论文编号: 1000-0887(1999) 01_0055_62

受单面约束的非完整力学系统的运动方程*

张 毅[1], 梅凤翔[2]

[1] 苏州城建环保学院基础部, 苏州 215011

[2] 北京理工大学应用力学系, 北京 100081

(李骊推荐)

摘要: 给出同时受有单面完整约束和单面非完整约束的非完整力学系统的运动方程, 并举例说明其应用•

关键词: 分析力学; 单面约束; 非完整系统; 运动方程
分类号: O316 文献标识码: A

引 言

力学系统受单面约束的运动比双面约束更为普遍• 而其研究也更为困难[1, 2]• 单面约束系统可分为: 具有单面完整约束的完整力学系统[3~ 6]; 具有单面完整约束的非完整力学系统[7]; 具有单面非完整约束的非完整力学系统[2]等•

本文研究一类更为普遍的单面约束系统: 同时受单面完整约束和单面非完整约束的非完整系统• 给出了描述这类系统的运动的两种方法: 分段描述法和全程描述法• 文末, 举例说明结果的应用•

1 问题的提出

研究由 N 个质点构成的力学系统• 系统的 D' Alembert 原理为

$$\sum_{i=1}^{N}(-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i+\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0, \tag{1.1}$$

其中, $\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 是质量为 m_i 的第 i 个质点的加速度, $\boldsymbol{F}_i$ 为作用在第 i 个质点上的主动力, $\boldsymbol{R}_i$ 为约束反力•

设系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,\cdots,n)$ 来确定, 它的运动受有一个理想单面完整约束

$$q_1\geqslant 0, \tag{1.2}$$

和 m 个仅限制 $q_1=0$ 的运动的第一类非完整约束

* 收稿日期: 1997_07_02; 修订日期: 1998_09_18
基金来源: 国家自然科学基金资助项目(19572018)
作者简介: 梅凤翔: (1938~), 男, 教授, 博士生导师, 系主任, 已发表专著 8 部, 论文 180 多篇

$$f_\alpha = \sum_{s=1}^{n} a_{\alpha s}(q)\dot{q}_s = 0 \qquad (\alpha = 1, \dots, m), \tag{1.3}$$

以及 g 个限制系统所有运动的第二类非完整约束

$$\varphi_\beta = \varphi_\beta(q, \dot{q}, t) = C_\beta \quad (\beta = 1, \dots, g), \tag{1.4}$$

其中, C_β 是可变的. 当 C_β 恒为零时为通常的双面非完整约束, 否则为单面非完整约束.

问题在于描述同时受有单面完整约束、双面非完整约束和单面非完整约束的系统的运动.

系统的运动可用分段描述法和全程描述法来研究.

2 分段描述法

如果坐标 q_1 在 $t = t^*$ 时变为零, 那么对单面完整约束发生, 对第一类非完整约束也发生碰撞[7, 2]. 假设碰撞是绝对弹性的, 根据牛顿假设, 有关系

$$\left.\begin{aligned} &\dot{q}_1(t^* + 0) = -\dot{q}_1(t^* - 0),\\ &f_\alpha(t^* + 0) = -f_\alpha(t^* - 0) \qquad (\alpha = 1, \dots, m). \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

下面研究无碰撞的运动. 引入 n 个准速度

$$\left.\begin{aligned} &\pi_\sigma = \pi_\sigma(q_s, \dot{q}_s, t) \quad (\sigma = 1, \dots, \varepsilon;\ \varepsilon = n - m - g),\\ &\pi_{\varepsilon+\alpha} = f_\alpha \quad (\alpha = 1, \dots, m), \qquad \pi_{\varepsilon+m+\beta} = \varphi_\beta \quad (\beta = 1, \dots, g). \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

约束(1.4)可写成

$$\pi_{\varepsilon+m+\beta} = C_\beta \quad (\beta = 1, \dots, g;\ \varepsilon = n - m - g). \tag{2.3}$$

