其解是存在唯一的· 这即是本文的主要内容· 因篇幅有限, 关于边界混合变分不等式的边界元方法及有关误差估计将另文给出·

假设 Ω 是 R^2 中具有光滑边界 Γ 的有界开区域, 设 $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \phi$ 且 $\mathrm{meas}(\Gamma_0) > 0$, 定义

$$K = \left\{ u \in H^1(\Omega),\ u|_{\Gamma_0} = 0 \right\};\quad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x + \int_\Gamma u \cdot v\,\mathrm{d}x;$$

$$G(v) = c\int_{\Gamma_1} |v|\,ds,\quad c > 0 \text{ 是给定的常数};$$

$$K = \left\{ v \text{ 在 } \Gamma \text{ 上的迹},\ v \in K \right\} = \overset{*}{H}{}^{1/2}(\Gamma);$$

---

* 收稿日期: 1997_10_06; 修订日期: 1998_09_02
基金来源: 甘肃省自然科学基金资助项目(ZR_96_002)
作者简介: 丁方允(1941~), 男, 副教授

$$\overset{*}{H}^{-1/2}(\Gamma) = \left\{\mu \in H^{-1/2}(\Gamma),\ \int_\Gamma \mu \mathrm{d}s = 0\right\};\qquad 2$$

$$V_\alpha = \overset{*}{H}^{1/2+\alpha}(\Gamma) \times \overset{*}{H}^{-1/2+\alpha}(\Gamma),$$

其中$H^m(\Gamma)$ 和$H^\alpha(\Gamma)$ 分别表示整数和分数次的 Sobolev 空间, 且设$f \in H^1(\Gamma)$• 易见K 是$H^1(\Gamma)$ 上的闭线性子空间•

1　摩擦问题与相应的单侧边值问题

1.1　极值问题与变分不等式

由文[3] 知, 服从 Coulomb 定律的线性弹性体双侧接触的静态摩擦问题, 其变分形式的提法是求泛函

$$\frac{1}{2}a(v,v) - \int_\Omega fv\mathrm{d}x + c\int_{\Gamma_1} |v| \mathrm{d}s$$

在K 上的极小点u, 它可等价地归化为解如下混合变分不等式:

$$\text{求 } u \in K, \text{满足 } a(u, v-u) \geqslant G(u) - G(v) + \int_\Omega f(v-u)\mathrm{d}x, \quad \forall v \in K, \tag{1.1}$$

不等号右端的泛函$G(\cdot)$ 是不可微的•

1.2　变分不等式与边值问题

定理 1.1　问题(1.1) 的解可由下列非齐次方程的单侧边值问题表征:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & \text{a.e. } \Omega \text{ 中;} \\ u = 0, & \text{a.e. } \Gamma_0 \text{ 上;} \\ |\partial u/\partial n| \leqslant c, & \text{a.e. } \Gamma_1 \text{ 上•} \end{cases} \tag{1.2}$$

•

证明　令$u \in K$ 满足(2.1), 由 Green 公式有:

$$\int_\Omega(-\Delta u)(v-u)\mathrm{d}x + \int_\Omega u(v-u)\mathrm{d}x + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\int_\Omega f(v-u)\mathrm{d}x + c\int_{\Gamma_1}(|u| - |v|)\mathrm{d}s, \qquad \forall v \in K• \tag{1.3}$$

取$v = w + u$, 其中$w \in H_0^1(\Omega)$, 显然$v \in K$, 且$(v-u)|_\Gamma = w|_\Gamma = 0$, 则

$$\int_\Omega(-\Delta u + u)w\mathrm{d}x \geqslant \int_\Omega fw\mathrm{d}x, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

上式对于$-w \in H_0^1(\Omega)$ 也成立, 因而

$$\int_\Omega(-\Delta u + u)w\mathrm{d}x = \int_\Omega fw\mathrm{d}x, \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega),$$

从而在广义函数意义下得到:

$$-\Delta u + u = f, \qquad \Omega \text{ 中•}$$

将上式代入(1.3) 式,

$$\int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial u}{\partial n}v + c|v|\right)\mathrm{d}s - \int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial u}{\partial n}u + c|u|\right)\mathrm{d}s \geqslant 0, \qquad \forall v \in K• \tag{1.4}$$

记$\Psi = \left\{\phi \in H^{1/2}(\Gamma) \mid \operatorname{supp}\phi \subset\subset \Gamma\right\}$, 若$\phi \in \Psi$, 在(1.4) 中取$v = \pm\lambda\phi$, $\lambda \geqslant 0$, 于是

$$\lambda\int_{\Gamma_1}\left[\pm\frac{\partial u}{\partial n}\phi + c|\phi|\right]\mathrm{d}s - \int_{\Gamma_1}\left[\frac{\partial u}{\partial n}u + c|u|\right]\mathrm{d}s \geqslant 0, \qquad \forall \lambda \geqslant 0,\ \forall \phi \in \Psi•$$

