

域外奇源分布法场点解的唯一性^{*}

云天铨

华南理工大学 工程力学系, 广州 510641

摘要: 应用奇源解的核函数沿距离递减的条件和积分不等式, 可证这类奇源在凸域外分布只要满足以它产生的响应来表达的边界条件时, 所引起相应的域内场点解是唯一的。文中给出这类奇源的部分例子, 如 Kelvin 的点力, 点圆力偶(PRC)等。并给出 PRC 分布解回转体扭转问题的场点解的唯一性证明作为应用例。

关键词: 奇源解; 域外奇源分布法; 非奇异积分方程法; 边界元法; 线载荷积分方程法

分类号: O173.5; O343.5 文献标识码: A

概 述

将奇异的源分布在研究域之外, 令问题的边界条件得到满足而求解该方法称为域外奇源分布法(SSORDM)。通常在域外连续地分布奇源可获非奇异积分方程。如[1]所述, 奇点源的分布的应用最早见流体力学的源汇分布法, 不过, 那时并没有将问题归结为积分方程。在固体力学方面, 作者在1979年应用SSORDM于回转体扭转^[2], 1981年用于桩^[3]的分析, Wu和Altiero^[4](1981)用于板的弯曲分析。其后, 作者等人将SSORDM用于分析一系列弹性轴对称、非轴对称, 静力的和动力的问题, 粘弹性问题等^[5~17]。和边界元法(BEM)相比, 不管导出的方法如何, BEM以在边界上的场点和源点重合时具有奇异性为特征, SSORDM比BEM在计算上因没有奇异性而大为简单。然而, BEM应用甚广且为人熟知, 这是什么原因? 原因可能是SSORDM(或称非奇异积分方程法NSIEM)在理论上还不成熟, 其中包括方法的解的唯一性问题。BEM, 视作由奇点源在边界上分布而导出, 是不存在解的唯一性问题的, 因为边界只有一个。而域外奇源分布(SSORD)却可以有許多。若两种以上的SSORD都满足边界条件, 试问它们引起的域内场点解是唯一的吗? 如果答案是否定的, 则SSORDM不可行。因此, 解的唯一性问题对SSORDM(或NSIEM)是关键。作者在文[18]中在证明NSIEM的解的唯一性时应用延拓Fredholm积分方程理论至域外去论证相应的齐次积分方程只有零解。这种证明就算成立也难于应用到实际, 因为对一给定的核函数很难证明它是否封闭。本文放弃文[18]的证明思路, 应用许多奇源解的核函数具有沿距离增加而递减的性质以及积分不等式, 就能证明这类奇源在凸域外分布只要满足以它引起的响应来表达的边界条件时, 域内场点相应的解是唯一的。文中给出这类奇源的部分例子, 如 Kelvin 点力, 点圆力偶(PRC)等。并给出 PRC 分布解回转体扭转问题的场点解的唯一性证明作为一应用例子。

* 收稿日期: 1997_07_09; 修订日期: 1998_09_20

作者简介: 云天铨(1936~), 男, 教授

1 SSORDM 场点解的唯一性证明

首先,我们简述域外奇源分布法(SSORDM)• 图 1 为域外奇源分布法的示意图• A^+ 和 A^- 分别表示以 ∂A 为边界的研究的凸域的域内和域外• 在域外 A^- 中的一围线 L 上分布有集度为 $x(t)$ 的源(源可以是点力,热,电荷等),在这些源的作用下,空间中任一场点 s 的响应 $y(s)$ (响应可以是位移、应力、温度等)可表为