设约束(1.4)对应的约束反力为 $R_{\varepsilon+m+\beta}$, 现在, 我们假想解除全部第二类约束(1.4), 并将其约束反力 $R_{\varepsilon+m+\beta}$ 归入"主动力", 则此时系统可作为具有 n 个自由度的"完整系统"来研究, 称为相应完整系统. 显然, 相应完整系统的约束是理想双面的, 有

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{R}_i^* \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0. \tag{2.4}$$

D' Alembert 原理(1.1)成为

$$\sum_{i=1}^{N} (-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i + \boldsymbol{F}_i^*) \cdot \delta\boldsymbol{r}_i = 0, \tag{2.5}$$

其中, $\boldsymbol{R}_i^*$、$\boldsymbol{F}_i^*$ 分别为相应完整力学系统的约束反力和主动力. 容易证明, 原理(2.5), 等价于

$$\begin{aligned} &\sum_{\rho=1}^{\varepsilon+m} \delta\pi_\rho \left\{ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_\rho} + \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\rho} + P_\rho^* - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_s} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{\pi}_s}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \dot{\pi}_s}{\partial q_r} \right) \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \dot{\pi}_\rho} \right\} +\\ &\quad \sum_{\beta=1}^{g} \delta\pi_{\varepsilon+m+\beta} \left\{ -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_{\varepsilon+m+\beta}} + \frac{\partial T^*}{\partial \pi_{\varepsilon+m+\beta}} + P_{\varepsilon+m+\beta}^* + R_{\varepsilon+m+\beta} - \right.\\ &\quad \left. \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_s} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{\pi}_s}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \dot{\pi}_s}{\partial q_r} \right) \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \dot{\pi}_{\varepsilon+m+\beta}} \right\} = 0, \end{aligned} \tag{2.6}$$

其中, T^* 为用准速度表示的动能, P_k^* 为相应于准坐标 π_k 的广义力. 由相应完整系统 $\delta\pi_k$ 的独立性, (2.6) 给出

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_\rho} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_\rho} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{\pi}_s} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \dot{\pi}_s}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial \dot{\pi}_s}{\partial q_r} \right) \frac{\partial \dot{q}_r}{\partial \dot{\pi}_\rho} = P_\rho^* \qquad (\rho = 1, \dots, \varepsilon + m), \tag{2.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \pi_{\varepsilon+m+\beta}} - \frac{\partial T^*}{\partial \pi_{\varepsilon+m+\beta}} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T^*}{\partial \pi_s}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \pi_s}{\partial \dot q_r} - \frac{\partial \pi_s}{\partial q_r}\right)\frac{\partial \dot q_r}{\partial \pi_{\varepsilon+m+\beta}}$$
$$= P^*_{\varepsilon+m+\beta} + R_{\varepsilon+m+\beta} \qquad (\beta = 1, \cdots, g), \tag{2.8}$$

这是在区域 $q_1 > 0$ 上相应完整系统的 Boltzmann_Hamel 型方程•

考虑加上约束(1.4)• 若 C_β 均恒为零, 则(1.4) 为通常的双面非完整约束, 联合(2.7) 和(1.4) 给出系统的运动, 而(2.8) 给出相应的约束力 $R_{\varepsilon+m+\beta}$; 若 C_β 均不为零, 则方程组(2.7)、(2.8) 不封闭, 需给出单面非完整约束力 $R_{\varepsilon+m+\beta}(\beta = 1, \cdots, g)$ 的信息; 若

$$\left.\begin{aligned}&\dot\pi_{\varepsilon+m+\gamma} = 0 \quad (\gamma = 1, \cdots, g_1),\\ &\dot\pi_{\varepsilon+m+\mu} = C_\mu \quad (C_\mu \neq 0, \mu = g_1+1, \cdots, g),\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

那么方程组(2.7)、(2.8) 也不封闭, 需给出 $(g - g_1)$ 个补充方程•

为建立碰撞相互作用, 可在(2.2) 中取

$$\pi_1 = q_1, \quad \pi_\sigma = \frac{\partial T}{\partial \dot q_\sigma} \quad (\sigma = 2, \cdots, n - m - g), \tag{2.10}$$