当$\lambda = 0$, 有

$$\int_{\Gamma_1}\left[\frac{\partial u}{\partial n}u + c|u|\right]\mathrm{d}s\Gamma \leqslant 0, \tag{1.5}$$

于是必有 $\int_{\Gamma_1}\left[\pm\frac{\partial u}{\partial n}\phi + c|\phi|\right]\mathrm{d}s \geqslant 0, \qquad \forall \phi \in \Psi,$

即
$$\left|\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial n}\phi\mathrm{d}s\right| \leqslant c\int_{\Gamma_1}|\phi|\mathrm{d}s, \qquad \forall \phi \in \Psi. \tag{1.6}$$

(1.6) 表明映射

$$\phi \to \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial n}\phi\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_1}\left(c^{-1}\frac{\partial u}{\partial n}\right)c\phi\mathrm{d}s$$

在 Ψ 上连续, Ψ 具有由 $L^1(\Gamma)$ 诱导的拓扑, $L^1(\Gamma)$ 上的范数是

$$\int_{\Gamma_1}c|\phi|\mathrm{d}s.$$

由于 Ψ 在 $L^1(\Gamma)$ 上稠密, 于是由有界线性泛函在稠集上的保范延拓定理及 (1.6) 知

$$c^{-1}\partial u/\partial n \in L^\infty(\Gamma), \text{ 且范数 } \leqslant 1$$

即
$$|\partial u/\partial n| \leqslant c, \qquad \text{p.p. } \Gamma_1 \text{ 上}. \tag{1.7}$$

反之, 若(1.2) 成立, 则

$$(\partial u/\partial n)(v-u) + c(|v|-|u|) \geqslant 0, \qquad \Gamma \text{ 上}, \forall v \in K. \tag{1.8}$$

对 $-\Delta u + u = f$ 的两端用 $(v-u)$ 作内积, 然后利用 Green 公式, 可得

$$a(u, v-u) - \int_\Omega f(v-u)\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\mathrm{d}s = 0, \tag{1.9}$$

利用(1.8) 有

$$a(u, v-u) - \int_\Omega f(v-u)\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\mathrm{d}s +$$
$$\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\mathrm{d}s + c\int_{\Gamma_1}(|v|-|u|)\mathrm{d}s \geqslant 0, \qquad \forall v \in K. \qquad \blacksquare$$

1.3 边值问题的简化

设 $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ 是下列齐次边值问题的弱解

$$\begin{cases} -\Delta u_0 + u_0 = f, & \Omega \text{ 中}, \\ u_0 = 0, & \Gamma_0 \text{ 上}, \end{cases} \tag{1.10}$$

因此, 对于 $u \in K, f \in L^2(\Omega)$, 类似 (1.9) 的推导, 由 Green 公式有

$$-a(u_0, v-(u-u_0)) = -\int_\Omega f(v-(u-u_0))\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_0}{\partial n}(v-(u-u_0))\mathrm{d}s. \tag{1.11}$$

由(1.1) 知, 若 u 还是 (1.1) 的弱解, 则满足下列不等式

$$a(u, v-(u-u_0)) \geqslant G(u) - G(v+u_0) + \int_\Omega f(v-(u-u_0))\mathrm{d}x, \qquad \forall v \in K. \tag{1.12}$$

将(1.11) 和(1.12) 相加, 有

$$a(u-u_0, v-(u-u_0)) \geqslant G(u) - G(v+u_0) - \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u_0}{\partial n}(v-(u-u_0))\mathrm{d}\Gamma.$$

令 $w = u - u_0$, 注意到 $u_0|_\Gamma = 0$, 记

$$H(w) = \int_{\Gamma_1}^{+}\left[\frac{\partial u_0}{\partial n}w + c|w|\right]\mathrm{d}s,$$

则 w 是下面变分不等式问题的解

求 $w \in K$, 满足 $a(w, v-w) \geqslant H(w) - H(v), \quad \forall v \in K$• (1.13)

因此问题(1.1) 可分为两个问题, 即边值问题(1.10) 和变分不等式问题

求 $u \in K$, 满足 $a(u, v-u) \geqslant H(u) - H(v), \quad \forall v \in K$• $(1.1)^*$

众所周知当 $f \in L^2(\Omega)$ 时, 边值问题(1.10) 在 $H_0^1(\Omega)$ 中存在唯一解 u_0, 若 u 是 $(1.1)^*$ 的解, 则 $u = u + u_0$ 是(1.1) 的解•