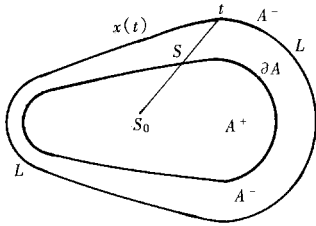


图 1 凸域外奇源分布法(SSORDM)示意图

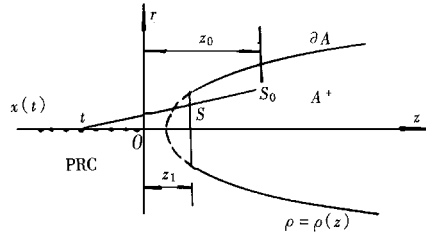


图 2 点圆力偶 PRC 域外分布解回转体扭转问题示意图

$$\int_L K(s, t) x(t) dt = y(s), \quad (1.1)$$

式中,核函数 $K(s, t)$ 代表单位源作用于源点 t 引起场点 s 的响应,是一已知函数,即源的基本解(如 Kelvin 的点力解等)• (2.1) 式中的 K, x, y 可以是矩阵,如

$$\text{管导} \quad K(s, t) = \begin{bmatrix} K_{11}(s, t) & K_{12}(s, t) \\ K_{21}(s, t) & K_{22}(s, t) \end{bmatrix}, \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix},$$

代表由可以见不同的源 $x_1(t), x_2(t)$ 引起不同的响应 $y_1(s), y_2(s)$ •

由于源的基本解已满足问题的控制方程(如 Kelvin 点力解满足 Navier 方程),它的任意的线性组合也必然满足线性的控制方程• 剩下的问题只需满足边界条件• 设(1.1)式的响应 $y(s)$ 在边界上为已知函数 $u(s)$,即

$$\int_L K(s, t) x(t) dt = u(s) \quad (L \subset A^-, s \in \partial A), \quad (1.2)$$

(1.2) 式代表边界条件• (1.2) 式是一 Fredholm 非奇异积分方程• 因为源的基本解 $K(s, t)$ 在源点 t 和场点 s 重合时才具奇异性,如今在域外分布源点 $s \neq t$ 不会有奇异性• 一旦由(1.2)式求得 $x(t)$ 后,域内任一场点的响应可由(1.1)式求得• 以上是 SSORDM 或称 NSIEM•

其次我们来证明解的唯一性•

设

$$0 < K(s_0, t) < K(s, t), \quad (1.3)$$

式中, s 是线段 $\overline{s_0 t}$ 中的一点,即

$$s = \partial s_0 + (1 - \alpha)t \quad (0 < \alpha < 1), \quad (1.4)$$

则

$$\Delta y(s_0) = \int_L K(s_0, t) \Delta x(t) dt \leq \int_L K(s, t) \Delta x(t) dt = \Delta y(s), \quad (1.5)$$

式中, $\Delta x(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$,

$$\Delta y(s_0) = |y_1(s_0) - y_2(s_0)|, \quad \Delta y(s) = |y_1(s) - y_2(s)|.$$

证明:

$$\Delta y(s) - \Delta y(s_0) = \int_L [K(s, t) - K(s_0, t)] \Delta x(t) dt. \quad (1.6)$$

利用(1.3)式和积分不等式,对任意可积函数 $f(x)$ 有 $\int_L |f(x)| dx \geq 0$,可知(1.6)式左边大于或等于零.于是(1.6)式给出

$$\Delta y(s_0) \leq \Delta y(s),$$

即(1.5)式成立.

(证完)

今取 $s_0 \in A^+$ (凸), $t \in L \subset A^-$, 对 $\forall t$ 必 $\exists s \in \partial A$, 使(1.4)得到满足.设在 L 上有两种奇源分布 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$,它们皆满足以核函数满足(1.3)式的积分表示式(1.2)作为边界条件时,即

$$\int_L K(s, t) \Delta x(t) dt = \Delta y(s) = \Delta u(s) = 0. \quad (1.7)$$

据(1.5)式,得

$$\Delta y(s_0) = 0 \quad (s_0 \in A^+), \quad (1.8)$$

(1.8)式表示与边界条件(1.2)相应的域内场点 s_0 的响应 $y(s_0)$ (由于满足边界条件,此时的场点响应称为场点解)是唯一的.