其中 T 为考虑(2.2) 中后两组所组成的动能• 准速度在碰撞后的值, 可由条件(2.1) 及 π_σ、$\dot\pi_{\varepsilon+m+\beta}$ 的连续性得到, 这些值可作为方程组(2.7)、(2.8) 的初条件以确定下一次碰撞前时间间隔内的运动等等•

3 全程描述法

上述分段描述方法比较复杂, 因为为求得运动的整体性质需不断改变初条件以确定下一次碰撞前时间间隔内的运动• 处理单面约束系统动力学的另一种方法是借助某个不经受碰撞的辅助系统 M^* 来描述系统的运动[7], 称之为全程描述方法•

系统 M^* 的运动将在相空间$(q^*, \dot\pi^*)$ 中来描述, 而相应地令系统 M 和 M^* 的轨道之间的关系为

$$\begin{aligned}&q_1 = |q_1^*|, \; q_2 = q_2^*, \cdots, q_n = q_n^*,\\ &\dot\pi_i = \dot\pi_i^*(\operatorname{sgn} q_1^*)^{\nu_i},\\ &\nu_i = \begin{cases}1 & (i = 1, \varepsilon+1, \cdots, \varepsilon+m),\\ 0 & (\text{其它})\end{cases}\end{aligned} \tag{3.1}$$

类似于方程组(2.7)、(2.8) 的推导, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^{**}}{\partial \pi_\rho^*} - \frac{\partial T^{**}}{\partial \pi_\rho^*} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T^{**}}{\partial \pi_s^*}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \pi_s^*}{\partial \dot q_r^*} - \frac{\partial \pi_s^*}{\partial q_r^*}\right)\frac{\partial \dot q_r^*}{\partial \pi_\rho^*} = P_\rho^{**},$$
$$(\rho = 1, \cdots, \varepsilon+m) \tag{3.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^{**}}{\partial \pi^*_{\varepsilon+m+\beta}} - \frac{\partial T^{**}}{\partial \pi^*_{\varepsilon+m+\beta}} + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T^{**}}{\partial \pi_s^*}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \pi_s^*}{\partial \dot q_r^*} - \frac{\partial \pi_s^*}{\partial q_r^*}\right)\frac{\partial \dot q_r^*}{\partial \pi^*_{\varepsilon+m+\beta}},$$
$$= P^*_{\varepsilon+m+\beta} + R_{\varepsilon+m+\beta} \qquad (\rho = 1, \cdots, g) \tag{3.3}$$

其中 T^{**} 为 q, π 用(3.1) 替代所得动能, $P_\rho^{**} = P_\rho^*(\operatorname{sgn} q_1^*)^{\nu_\rho}$•

显然关系(3.1) 满足单面完整约束条件(1.2) 和碰撞条件(2.1)• 从方程组(3.2)、(3.3) 和关系(3.1) 可以导出方程组(2.7)、(2.8)• 方程组(3.2)、(3.3) 可直接描述单面约束系统运动的全过程•

4 算　例

例　具有单位质量、重量和半径的匀质球在斜面 P_1 上滚动(且永不离开 P_1) 并与绝对粗

糙平面 P_2(P_2 垂直于 P_1) 相碰• 试研究球的运动•

解 本问题中, 平面 P_2 实现单面完整约束和第一类非完整约束, 而平面 P_1 实现第二类非完整约束• 若球在 P_1 上的滚动限制为纯滚动, 则为文献[7] 中讨论的情形•

引进惯性坐标系 $Oxyz$, 其轴 Ox 和 Oz 分别在平面 P_1 和 P_2 上并与 Oy 垂直, 而轴 Oy 沿 P_1 和 P_2 的交线并使坐标系成为右手系• 取广义坐标为 $q_1 = x - 1$, $q_2 = y$, $q_3 = \theta$, $q_4 = \psi$, $q_5 = \varphi$, 其中 $x - y\ (z \equiv 1)$ 为球心坐标, ψ, θ, φ 为 Euler 角•

