

太阳黑子数时间序列的分形研究及预测^{*}

顾圣士, 王志谦, 程极泰

上海交通大学应用数学系, 上海 200030

(刘曾荣推荐)

摘要: 本文应用非线性动力系统理论分析了 1891 年 1 月至 1996 年 12 月间太阳黑子月平均数变化的动力行为及其可预测性。计算了它的分形维数 ($D = 3.3 \pm 0.2$)。确定了预测的嵌入维数 ($2 \times D + 1 = 7$)。计算了 Lyapunov 指数 ($\lambda_1 = 0.863$), 揭示了该系统的混沌特性; 并计算了 Kolmogorov 熵 ($K = 0.0260$), 用以从理论上分析这组数据可预报的时间尺度。最后根据分析的结果, 从采样数据中截取一段数据进行了试验性的预测。

关键词: 太阳黑子数; 分形维数; Kolmogorov 熵; Lyapunov 指数; 预测
分类号: O189.32; O211.67 文献标识码: A

引 言

太阳黑子数是一个表征太阳总的活动水平的指数, 自 1949 年 Wolf 提出后就一直沿用至今。在实际应用中, 只有它的月均值、月滑值和年均值才有较大的实用意义。在早期的研究工作中, 人们试图通过各种建模的方法来描述它变化的规律, 而象月均值所具有的变化强烈而又缺乏规则性的数据, 使得建模的方法遇到了巨大的困难。这说明太阳黑子数的演化具有高度的复杂性。

随着非线性动力系统理论的发展, 分形理论以其特殊的视角揭示了自然界和人类社会各种复杂现象中的规律性。分形理论是近 30 年中产生的一个新兴理论, 是非线性理论中的一个活跃的分支, 其研究对象是非线性系统中产生的不光滑和不可微的几何形体, 对应的是定量的维数, 即分形维数。本文使用这一理论对太阳黑子数月均值进行研究, 计算分形维数及其相关的一些指数, 并使用非线性动力系统的方法进行一些短期预测。

分形维数是定量刻画动力系统分形特征的参数, 它可以提供判断是否存在奇异吸引子, 是否具有内在随机性的依据, 它的大小定量地提供了所研究的复杂现象的复杂度。分形维数的值将直接影响时间序列预测时嵌入空间的维数。分形维数可以有多种定义和计算方法, 常用的是 Hausdorff 维数、盒子维数、关联维数、信息维数、广义维数等等。本文将沿用关联维数的定义, 进行计算与之相关的 Lyapunov 指数和 Kolmogorov 熵。后者可以给出系统可预测性的平均尺度。由于精确估计 Lyapunov 指数谱的数据要求较高(约 6 至 7 位数的数据量, 本文所用数据资料仅 1272 个)。本文只求出它的最大正值 λ_1 的估计值, 而以 Kolmogorov 熵分析可预测性的平均尺度。

* 收稿日期: 1997_07_15; 修订日期: 1998_09_10

作者简介: 顾圣士(1945~), 男, 教授, 在非线动力系统、混沌等方面发表论文几十篇

这里所做的另一项工作是对时间序列进行预测。这里使用的方法是用时间延迟法从原有的一维时间序列重构一个 n 维的欧氏空间, 其中 $n \geq 2m + 1$ (m 为分形维数)。根据 Tankns 和 Mane^[1] 所证明的定理, 这样的 n 维空间可以描述原来系统的活动。可以利用这个 n 维空间对时间序列进行预测^[2]。