与问题(1.1) 相比较, (1.13) 相当于(1.1) 中 $f = 0$ 的情形, 据定理 1.1, 问题(1.13) 可由下列齐次方程单侧问题表征:

$$\begin{cases} -\Delta w + w = 0, & \text{a.e. } \Omega \text{ 中}, \\ w = 0, & \text{a.e. } \Gamma_0 \text{ 上}, \\ |\partial w/\partial n + \partial u_0/\partial n| \leqslant c, & \text{a.e. } \Gamma_1 \text{ 上}• \end{cases} \quad (1.14)$$

, 若

(1.14) 和(1.13) 的等价性与(1.1) 和(1.2) 的等价性证明类似•

1.4 变分不等式问题(1.1)、$(1.1)^*$ 的解的存在唯一性

假设 Γ 是 Ω 的正则边界, 且 $\Gamma = \Gamma_F \cup \Gamma_U$, $\Gamma_F \cap \Gamma_U = \Phi$, Γ_F 是边界 Γ 上服从摩擦条件的一部分, Γ_U 则是服从古典型条件的部分• 记

$$V = \left\{v \mid v = \left\{v_i\right\}, v_i \in H^1(\Omega), i = 1, 2\right\} = (H^1(\Omega))^2, \quad 1.$$

$$V_0 = \left\{v \mid v \in V, v = 0, \ \Gamma_U \text{ 上}\right\},$$

$$U_{ad} = \left\{v \mid v \in V, v_i = U_i, U_i \in H^{1/2}(\Gamma), \Gamma_U \text{ 上}\right\}•$$

设 $F \in (L^2(\Gamma_F))^2$ 且映射 $v \to \int_{\Gamma_F} Fv\,\mathrm{d}s$ 在 V 上连续;

令 $$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) - \int_{\Gamma_F} Fv\,\mathrm{d}s, \qquad \text{对 } v \in U_{ad}• \quad (*)$$

引理 1.1[3] 设 Ω 是一边界正则的有界开集, $\mathrm{meas}(\Gamma_U) > 0$, $\Gamma_U \subset \Gamma$, $a(u, v)$ 对称, 若存在 $\alpha_0 > 0$ 使

$$a(v, v) \geqslant \alpha_0 \|v\|_V^2, \qquad \forall v \in V_0,$$

则对 $\forall v \in U_{ad}$, 当 $\|v\|_V \to +\infty$ 时, $J(v) \to +\infty$•

引理 1.2[3] 引入泛函

$$G(v) = \int_{\Gamma_F} g(x)|v_T(x)|\,\mathrm{d}s, \qquad \forall v \in V,$$

设其在 V 上是连续的、凸的、不可微的泛函, 其中 $g(x) \in L^\infty(\Gamma_F)$, $v_T = v - nv_N$, $n = \left\{n_i\right\}$, $v_N = v_i n_i$, $\forall v \in V$• 对变分不等式

$$\begin{cases} \text{求 } u \in V, \text{满足} \\ u = U, \qquad \Gamma_U \text{ 上}, \\ a(u, v-u) + G(v) - G(u) \geqslant (f, v-u) + \displaystyle\int_{\Gamma_F} F_N(v_N - u_N)\,\mathrm{d}s, \\ \forall v \in V, v = U \quad \Gamma_U \text{ 上}, F_N = F_i n_i, n = \left\{n_i\right\}, \end{cases} \quad (**)$$

4.

若 $a(u, v)$ 对称, 则问题(**)等价于在 U_{ad} 上求泛函

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) + G(v) - (f, v) - \int_{\Gamma_F} F_N v_N \, ds$$

的最小值. 若 $F_N \in L^\infty(\Gamma_F), f \in L^2(\Omega), G(v) \geqslant 0$, 问题(**)有唯一解.

注 1　U_{ad} 中若 $U_i = 0$ 时, $U_{ad} \equiv V_0$, 从而上述结论对 V_0 也成立.

注 2　在[3]中引理 2.1 与引理 2.2 是在 R^3 中证明的, 对 R^2 可类似推出结论.

定理 1.2　设 $f \in L^2(\Omega)$, $a(\cdot, \cdot)$ 是对称的, K_强制的, 且 $G(v)$ 是连续、凸、不可微泛函, 则问题(1.1)在 K 中有唯一解.

证明　事实上, 问题(1.1)等价于求泛函

$$I(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f, v) + c\int_{\Gamma_1} | v | \, ds$$

在 K 上的极小点.

把 Γ_1 当作 Γ_F, Γ_0 当作 Γ_U, 则泛函 $I(v)$ 是引理 1.2 中 $J(v)$ 在 $F_N \equiv 0$ 时的特殊情形, 因此只需验证 $I(v)$, $a(u, v)$ 及 $G(v) = c\int_{\Gamma_1} | v | \, ds$ 满足引理 1.1 及引理 1.2 的条件.