系统的动能为

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}a^2(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2), \tag{4.1}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi, \\ \omega_y &= \dot{\theta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi, \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\theta, \quad \cdots \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

而 a 为球对直径的惯性半径• 广义力为

$$Q_1 = -\cos\alpha, \quad Q_2 = -\cos\beta, \quad Q_3 = Q_4 = Q_5 = 0, \tag{4.3}$$

其中, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为铅垂向上的单位矢量的方向余弦•

系统所受单面完整约束为

$$q_1 \geqslant 0, \tag{4.4}$$

第一类非完整约束为

$$f_1 = \dot{q}_2 - \omega_z = 0, \tag{4.5}$$

第二类非完整约束为

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \dot{q}_1 - \omega_y = c_1, \\ \varphi_2 &= \dot{q}_2 + \omega_x = c_2 \bullet \end{aligned}\right\} \quad 2 \tag{4.6}$$

方法一 分段描述法

首先, 研究 $q_1 > 0$ 下的运动• 准坐标和准速度, 根据(2.10) 和(2.3), 有形式

$$\begin{aligned} \pi_1 &= q_1, \quad \dot{\pi}_3 = f_1, \quad \dot{\pi}_4 = \varphi_1, \quad \dot{\pi}_5 = \varphi_2, \\ \dot{\pi}_2 &= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left\{\frac{1}{2}(\dot{\pi}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}a^2[(\dot{\pi}_5 - \dot{q}_2)^2 + \right. \\ &\quad \left. (\dot{q}_1 - \dot{\pi}_4)^2 + (\dot{q}_2 - \dot{\pi}_3)^2]\right\} = \\ &\quad (1 + 2a^2)\dot{q}_2 - a^2\dot{\pi}_3 - a^2\dot{\pi}_5, \end{aligned} \tag{4.7}$$

因此

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \dot{\pi}_1, \quad \dot{q}_2 = \frac{\dot{\pi}_2 + a^2(\dot{\pi}_3 + \dot{\pi}_5)}{1 + 2a^2}, \\ \omega_x &= \dot{\pi}_5 - \dot{q}_2 = \frac{-\dot{\pi}_2 - a^2\dot{\pi}_3 + (1 + a^2)\dot{\pi}_5}{1 + 2a^2}, \\ \omega_y &= \dot{q}_1 - \dot{\pi}_4 = \dot{\pi}_1 - \dot{\pi}_4, \\ \omega_z &= \dot{q}_2 - \dot{\pi}_3 = \frac{\dot{\pi}_2 - (1 + a^2)\dot{\pi}_3 + a^2\dot{\pi}_5}{1 + 2a^2} \bullet \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

将(4.8) 代入(4.1), 得到用准速度表示的动能为

$$T^* = \frac{1}{2}(1 + a^2)\dot{\pi}_1^2 + \frac{1}{2}a^2\dot{\pi}_4^2 - a^2\dot{\pi}_1\dot{\pi}_4 +$$

$$\frac{1}{2(1+2a^2)}[\pi_2^2+a^2(\pi_3^2+\pi_5^2)+a^4(\pi_3-\pi_5)^2]\cdot \tag{4.9}$$

由(4.2)和(4.8),得出

$$\begin{aligned}
\dot q_1 &= \dot\pi_1,\\
\dot q_2 &= \frac{1}{1+2a^2}[\dot\pi_2+a^2(\dot\pi_3+\dot\pi_5)],\\
\dot q_3 &= \dot\theta=\frac{\cos\psi}{1+2a^2}[-\dot\pi_2-a^2\dot\pi_3+(1+a^2)\dot\pi_5]+(\dot\pi_1-\dot\pi_4)\sin\psi,\\
\dot q_4 &= \dot\psi=\frac{1}{1+2a^2}\Big\{(1+\mathrm{ctg}\theta\sin\psi)\dot\pi_2+[a^2\mathrm{ctg}\theta\sin\psi-(1+a^2)]\dot\pi_3+\\
&\quad [a^2-(1+a^2)\mathrm{ctg}\theta\sin\psi]\dot\pi_5\Big\}+\mathrm{ctg}\theta\cos\psi(\dot\pi_1-\dot\pi_4),\\
\dot q_5 &= \dot\varphi=\frac{\sin\psi}{(1+2a^2)\sin\theta}[-\dot\pi_2-a^2\dot\pi_3+(1+a^2)\dot\pi_5]-\frac{\cos\psi}{\sin\theta}(\dot\pi_1-\dot\pi_4),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