1 分形维数

在具体讨论分形维数前, 有必要首先说明嵌入空间的概念, 因为这一概念将贯穿本文中全部话题的讨论。这是一个从 Whitney^[3] 的嵌入理论发展而来的扩展一维时间序列的方法——时间延迟法。具体来说, 对于作为样本的太阳黑子数的一维时间序列, 为了从中提取动力系统各变量的演化信息, 我们将其转化为多维空间, 即将时间序列

$$x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n,$$

转化为:

$$x_n(m, \tau) = (x_n, x_{n+\tau}, \dots, x_{n+(m-1)\tau}),$$

式中, m 为嵌入的维数, τ 为固定时间间隔, 是采样时间间隔 Δt 的整数倍。

正如引言中提到的, 本文用的是关联维数对分形的定义, 并使用 Grassberger 和 Procaocia^[4] 于 1983 年提出的 GP 算法。这种算法的优点在于它可以从时间序列直接计算出关联维数。

算法的内容如下:

首先, 将时间序列 $\{x_k: k = 1, 2, \dots, N\}$ 转化为 m 维欧氏空间 R^m , 得到 N_m 个样本点, 其中:

$$N_m = N - (m - 1)\tau,$$

从这 N_m 个点中任选一个参考点 x_i , 计算其余 $N_m - 1$ 个点到 x_i 的距离

$$r_{ij} = d(x_i, x_j) = \left[\sum_{l=0}^{m-1} (x_{i+l\tau} - x_{j+l\tau})^2 \right]^{1/2},$$

对所有的 x_i ($i = 1, 2, \dots, N_m$) 重复该过程, 得到关联积分函数

$$C_m(r) = \frac{2}{N_m(N_m - 1)} \sum_{i,j=1}^{N_m} H(r - r_{ij}),$$

式中, H 为 Heavicide 函数

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0), \\ 0 & (x \leq 0), \end{cases}$$

当 r 取充分小时, 关联积分函数逼近下式:

$$\ln C_m(r) = \ln C + D(m) \ln r,$$

因此, m 维空间数据的关联维数

$$D(m) = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\partial \ln(C_m(r))}{\partial \ln r} \right],$$

当 $D(m)$ 不随维数 m 的升高而改变时

$$D_2 = \lim_{m \rightarrow \infty} D(m),$$

就是该系统的分形维数。

2 Kolmogorov 熵

Kolmogorov 熵可用来确定动力系统的可预测时间尺度, 其计算方法为:

$$K_{2,m}(r) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{C_m(r)}{C_{m+1}(r)},$$

其中, C_m 为关联积分函数, τ 为固定时间间隔。当 $K_{2,m}(r)$ 不随 r 的减小和 m 的增大而改变时

$$K_2 = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} K_{2,m}(r)$$

可作为 Kolmogorov 熵的估计值。

3 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数是反映动力系统混沌特性的重要标志, 反映了混沌活动的分离性。由于数据量的限制, 本文只对其最大正值 λ_1 进行讨论, 通常当 $\lambda_1 > 0$ 时, 可视动力系统为一混沌系统。Lyapunov 指数的具体算法如下:

给定嵌入空间上的时刻 t_0 的一个原始点, 用穷举法找出该点在欧氏距离下的最近邻点。用 $L(t_0)$ 表示这两点之间的距离。在下一时刻 t_1 , 原始尺度将演化成 $L'(t_1)$ 。如此代换, 直至遍历所有数据, 则在该点 λ_1 的估计值

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_m - t_0} \sum_{k=1}^M \log_2 \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})},$$

其中, M 为代换总步数。

4 时间序列的预测

时间序列的预测方法很多, 本文使用的是所谓局部插值的方法。简单来说, 就是将重构后的点序列看作是某个叠代方程的叠代序列。取最后的一点 x_{N_m} , 遍历其它各点, 求出与之欧氏距离最近的一组点, 当点的范围较小时, 这一组点和 x_{N_m} 十分接近, 可认为这组点叠代后的点集与 x_{N_m} 叠代后的点在叠代方程上所在的一段曲线连续可导, 从而可用一些方法对其进行逼近, 本文使用的是插值逼近。即设叠代式

$$x_{n+1} = f(x_n) = \Phi(\|x_n - x_0\|),$$

式中, x_0 为参照点, 一般取离 x_{N_m} 较远的点。这样的叠代方程可由插值法逼近, 将 x_{N_m} 代入, 则可得 x_{N_m+1} 的估计值。