注:(1)以上证明可推广到两种奇源集度 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别分布在两条围线 $L_1 \subset A^-$ 和 $L_2 \subset A^-$ 的情形.此时只需引入一条线 $L_3 \subset A^-$ 将 L_1 和 L_2 连起,将 $L_1 + L_2 + L_3 = L$ 视作一条 L ,则在 L 上有两种奇源分布:

$$1. x(t) = x_1(t) (t \in L_1); x(t) = 0 \quad (t \in L_2, t \in L_3)$$

$$2. x(t) = x_2(t) (t \in L_2); x(t) = 0 \quad (t \in L_1, t \in L_3)$$

于是按上述证明来处理

(2)连同补充其它条件(例如对弹性力学问题,用解的唯一性定理),可以论证域内场点的边界条件(1.2)相应的其它响应的解的唯一性.例如当边界条件(1.2)用位移条件给出时,欲证域内场点的应力的解唯一,还需加上弹性理论解的唯一性定理.

2 满足条件(1.3)的核函数

许多奇源解的核函数都满足(1.3)式.以下是一部分例子.

(1)各向同性的线弹性全空间中的点力解(Kelvin解)^[19]:

$$K(s, t) = |u_{ij}(s, t)| = | [16\pi(1-\nu)Gr]^{-1} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j] |, \quad (2.1)$$

式中, G, ν 分别为剪切模量和Poisson比, u_{ij} 单位力沿 j 方向作用于源点 t 引起场点 s 沿 i 方向的位移. $r = |s - t|$ 为源点 t 到场点 s 的距离. $r_i = \partial r / \partial x_{si}, r_j = \partial r / \partial x_{sj}, x_{si}, x_{sj}$ 为场点 s 的坐标分量. $\delta_{ij} = 1, i = j; \delta_{ij} = 0, i \neq j, i, j = 1, 2, 3$.

$$K(s_0, t) = |u_{ij}^0(s_0, t)| = | [16\pi(1-\nu)Gr_0]^{-1} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{0i} r_{0j}] |, \quad (2.2)$$

$$\text{式中, } r_0 = |s_0 - t| > r = |s - t| = \alpha |s_0 - t| \quad (0 < \alpha < 1), \quad (2.3)$$

$$r_{0i} = r_i, \quad r_{0j} = y_j. \quad (2.4)$$

比较(2.1),(2.2)式,可见

$$K(s, t) > K(s_0, t) > 0$$

即满足(1.3)式,即核函数沿源、场点距离的增加而递减。

同样可证点力引起的应力的核函数亦满足(1.3)式。

(2) 将点力 P 沿 $z = 0$ 平面、半径 $r = a$ 圆心在原点 O 的圆周切向均匀地分布,此力系当 $a \rightarrow 0$ 称为“点圆力偶 M_0 ”(PRC) 作用于 O

$$M_0 = 2\pi Pa^2 \quad (a \rightarrow 0), \quad (2.5)$$

积分 Kelvin 点力解可以求得点圆力偶 M_0 作用于 $t(0, -t)$ 时引起全空间中场点 $s(r, z)$ 的位移和应力分量^[2, 16] 为:

$$(U, V, W) = (0, M_0 r / (8\pi GR^3), 0), \quad (2.6)$$

$$\tau_{\theta r}(r, z) = -3M_0 r^2 / (8\pi R^5), \quad (2.7)$$

$$\tau_{\theta z}(r, z) = -3M_0 r(z+t) / (8\pi R^5),$$

式中, $R = [r^2 + (z+t)^2]^{1/2}$, G 为剪切模量。当场点 $s(r, z)$ 位于场点 $s_0(r_0, z_0)$ 和源点 $t(0, -t)$ 的连线 $s_0 t$ 中的任一处时,以(2.6), (2.7) 式作为核函数皆满足(1.3)式,即

$$K(s, t) = |V| > K(s_0, t) = |V_0| = |M_0 r_0 / (8\pi GR_0^3)|, \quad (2.8)$$

$$K_1(s, t) = |\tau_{\theta r}(r, z)| > K_1(s_0, t) = |\tau_{\theta r}(r_0, z_0)| = |3M_0 r_0^2 / (8\pi R_0^5)|, \quad (2.9)$$

$$K_2(s, t) = |\tau_{\theta z}(r, z)| > K_2(s_0, t) = |\tau_{\theta z}(r_0, z_0)| = |3M_0 r_0(z_0+t) / (8\pi R_0^5)|, \quad (2.10)$$