反解之,有

$$\left.\begin{aligned}
\dot\pi_1 &= \dot q_1,\\
\dot\pi_2 &= \dot q_2-a^2\cos\psi\dot q_3+a^2\dot q_4+a^2(\cos\theta-\sin\theta\sin\psi)\dot q_5,\\
\dot\pi_3 &= \dot q_2-\dot q_4-\cos\theta\dot q_5,\\
\dot\pi_4 &= \dot q_1-\sin\psi\,\dot q_3+\sin\theta\cos\psi\,\dot q_5,\\
\dot\pi_5 &= \dot q_2+\cos\psi\,\dot q_3+\sin\theta\sin\psi\,\dot q_5\cdot
\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

相应完整系统广义力的虚功为

$$\begin{aligned}
\delta' A &= Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+R_x\delta\pi_4+R_y\delta\pi_5=\\
&\quad Q_1\delta\pi_1+Q_2\frac{\delta\pi_2+a^2(\delta\pi_3+\delta\pi_5)}{1+2a^2}+R_x\delta\pi_4+R_y\delta\pi_5=\\
&\quad Q_1\delta\pi_1+\frac{Q_2}{1+2a^2}\delta\pi_2+\frac{Q_2a^2}{1+2a^2}\delta\pi_3+\frac{Q_2a^2}{1+2a^2}\delta\pi_5+R_x\delta\pi_4+R_y\delta\pi_5,
\end{aligned}$$

故

$$P_1^*=Q_1,\ P_2^*=\frac{Q_2}{1+2a^2},\ P_3^*=\frac{Q_2a^2}{1+2a^2},\ P_5^*=\frac{Q_2a^2}{1+2a^2},\ R_4=R_x,\ R_5=R_y\cdot \tag{4.12}$$

将(4.9)~(4.12)代入(2.7)和(2.8),有

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot\pi_1-\frac{a^2}{1+a^2}\ddot\pi_4=-\frac{\cos\alpha}{1+a^2}, \qquad \ddot\pi_2=-\cos\beta,\\
&\ddot\pi_3-\frac{a^2}{1+a^2}\ddot\pi_5=-\frac{\cos\beta}{1+a^2}, \qquad \ddot\pi_4-\ddot\pi_1=\frac{R_x}{a^2},\\
&\ddot\pi_5-\frac{a^2}{1+a^2}\ddot\pi_3=-\frac{\cos\beta}{1+a^2}+\frac{1+2a^2}{a^2(1+a^2)}R_y,
\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

(4.13)是区域 $q_1>0$ 上相应完整系统的运动方程$\cdot$

现在考虑加上第二类非完整约束(4.6)$\cdot$ 设(4.6)中 C_1 可变,而 C_2 恒为零,即

$$\dot\pi_4=C_1,\qquad \dot\pi_5=0, \tag{4.14}$$

其中,第一式表示单面非完整约束,第二式为双面非完整约束$\cdot$ 为使方程组(4.13)封闭,需补充一个方程,由库仑定律知

$$\sqrt{R_x^2+R_y^2}=f\cos\gamma, \tag{4.15}$$

其中，f 为滑动摩擦系数•

将(4.14)的第二式代入方程组(4.13)，整理后得

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\pi}_1=R_x-\cos\alpha,\quad \dot{\pi}_2=-\cos\beta,\quad \dot{\pi}_3=-\frac{\cos\beta}{1+a^2},\\&\dot{\pi}_4=-\cos\alpha+\frac{1+a^2}{a^2}R_x,\quad -\frac{a^2}{1+a^2}\dot{\pi}_3=-\frac{\cos\beta}{1+a^2}+\frac{1+2a^2}{a^2(1+a^2)}R_y,\end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