由题设知, Ω 是 R^2 中有界开区域, 且 Γ 光滑, 知 Γ 正则. 又 $\Gamma_0 \subset \Gamma$, $\mathrm{meas}(\Gamma_0) > 0$, $K = \left\{ u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma_0} = 0 \right\}$(即引理 1.1 中的 V_0). 这里

$$a(v, v) = \int_\Omega (\nabla v \cdot \nabla v + v^2) dx = \int_\Omega (v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2 + v^2) dx = \| v \|_{H^1(\Omega)},$$

且 $a(u, v)$ 对称.

由引理 1.1 及 $G(v) \geqslant 0$, 有

$$I(v) \to +\infty, \qquad \text{当 } \| v \|_{H^1(\Omega)} \to +\infty, \ \forall v \in K$$

又

$$v \to G(v) = \int_{\Gamma_1} c | v | \, ds$$

是连续的, 事实上, 设依 $H^{1/2}(\Gamma)$ 中的范数 $v_n \to v_0$, 则由 Sobolev 嵌入定理

$$\left| \int_{\Gamma_1} (c | v_n | - c | v_0 |) ds \right| \leqslant c\int_{\Gamma_1} | v_n - v_0 | \, ds \leqslant c_1 \| v_n - v_0 \|_{1/2, \Gamma_1}, \qquad (c_1 \text{ 为常数}),$$

故映射 $v \to G(v)$ 连续.

容易验证 $G(v) \geqslant 0$, 凸, 且不可微, 利用引理 1.2, 知问题(1.1)在 K 中有唯一解. ■

定理 1.3　问题 $(1.1)^*$ (即(1.13))有唯一解.

证明　将 $(1.1)^*$ 改写成

$$\begin{cases} \text{求 } u \in K, \text{满足} \\ a(u, v - u) \geqslant G(u) - G(v) - \displaystyle\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_0}{\partial n}(v - u) ds, \end{cases}$$

由于

$$-\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_0}{\partial n} v \, ds$$

是(1.1)中 (f, v) 的特殊情形, 因此由定理 1.2 知 $(1.1)^*$ 有唯一解. ■

2　非线性不可微的边界变分不等式的建立

2.1　边界积分方程的建立

设 u 是问题(1.1)* 的解, 注意到 u 在 Ω 内满足齐次 Helmholtz 方程

$$-\Delta u+u=0, \tag{2.1}$$

其基本解是零阶修正 Bessel 函数 $K_0(|r|)$, $|r|=|x-y|$, 它满足下面方程:

$$\frac{d^2K_0(r)}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dK_0(r)}{dr}-K_0(r)=0,\qquad r\neq 0; \tag{2.2}$$

在 $r=0$ 附近有展式

$$K_0(r)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^{2n}\ln\frac{1}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}b_nr^{2n},\qquad a_0=1; \tag{2.3}$$

在无穷远处有展式

$$K_0(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2r}}e^{-r}+\cdots, \tag{2.4}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}K_0(r)=0$.

设 $\lambda=\partial u/\partial n\in H^{-1/2}(\Gamma)$, n 为单位外法向量, 对(1.1)应用 Green 公式, 有

$$u(x)=\frac{1}{2}\int_\Gamma\frac{\partial K_0(|x-y|)}{\partial n_y}u(y)ds_y-\frac{1}{2}\int_\Gamma K_0(|x-y|)\lambda(y)ds_y,\qquad\forall x\in\Omega \tag{2.5}$$

即 $-\Delta u+u=0$ 的解可表成"双层位势"和"单层位势"的差. 这里的"单层位势"和"双层位势"不仅形式上与位势理论中的单层位势、双层位势类似, 而且具有单层位势和双层位势的性质[4]. 为了得到便于数值计算的等价的边界变分公式, 下面讨论"双层位势"的方向导数在穿越 Γ 时的性质.

令

$$v(y)=\int_\Gamma\varphi(x)\frac{\partial}{\partial n_x}K_0(|x-y|)ds_x,\qquad\forall y\in\Omega, \tag{2.6}$$

其中 $\varphi(x)\in H^{1/2}(\Gamma)$ 是给定的函数, 对任意 $y\in\Omega$ 和单位向量 $n_y=(n_y^1,n_y^2)$, 有

$$\frac{\partial v(y)}{\partial n_y}=\int_\Gamma\varphi(x)\frac{\partial^2}{\partial n_x\partial n_y}K_0(|x-y|)ds_x,\qquad\forall y\in\Omega. \tag{2.7}$$

关于 $\partial v(y)/\partial n_y|_\Gamma$ 有下面的引理:

引理 2.1 对任意的 $y\in\Gamma$, 有

$$\left.\frac{\partial v(y)}{\partial n_y}\right|_\Gamma=\frac{d}{ds_y}\int_\Gamma\phi(x)K_0(|x-y|)ds_x-\int_\Gamma\varphi(x)K_0(|x-y|)\cos(n_x,n_y)ds_x,\qquad\forall y\in\Gamma, \tag{2.8}$$

式中 $\phi(x)=d\varphi/ds_x$.