式中, $R_0 = [r_0^2 + (z_0+t)^2]^{1/2}$, $r/R = r_0/R_0$

$$(z+t)/R = (z_0+t)/R_0, \quad R_0 > R$$

(3) 点源在 t , 场点在 s 的稳态温度场的基本解^[1] 为:

$$u = q / (4\pi kr) \quad (2.11)$$

式中, q, k 为常数, $r = |s - t|$ 为源点到场点的距离。

3 应用例子——点圆力偶(PRC)分布解回转体扭转问题场点解的唯一性证明

图2表示 PRC 域外分布解回转体扭转问题的示意图。设母线 $\rho = \rho(z)$ 的凸回转体位于 $z > 0$ 区, 在 $t(= -z)$ 轴 ($\theta > L$) 分布集度为 $x(t)$ 的 PRC, 令空间中 $\rho = \rho(z)$ 回转面为零应力面, 由此可得一 Fredholm 积分方程并可求出解 $x(t)$ ^[2, 16]。于是场点 $s_0(r_0, z_0)$ 的位移和应力分量为:

$$V = [r_0 / (8\pi G)] \int_0^L (1/R_i^3) x(t) dt, \quad (3.1)$$

$$\tau_{\theta r} = - [3r_0^2 / (8\pi)] \int_0^L (1/R_i^5) x(t) dt, \quad (3.2)$$

$$\tau_{\theta z} = - [3r_0 / (8\pi)] \int_0^L [(z_0+t) / R_i^5] x(t) dt,$$

式中, L 为 PRC 分布长度。 $R_i = [r_0^2 + (z_0+t)^2]^{1/2}$ 。扭矩 M_T 与 $x(t)$ 的关系由平衡条件给出

$$M_T = 2\pi \int_0^{\rho(z)} \tau_{\theta r}(r, z) r^2 dr \quad (3.3)$$

以上是 SSORDM 解回转体扭转问题的简介。

至于回转体扭转问题的边界条件,在此表为各截面的扭矩均等于端面的以(3.2)和(3.3)来定出的扭矩·(圣维南原理在此不适用作端面扭矩处理)·

设有一种以上的SSORD,例如 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$, 都使图2的端面 $z = z_1$ 的边界条件得到满足, 即得

$$\Delta \tau_{\theta z}(r_1, z_1) = \left| [3r_1 / (8\pi)] \int_0^L [(z_1 + t) / R_{1t}^5] \Delta x(t) dt = 0, \quad (3.4) \right.$$

式中, $R_{1t} = [r_1^2 + (z_1 + t)^2]^{1/2}$, $\Delta x(t) = |x_1(t) - x_2(t)|$

据(1.5)式, 有

$$\Delta \tau_{\theta z}(r_0, z_0) = 0, \quad s_0(r_0, z_0) \in A^+, \quad (3.5)$$

即域内场点 $s_0(r_0, z_0)$ 的剪应力 $\tau_{\theta z}(r_0, z_0)$ 是唯一的·再应用弹性理论解的唯一性, 可知位移 $V(r_0, z_0)$, 应力 $\tau_{\theta r}(r_0, z_0)$ 也唯一·