从(4.16)中第三、五两式，有

$$R_y=\frac{a^2}{1+a^2}\cos\beta, \tag{4.17}$$

这是对应双面非完整约束 $\dot{\pi}_5=0$ 的约束力• 由(4.17)和(4.15)，得

$$R_x=-\sqrt{f^2\cos^2\gamma-\left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^2\cos^2\beta}\,\mathrm{sgn}(\dot{\pi}_4) \tag{4.18}$$

积分(4.16)，注意到 $\pi_1=q_1$，有

$$\left.\begin{aligned}&q_1=-\frac{1}{2}(\cos\alpha-R_x)t^2+\dot{q}_{10}t+q_{10}\\&\dot{\pi}_2=-t\cos\beta+A_1\\&\dot{\pi}_3=-\frac{t\cos\beta}{1+a^2}+A_2\\&\dot{\pi}_4=-\left(\cos\alpha-\frac{1+a^2}{a^2}R_x\right)t+A_3\end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

其中，q_{10}，$\dot{q}_{10}$ 为 q_1，$\dot{q}_1$ 的初始值，A_1，A_2，A_3 为积分常数，R_x 由(4.18)确定•

其次，研究碰撞过程及碰后运动• 假设球与平面 P_2 的碰撞是绝对弹性的• 设 $t=t^*$ 时发生碰撞，则有

$$q_1(t^*)=0,\ \dot{q}_1(t^*+0)=-\dot{q}_1(t^*-0),\ \dot{\pi}_3(t^*+0)=-\dot{\pi}_3(t^*-0) \tag{4.20}$$

将第一式代入(4.19)，则 t^* 满足关系

$$-\frac{1}{2}(\cos\alpha-R_x)t^{*2}+\dot{q}_{10}t^*+q_{10}=0 \tag{4.21}$$

碰撞前后的速度分别为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{q}_1(t^*-0)=-(\cos\alpha-R_x)t^*+\dot{q}_{10}\\&\dot{q}_1(t^*+0)=(\cos\alpha-R_x)t^*-\dot{q}_{10}\end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

以 $q_1(t^*)$，$\dot{q}_1(t^*+0)$ 为初始条件积分(4.16)的第一式，得到第一次碰撞后的运动

$$q_1=-\frac{1}{2}(\cos\alpha-R_x)t^2+[2(\cos\alpha-R_x)t^*-\dot{q}_{10}](t-t^*)+\frac{1}{2}(\cos\alpha-R_x)t^{*2} \tag{4.23}$$

利用(4.20)的第三式，得到第一次碰撞后的 $\dot{\pi}_3$ 为

$$\dot{\pi}_3=-\frac{t\cos\beta}{1+a^2}+\frac{2t^*\cos\beta}{1+a^2}-A_2 \tag{4.24}$$

而(4.19)中 $\dot{\pi}_2$，$\dot{\pi}_4$ 的表达式对任何 t 都成立•

同理，可考虑某时刻 $t=t^{**}$ 坐标 q_1 又变为零而发生第二次碰撞，如此等等，给出描述运

动的全过程. 若设 $\cos\alpha > \sqrt{f^2\cos^2\gamma - \left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^2\cos^2\beta}$, $\dot{\pi}_4 < 0$, 容易得知, $q_1 = q_1(t)$ 是以 $\tau = 2(2h/(\cos\alpha - R_x))^{1/2}$ 为周期的周期运动, 其中 $h = (q_1)_{\max} = q_{10} + \dot{q}_{10}^2/2(\cos\alpha - R_x)$.