证明　分两步证明(2.8)式

(1) 先证明

$$\frac{\partial^2K_0(|x-y|)}{\partial n_y\partial n_x}=-\frac{\partial^2K_0(|x-y|)}{\partial\tau_y\partial\tau_x}-K_0(|x-y|)\cos(n_x,n_y), \tag{2.9}$$

其中 $\tau_x=(-n_x^2,n_x^1)$, $\tau_y=(-n_y^2,n_y^1)$.

经计算, 由(2.2)式, 有

$$\frac{\partial^2K_0(|x-y|)}{\partial y_1\partial x_1}+\frac{\partial^2K_0(|x-y|)}{\partial y_2\partial x_2}=-K_0(|x-y|); \tag{2.10}$$

另一方面, 我们知道

$$\frac{\partial^2 K_0(|x-y|)}{\partial n_y \partial n_x} = \frac{\partial^2 K_0(|x-y|)}{\partial y_1 \partial x_1} n_x^1 n_y^1 + \frac{\partial^2 K_0(|x-y|)}{\partial y_2 \partial x_1} n_x^1 n_y^2 + \frac{\partial^2 K_0(|x-y|)}{\partial y_1 \partial x_2} n_x^2 n_y^1 + \frac{\partial^2 K_0(|x-y|)}{\partial y_2 \partial x_2} n_x^2 n_y^2, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial^2 K_0(|x-y|)}{\partial \tau_y \partial \tau_x} = \frac{\partial^2 K_0(|x-y|)}{\partial y_1 \partial x_1} n_x^2 n_y^2 - \frac{\partial^2 K_0(|x-y|)}{\partial y_2 \partial x_1} n_x^2 n_y^1 - \frac{\partial^2 K_0(|x-y|)}{\partial y_1 \partial x_2} n_x^1 n_y^2 + \frac{\partial^2 K_0(|x-y|)}{\partial y_2 \partial x_2} n_x^1 n_y^1, \tag{2.12}$$

由(2.10)、(2.11)和(2.12)，可得(2.9)•

(2) 下面证明(2.8)•

对任意 $y_0 \in \Omega$ 和单位向量 $n_{y_0} = (n_{y_0}^1, n_{y_0}^2)$ 将(2.9)代入(2.7)，有

$$\frac{\partial v(y_0)}{\partial n_{y_0}} = \int_\Gamma \varphi(x)\left[-\frac{\partial^2 K_0(|x-y_0|)}{\partial \tau_{y_0} \partial \tau_x} - K_0(|x-y_0|)\cos(n_x, n_{y_0})\right] \mathrm{d}s_x,$$

由于

$$-\int_\Gamma \varphi(x) \frac{\partial^2 K_0(|x-y_0|)}{\partial \tau_{y_0} \partial \tau_x} \mathrm{d}s_x = -\frac{\partial}{\partial \tau_{y_0}}\left(\int_\Gamma \varphi(x) \frac{\partial K_0(|x-y_0|)}{\partial \tau_x} \mathrm{d}s_x\right) = -\frac{\partial}{\partial \tau_{y_0}} \int_\Gamma \varphi(x) \nabla K_0(|x-y_0|)\,\tau_x \mathrm{d}s_x,$$

因 $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2) = \tau_x \cdot \mathrm{d}s_x$ 并采用分部积分得

$$-\int_\Gamma \varphi(x) \frac{\partial^2 K_0(|x-y_0|)}{\partial \tau_{y_0} \partial \tau_x} \mathrm{d}s_x = -\frac{\partial}{\partial \tau_{y_0}}\left\{\left[\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi(x) K_0(|x-y_0|))\mathrm{d}x_1 + \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial x_2}(\varphi(x) K_0(|x-y_0|))\mathrm{d}x_2\right] - \int_\Gamma K_0(|x-y_0|) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_x} \mathrm{d}s_x\right\},$$

再对右端括号内的积分应用 Green 公式，可知其值为零，这样得到

$$\frac{\partial v(y_0)}{\partial n_{y_0}} = \frac{\partial}{\partial \tau_{y_0}} \int_\Gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_x} K_0(|x-y_0|)\mathrm{d}s_x - \int_\Gamma \varphi(x) K_0(|x-y_0|)\cos(n_x, n_{y_0})\mathrm{d}s_x,$$

$$\forall y_0 \in \Omega \text{ 和单位向量 } n_{y_0} = (n_{y_0}^1, n_{y_0}^2)\,•$$

对任意 $y \in \Gamma$，n_y 表示 $y \in \Gamma$ 的单位外法向量，在上式中取 $n_{y_0} = n_y$，注意到 $K_0(|x-y|)$ 在 $r = |x-y| = 0$ 附近的展开式(2.3)可知 $K_0(|x-y|)$ 是对数奇异核，在上式中令 $y_0 \to y$，就可得到结论• ■