将新估计的值加入时间序列, 只要前面的值足够准确, 就可保证后面值的准确性。

5 结 果

用 1891 年 1 月~ 1996 年 12 月的太阳黑子数组成时间序列 $\{x(t)\} \quad t = 1, 2, \dots, n. \quad n = 1272$ 。取 $\tau = 35$ 。得到一重构相空间, 对不同的嵌入维数 $d \geq 6$, 依次作出 $\ln C_m(r)$ 与 $\ln r$ 的关系图, 如图 3 所示, 其中每个 $\ln r$ 单位取四个点。

对 GP 算法只有当 r 在一定范围内, 观测资料才具有自相似结构的分形特征。即必须先确定最佳无标度区。本文使用的方法是: 对一给定的嵌入维, 选取 $\ln C_m_ \ln r$ 图上邻接的四点, 用首尾两点拟合一直线, 计算斜率和另两点在直线函数上值的方差。当 $d \geq 6$ 时, 取其方差最小时的曲线作为最佳无标度区, 对应直线的斜率即该嵌入维下关联维数的估计值。当 d 增大时, 得到关联维数的变化序列如图 4。

由图 4 可看出, 在误差为 ± 0.2 的范围内, D 稳定在一个饱和值即饱和关联维数, 它的值

为 $D = 3.3 \pm 0.2$ 计算分形维数的 C 语言程序为 GP.C

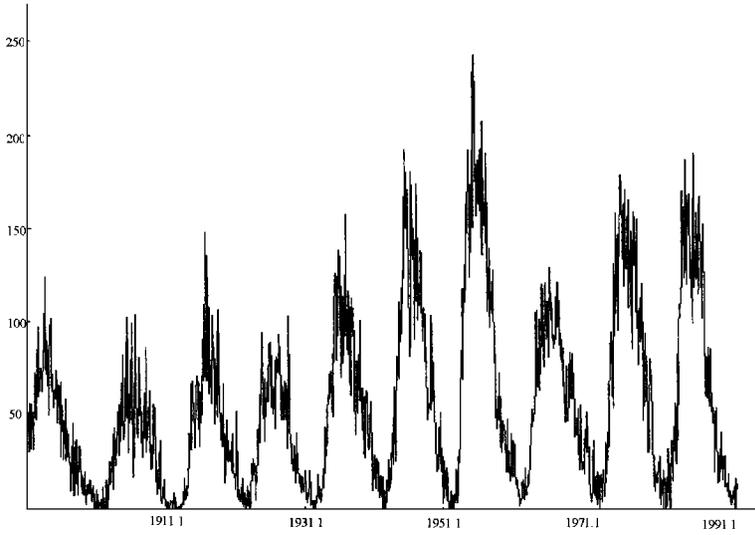


图 1 太阳黑子月均数的时间序列

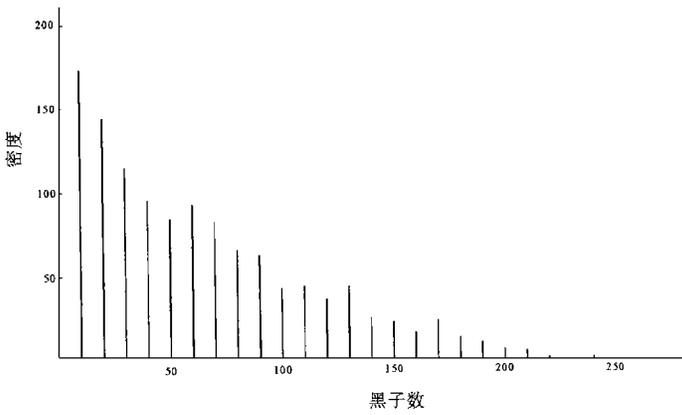


图 2 太阳黑子月均数的密度分布

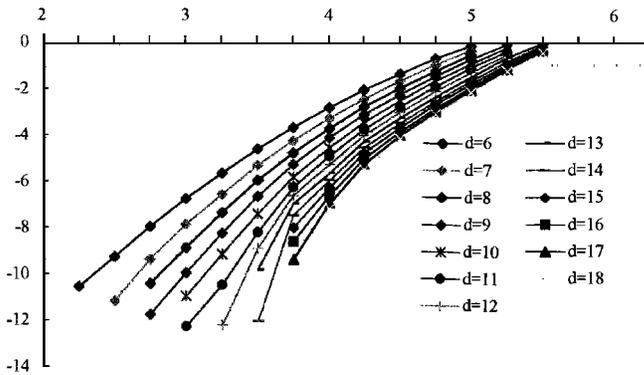


图 3 $\ln C_m(r)$ 与 $\ln r$ 的关系图

利用图 4 的数据结果, 我们求得 Kolmogorov 熵 $K = 0.026$ 。

又根据第三节的方法, 我们设计了 C 语言程序 LYAPRON. C, 计算出 Lyapunov 指数的最大值 $\lambda_1 = 0.863$ 。

由上述的这些结果可以看出, 太阳黑子数是一个低维的混沌系统, 具有一定的规律性。

最后, 我们对已有的数据进行了尝试性的预测。选取了直至 1991 年 12 月的数据作为样本, 重构了 7 维的相空间。经 C 程序 FORECAST. C 的计算, 结果如图 5。

由图 5 可见, 越是前面的数值吻合得越好, 说明存在着误差累加, 也说明对于该动力系统, 只能作较短期的预测。