方法二　全程描述法

对本例, 有

$$\nu_i = \begin{cases} 1 & (i = 1, 3), \\ 0 & (i = 2, 4, 5), \end{cases} \tag{4.25}$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\pi}_1 = \dot{\pi}_1^* (\operatorname{sgn} q_1^*)^{\nu_1} = \dot{\pi}_1^* \operatorname{sgn} q_1^*, \quad \dot{\pi}_2 = \dot{\pi}_2^*, \\ &\dot{\pi}_3 = \dot{\pi}_3^* \operatorname{sgn} q_1^*, \quad \dot{\pi}_4 = \dot{\pi}_4^*, \quad \dot{\pi}_5 = \dot{\pi}_5^*, \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

代入(4.9), 有

$$\begin{aligned} T^{**} = {} & \frac{1}{2}(1 + a^2)\dot{\pi}_1^{*2} + \frac{1}{2}a^2\dot{\pi}_4^{*2} - a^2\dot{\pi}_1^*\dot{\pi}_4^* \operatorname{sgn} q_1^* + \\ & \frac{1}{2(1 + 2a^2)}[\dot{\pi}_2^{*2} + a^2(\dot{\pi}_3^{*2} + \dot{\pi}_5^{*2}) + \\ & a^4(\dot{\pi}_3^* \operatorname{sgn} q_1^* - \dot{\pi}_5^*)^2]. \end{aligned} \tag{4.27}$$

再计算广义力. 因

$$\begin{aligned} \delta' A &= P_1^* \delta\pi_1 + P_2^* \delta\pi_2 + P_3^* \delta\pi_3 + P_5^* \delta\pi_5 + R_4 \delta\pi_4 + R_5 \delta\pi_5 \\ &= P_1^{**} \delta\pi_1^* + P_2^{**} \delta\pi_2^* + P_3^{**} \delta\pi_3^* + P_5^{**} \delta\pi_5^* + R_4^* \delta\pi_4^* + R_5^* \delta\pi_5^*, \end{aligned}$$

由(4.26) 知

$$\delta\pi_1 = \delta\pi_1^* \operatorname{sgn} q_1^*, \quad \delta\pi_3 = \delta\pi_3^* \operatorname{sgn} q_1^*, \quad \delta\pi_i = \delta\pi_i^* \ (i = 2, 4, 5),$$

故

$$\left.\begin{aligned} &P_1^{**} = P_1^* \operatorname{sgn} q_1^*, \ P_2^{**} = P_2^*, \ P_3^{**} = P_3^* \operatorname{sgn} q_1^*, \\ &P_5^{**} = P_5^*, \quad R_4^* = R_4, \quad R_5^* = R_5, \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

从(4.26) ~ (4.28), 并利用(4.10) 、(4.11), 方程组(3.2) 、(3.3) 给出

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\pi}_1^* - \frac{a^2}{1+a^2}\ddot{\pi}_4^* \operatorname{sgn} q_1^* = -\frac{\cos\alpha}{1+a^2}\operatorname{sgn} q_1^*, \\ &\ddot{\pi}_2^* = -\cos\beta, \\ &\ddot{\pi}_3^* - \frac{a^2}{1+a^2}\ddot{\pi}_5^* \operatorname{sgn} q_1^* = -\frac{\cos\beta}{1+a^2}\operatorname{sgn} q_1^*, \\ &\ddot{\pi}_4^* - \ddot{\pi}_1^* \operatorname{sgn} q_1^* = \frac{R_x}{a^2}, \\ &\ddot{\pi}_5^* - \frac{a^2}{1+a^2}\ddot{\pi}_3^* \operatorname{sgn} q_1^* = -\frac{\cos\beta}{1+a^2} + \frac{1+2a^2}{a^2(1+a^2)}R_y, \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

加上第二类作完整约束(4.14), 方程组(4.29) 成为

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\pi}_1^* = (R_x - \cos\alpha)\operatorname{sgn} q_1^*, \quad \ddot{\pi}_2^* = -\cos\beta, \quad \ddot{\pi}_3^* = -\frac{\cos\beta}{1+a^2}\operatorname{sgn} q_1^*, \\ &\ddot{\pi}_4^* = -\cos\alpha + \frac{1+a^2}{a^2}R_x, \quad -\frac{a^2}{1+a^2}\ddot{\pi}_3^* \operatorname{sgn} q_1^* = -\frac{\cos\beta}{1+a^2} + \frac{1+2a^2}{a^2(1+a^2)}R_y. \end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