2.2 边界变分方程的建立

由“单层位势”和“双层位势”在穿越 Γ 时的性质及(2.5)式，有

$$\frac{1}{2}u(x) = \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} K_0(|x-y|)u(y)\mathrm{d}s_y - \frac{1}{2}\int_\Gamma K_0(|x-y|)\lambda(y)\mathrm{d}s_y, \quad \forall x \in \Gamma• \tag{2.13}$$

对(2.5)关于 x 求方向导数，并利用(2.7)、(2.8)有

$$\frac{1}{2}\lambda(x) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_x}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}u(y)}{\mathrm{d}s_y} K_0(|x-y|)\mathrm{d}s_y - \frac{1}{2}\int_\Gamma u(y) K_0(|x-y|) \cdot \cos(n_x, n_y)\mathrm{d}s_y - \frac{1}{2}\int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_x} K_0(|x-y|)\lambda(y)\mathrm{d}s_y• \tag{2.14}$$

注　以上论述表明，若 u 是齐次方程(2.1)的解，则 u 在 Ω 中每点的值可通过边界量 $u|_\Gamma$ 及 $\lambda = \partial u/\partial n|_\Gamma$

的积分表出(见(2.5)),并且其边界量 $u|_\Gamma$ 及 λ 满足边界积分方程(2.13) 和(2.14)• 反之,若由积分方程组(2.13) 和(2.14) 解出边界量 $u|_\Gamma$ 及 λ,将其代入(2.5) 便可得到(2.1) 的通解•

对(2.13) 两端乘 $\mu\in \overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)=\left\{\mu\in H^{-1/2}(\Gamma),\ \int_\Gamma \mu\,\mathrm{d}s=0\right.$,并在 Γ 上积分,有

$$-\frac{1}{2}\int_\Gamma u(x)\mu(x)\,\mathrm{d}s_x+\frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma \frac{\partial K_0(|x-y|)}{\partial n_y}u(y)\mu(x)\,\mathrm{d}s_y\,\mathrm{d}s_x-\frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma K_0(|x-y|)\lambda(y)\mu(x)\,\mathrm{d}s_y\,\mathrm{d}s_x=0\bullet \qquad (2.15)$$

令

$$a_0(\mu,\lambda)=-\frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma K_0(|x-y|)\lambda(y)\mu(x)\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y=0, \qquad (2.16)$$

$$b(\mu,u)=-\frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma \frac{\partial K_0(|x-y|)}{\partial n_y}u(y)\mu(x)\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y+\frac{1}{2}\int_\Gamma u(x)\mu(x)\,\mathrm{d}s_x, \qquad (2.17)$$

则(2.15) 可重写为:

$$-b(\mu,u)+a_0(\mu,\lambda)=0,\qquad \forall\mu\in \overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)\bullet \qquad (2.18)$$

对任意的 $v\in K$,由 Ω 中 u 满足 $-\Delta u+u=0$ 得

$$a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x+\int_\Omega uv\,\mathrm{d}x=\int_\Gamma \lambda v\,\mathrm{d}s\bullet \qquad (2.19)$$

将(2.14) 代入(2.19) 有

$$a(u,v)=\frac{1}{2}\int_\Gamma \lambda v\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_\Gamma \lambda v\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\int_\Gamma\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_x}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}u(y)}{\mathrm{d}s_y}K_0(|x-y|)\,\mathrm{d}s_y\right)v\,\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma u(y)K_0(|x-y|)\cos(n_x,n_y)v\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y-\frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma \frac{\partial K_0(|x-y|)}{\partial n_x}\lambda v\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y+\frac{1}{2}\int_\Gamma \lambda v\,\mathrm{d}s\bullet \qquad (2.20)$$

采用分部积分,有

$$\int_\Gamma\left[\frac{\partial}{\partial\tau_x}\int_\Gamma \frac{\partial u(y)}{\partial\tau_y}K_0(|x-y|)\,\mathrm{d}s_y\right]v(x)\,\mathrm{d}s_x=-\int_\Gamma\int_\Gamma \frac{\partial u(y)}{\partial\tau_y}\frac{\partial v(x)}{\partial\tau_x}K_0(|x-y|)\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y,$$

注意到 $K_0(|x-y|)$ 在 $r=0$ 附近的展式(2.3) 的性质,从而有

$$\int_\Gamma\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_x}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}u(y)}{\mathrm{d}s_y}K_0(|x-y|)\,\mathrm{d}s_y\right)v(x)\,\mathrm{d}s_x=-\int_\Gamma\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}u(y)}{\mathrm{d}s_y}\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}s_x}K_0(|x-y|)\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y\bullet \qquad (\Delta)$$