结论: 奇源解若满足(2.3)式, 则满足边界条件(2.2)的域外奇源分布引起域内场点相应的解唯一·

参 考 文 献

- [1] 云天铨. 积分方程及其在力学中的应用[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1990. 324~ 327
- [2] Yun Tianquan. An integral equation method for solving the torsion problem of revolution bodies[J]. Journal of Hua Zhong Institute of Technology (English Edition), 1979, 1(1): 82~ 98
- [3] 云天铨. 简便积分方程法分析桩[J]. 应用数学和力学, 1981, 2(3): 307~ 320
- [4] Wu B C, Altiero N J. A new numerical method for the analysis of anisotropic thin plate bending problems[J]. Computer Methods in Appl Mech Eng, 1981, (25): 343~ 353
- [5] 云天铨, 肖永谦, 邱崇光. 受轴向集中压力的椭球体的应力分析[J]. 应用数学和力学, 1981, 2(6): 699~ 710
- [6] 云天铨. 水平刚性岩基上的弹性层表面受垂直集中力问题的积分方程解法[J]. 固体力学学报, 1983, (3): 375~ 382
- [7] 云天铨. 嵌在倾斜半空间的轴向受力刚性桩的线载荷积分方程法的分析[J]. 固体力学学报, 1986, (1): 64~ 68
- [8] 云天铨, 张进敏. 竖井的近似分析[J]. 上海力学, 1986, 7(1): 50~ 54
- [9] 云天铨. 嵌在弹性半空间的刚性变直径圆轴的扭转[J]. 应用数学和力学, 1988, 9(5): 449~ 453
- [10] 云天铨. 嵌入弹性半空间的弹性回转轴的扭转[J]. 应用数学和力学, 1990, 11(6): 489~ 498
- [11] Yun Tianquan. Analysis of sloping rigid pile under arbitrary load by line loaded integral equation method[A]. In eds Cheung, Lee Leung. Computational Mechanics Proc of APCOM, Vol1[C], Hong Kong: Balkema, Rotterdam, 1991, 845~ 850
- [12] Yun Tianquan, Su C. Analysis of shaft embedded in granular half space by the line loaded integral equation method[J]. Computers & Structures, 1992, 43(4): 729~ 735
- [13] 云天铨, 顾赫宁. 动力点圆力偶作用于弹性全空间的解及其性质[J]. 应用数学和力学, 1993, 14(10): 845~ 852
- [14] 云天铨. 共面铰接刚性斜桩结构体系的线载荷积分方程法的分析[A]. 见: 曹志远主编, 结构与介质相互作用理论及其应用[M], 北京: 河海大海出版社, 1993. 632~ 635
- [15] Yun Tianquan, Li L H. Analysis of in plane hinge jointed rigid sloping piles[J]. Computers & Structures, 1995, 55(2): 341~ 346

- [16] Yun Tianquan. Elastodynamic analysis of torsion of shaft of revolution by line_loaded integral equation method[J]. Structural Engineering and Mechanics, 1998, 6(3)
- [17] 云天铨, 顾赫宁. 线粘弹性半空间中轴向受力桩的分析[J]. 华南理工大学学报, 1995, 23(4): 47~52
- [18] Yun Tianquan, Uniqueness theorem of nonsingular integral equation method[J]. Transactions CSME, 1986, 10(4): 197~ 200
- [19] Brebbia C.A. Progress in Boundary Element Methods [M], Vol, 1 London: Pentech Press, 1981, 171

Uniqueness of Solution of Field Point of Singular Source Outside Region Distribution Method

Yun Tianquan

Department of Mechanics, South China University of Technology,
Guangzhou, 510641, P R China

Abstract: The uniqueness of solution of field point, inside a convex region due to singular source(s) with kernel function decreasing with distance increasing, outside_region_distribution(s) such that the boundary condition expressed by the response of the source(s) is satisfied, is proved by using the condition of kernel function decreasing with distance increasing and an integral inequality. Examples of part of these singular sources such as Kelvin's point force, Point_Ring_Couple (PRC) etc. are given. The proof of uniqueness of solution of field point in a twisted shaft of revolution due to PRC distribution is given as an example of application.

Key words: solution of singular sources; singular source outside_region_distribution method; non-singular integral equation method; boundary element method; line_loaded integral equation method