由(4.15) 和(4.30) 的第三、五式, 得

$$R_x = -\sqrt{f^2\cos^2\gamma - (a^2/(1+a^2))^2\cos^2\beta}\operatorname{sgn}(\dot{\pi}_4). \tag{4.18}$$

$$R_\gamma = a^2/(1+a^2)\cos\beta \cdot \tag{4.17}$$

设 $\cos\alpha > \sqrt{f^2\cos^2\gamma - \left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^2\cos^2\beta}$, $\dot{\pi}_4 < 0$, $q_1^*(0) = 0$, 积分(4.30), 我们有

$$q_1^* = -\frac{1}{2}\left(\cos\alpha - \sqrt{f^2\cos^2\gamma - \left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^2\cos^2\beta}\right) t(|t| - \tau) \quad (-\tau \leqslant t \leqslant \tau),$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\pi}_2^* = -t\cos\beta + A_1, \quad \dot{\pi}_3^* = -\frac{t\cos\beta}{1+a^2}\operatorname{sgn} q_1^* + A_2, \\ &\dot{\pi}_4^* = -\left(2\cos\alpha - \frac{1+a^2}{a^2}\sqrt{f^2\cos^2\gamma - \left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^2\cos^2\beta}\right)t + A_3 \cdot \end{aligned}\right\} \tag{4.31}$$

解(4.31)中 q_1^* 的周期为 2τ, 由于 $q_1 = |q_1^*|$, 故 q_1 有周期 τ• 显然, 两种方法得到的结果是一致的, 而在研究系统运动的整体性质时, 后一种方法更简单•

参 考 文 献

[1] 梅凤翔, 陈滨. 关于分析力学的学科发展问题[A]. 见: 一般力学(动力学、振动与控制)最新进展[M], 北京: 科学出版社, 1994, 37~ 45

[2] 梅凤翔. 分析力学专题[M]. 北京: 北京工业学院出版社, 1988

[3] ÅÃ½À³ . ¶ÀÂ¶Äº É¶Ã¼±Ñ ¶Ç±º¼±[M], . : , 1946

[4] 汪家 . 分析动力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1958

[5] ÅÂ±½¶ . Â±¿¶¿ºÑ µ³º , ¶¿ºÑ ¾¶Ç±º É¶Ã¼º Ç Ãº ÃÄ¶¾ Ã ºµ¶±Ì¿Í¾º Àµ¿ÀÄÄÂÂÀ¿¿º¾º Ã³Ñ¹Ñ¾º [J]. , 1978, **42**(5): 781~ 788

[6] ³±À³ , ±Â¼¶¶³ . µº¿±¼º¼¶ÃºÃÄ¶¾ Ã Àµ¿ÀÄÄÂÂÀ¿¿º¾º Ã³Ñ¹Ñ¾º [J]. , 1984, **48**(4): 632~ 636

[7] ³±À³ . ² ÅÂ±¶¿ºÑÇ µ³º , ¶¿ºÑ ¿¶´À½À¾¿À» ÃºÃÄ¶¾ Í Ã ¿¶Åµ¶Â , º³±ÐË¶» Ã³Ñ¹ÌÐ [J]. , 1985, **49**(5): 717~ 723

Equations of Motion for Nonholonomic Mechanical Systems with Unilateral Constraints

Zhang Yi[1] Mei Fengxiang[2]

[1]Department of Basic Courses, Suzhou Institute of Urban Construction and Environmental Protection, Suzhou 215011, P R China

[2]Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P R China

Abstract: In this paper, the equations of motion for nonholonomic mechanical system with unilateral holonomic constraints and unilateral nonholonomic constrains are presented, and an example to illustrate the application of the result is given.

Key words: analytical mechanics, unilateral constraint, nonholonomic system, equation of motion