这样(2.20) 可重写为:

$$a(u,v)=-\frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma K_0(|x-y|)\frac{\mathrm{d}u(y)}{\mathrm{d}s_y}\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}s_x}\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y-\frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma K_0(|x-y|)\cdot\cos(n_x,n_y)uv\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y-\frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma \frac{\partial K_0(|x-y|)}{\partial n_x}\lambda v\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y+\frac{1}{2}\int_\Gamma \lambda v\,\mathrm{d}s\bullet \qquad (2.21)$$

记

$$a_1(u,v)=-\frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma K_0(|x-y|)\frac{\mathrm{d}u(y)}{\mathrm{d}s_y}\frac{\mathrm{d}v(x)}{\mathrm{d}s_x}\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y-\frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma K_0(|x-y|)\cos(n_x,n_y)uv\,\mathrm{d}s_x\,\mathrm{d}s_y,$$

则(2.21) 写作:

$$a(u,v)=a_1(u,v)+b(\lambda,v)\cdot \tag{2.22}$$

由(2.18)和(2.22),问题(1.1)* 可化为如下边界变分不等式:

$$\begin{cases}\text{求}(u,\lambda)\in K\times \overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma),\text{满足}\\ -b(\mu,u)+a_0(\mu,\lambda)=0, & \forall\mu\in \overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma),\\ a_1(u,v-u)+b(\lambda,v-u)\geqslant H(u)-H(v), & \forall v\in K\cdot\end{cases} \tag{2.23}$$

定理 2.1 问题(2.23)存在唯一解·

证明 若 $\hat{u}$ 是(1.1)* 的解,记 $u=\hat{u}|_\Gamma$, $\lambda=\partial\hat{u}/\partial n|_\Gamma$· 由前面的推导过程可知,$(u,\lambda)\in K\times \overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)$ 是问题(2.23)的解·

反之,设 $(u,\lambda)\in K\times \overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)$ 是(2.23)的解,则满足(3.23)的第一个方程,即

$$\int_\Gamma \mu(x)\left[-\frac{1}{2}u(x)+\frac{1}{2}\int_\Gamma\frac{\partial K_0(|x-y|)}{\partial n_y}u(y)\mathrm{d}s_y-\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\int_\Gamma K_0(|x-y|)\lambda(y)\mathrm{d}s_y\right]\mathrm{d}s_x=0,\qquad \forall\mu\in \overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)\cdot$$

由 $\mu(x)$ 的任意性,有

$$\frac{1}{2}u(x)=\frac{1}{2}\int_\Gamma\frac{\partial K_0(|x-y|)}{\partial n_y}u(y)\mathrm{d}s_y-\frac{1}{2}\int_\Gamma K_0(|x-y|)\lambda(y)\mathrm{d}s_y,\qquad x\in\Gamma,$$

此即(1.13)· 不难看出由 u 及 λ 决定的函数

$$\hat{u}(x)=\frac{1}{2}\int_\Gamma\frac{\partial K_0(|x-y|)}{\partial n_y}u(y)\mathrm{d}s_y-\frac{1}{2}\int_\Gamma K_0(|x-y|)\lambda(y)\mathrm{d}s_y,\qquad x\in\Omega$$

在 Ω 上满足方程 $-\Delta\hat{u}+\hat{u}=0$· 并且边界量 $u(y)$ 及 $\lambda(y)$ 还满足(2.14)·

由方程(2.23)的第二式有:

$$a_1(u,v)+b(\lambda,v)\overset{\text{利用}(\Delta)}{=}\frac{1}{2}\int_\Gamma\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_x}\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}u(y)}{\mathrm{d}s_y}K_0(|x-y|)\mathrm{d}s_y\right]v\,\mathrm{d}s_x-$$
$$\frac{1}{2}\int_\Gamma\left[\int_\Gamma u(y)K_0(|x-y|)\cos(n_x,n_y)\mathrm{d}s_y\right]v\,\mathrm{d}s_x-$$
$$\frac{1}{2}\int_\Gamma\int_\Gamma\frac{\partial K_0(|x-y|)}{\partial n_x}\lambda v\,\mathrm{d}s_x\mathrm{d}s_y+\frac{1}{2}\int_\Gamma\lambda v\,\mathrm{d}s=$$
$$\int_\Gamma\left[\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_x}\int_\Gamma\frac{\mathrm{d}u(y)}{\mathrm{d}s_y}K_0(|x-y|)\mathrm{d}s_y-\frac{1}{2}\int_\Gamma u(y)K_0(|x-y|)\cos(n_x,n_y)\mathrm{d}s_y-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int_\Gamma\frac{\partial K_0(|x-y|)}{\partial n_x}\lambda(y)\mathrm{d}s_y-\frac{1}{2}\lambda(x)\right]v\,\mathrm{d}s_x+\int_\Gamma\lambda v\,\mathrm{d}s\cdot$$

将(2.14)代入上式,得

$$a_1(u,v)+b(\lambda,v)=\int_\Gamma\lambda v\,\mathrm{d}s\cdot$$

因 $\hat{u}$ 在 Ω 上满足 $-\Delta\hat{u}+\hat{u}=0$,由(2.19)知 $a(\hat{u},v)=\int_\Gamma\lambda v\,\mathrm{d}s$· 进而 $a_1(u,v)+b(\lambda,v)=a(\hat{u},v)$,故

$$a(\hat{u},v-\hat{u})\geqslant H(u)-H(v),$$

因此由解 (u,λ) 决定的函数 $\hat{u}$ 是问题(1.1)* 的解且 $\hat{u}|_\Gamma=u$, $\partial\hat{u}/\partial n|_\Gamma=\lambda$·

设 (u_1,λ_1) 和 $(u_2,\lambda_2)\in K\times \overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)$ 是(2.23)的两个解,则由它们定义的函数分别记作 $\hat{u}_1,\hat{u}_2$· 因它们均是(1.1)* 的解,并且 $(u_1,\lambda_1)=(\hat{u}_1|_\Gamma,\partial\hat{u}_1/\partial n|_\Gamma)$, $(u_2,\lambda_2)=(\hat{u}_2|_\Gamma,$

$\partial\hat{u}_2/\partial n|_\Gamma$)· 据定理 1.3 得 $\hat{u}_1\equiv\hat{u}_2$, 从而 $(u_1,\lambda_1)=(u_2,\lambda_2)$, 即(2.23) 的解唯一· ■

定理 2.2 若令 $A(u,\lambda;v,\mu)=a_1(u,v)+b(\lambda,v)-b(\mu,u)+a_0(\mu,\lambda)$, 则(2.23) 有如下等价形式的边界变分不等式:

$$\text{求}(u,\lambda)\in K\times\overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma),\ \text{满足}\ A(u,\lambda;v-u,\mu)\geqslant H(u)-H(v),\tag{2.24}$$

且(2.24) 存在唯一解·

证明 先设 $(u,\lambda)\in K\times\overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)$ 是(2.23) 的解, 将(2.23) 的第一式与第二式相加即得(2.24)· 因此 $(u,\lambda)\in K\times\overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)$ 是(2.24) 的解· 反之, 若 $(u,\lambda)\in K\times\overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)$ 是(2.24) 的解, 即对任意 $v\in K$, $\mu\in\overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)$, 有

$$a_1(u,v-u)+b(\lambda,v-u)-b(\mu,u)+a_0(\mu,\lambda)\geqslant H(u)-H(v)$$

成立· 特别取 $v=u\in K$, 有

$$-b(\mu,u)+a_0(\mu,\lambda)\geqslant 0,\qquad\forall\mu\in\overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)\cdot$$

上式对 $-\mu\in\overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)$ 也成立, 因此有

$$-b(\mu,u)+a_0(\mu,\lambda)=0,\qquad\forall\mu\in\overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)\cdot$$

将上式代入(2.24) 得

$$a_1(u,v-u)+b(\lambda,v-u)\geqslant H(u)-H(v),\qquad\forall v\in K,$$

从而 $(u,\lambda)\in K\times\overset{*}{H}{}^{-1/2}(\Gamma)$ 是(2.23) 的解·

由定理 2.1 知(2.24) 存在唯一解· ■

参 考 文 献

[1] Mosco U. Approximation of the solutions of some variational inequalities[J]. Ann Scuola Normale Sup Pisa, 1967, **21**(2): 373~394

[2] Han H. A direct boundary element for Signorini problems[J]. Math Compute, 1990, **55**(1): 115~128

[3] 迪沃 G, 利翁斯 J L. 力学和物理学中的变分不等方程[M]. 王耀东译. 北京: 科技出版社, 1987

[4] Han H. The boundary integro_differential equations of elliptic boundary value and their numerical solution[J]. Sci Sinica Series A, 1988, **29**(10): 1153~1165

[5] 丁方允, 吕涛涛. 具非线性边值条件的二维 Helmholtz 方程的边界元分析[J]. 兰州大学学报, 1994, **30**(2): 25~36

Boundary Mixed Variational Inequality in Friction Problem

Ding Fangyun[1], Zhang Xin[1], Ding Rui[2]

[1]Department of Mathematics, Lanzhou University, Lanzhou 730000, P R China;

[2]Mechanical Postdoctoral Station, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, P R China

Abstract: In this paper, with the use of the friction problem in elasticity as the background, the existence and uniqueness for the solution of the nonlinear, indifferentiable mixed variational inequality are discussed. Its corresponding boundary variational inequality and the existence and uniqueness of solution are given. This provides the theoretical basis for using boundary element method to solve the mixed variational inequality.

Key words: mixed variational inequality; friction problem; Sobolev space