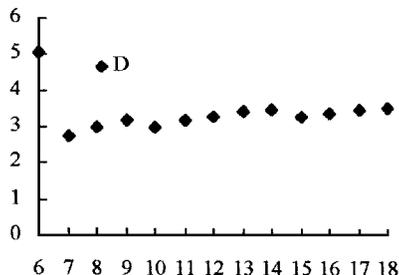


图 4 关联维数 D 随嵌入维数 d 的变化

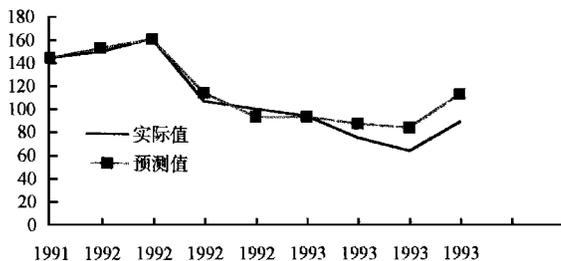


图 5 太阳黑子数时间序列的预测结果

致谢: 作者感谢中国科学院上海天文台郑大卫教授提供的太阳黑子数的数据。

参 考 文 献

- [1] Takens F, Mane R. Detecting strange attractors in turbulence[A]. In: eds Rand D, Yong L S. Lecture Notes in Mathematics 898[R]. Berlin: Springer press, 1981
- [2] Gu S S, Holden A V, Zhang H. The analysis of the geometric structure of the delayed time used in the embedding process in predicating chaotic time series[J]. Journal of Biomathematics, 1997, 12 (1):23~ 26
- [3] Jackson E A. Perspectives of Nonlinear Dynamics [M]. London: Cambridge University Press, 1989
- [4] Grassberger P, Procaccia I. Characterization of strange attractors[J]. Phys Rev Lett, 1983, 50: 346

The Fractal Research and Predicating on the Time Series of Sunspot Relative Number

Gu Shenshi, Wang Zhiqian, Cheng Jitai

Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P R China

Abstract: In this paper, with the theory of nonlinear dynamic systems, It is analyzed that the dynamic behavior and the predictability for the monthly mean variations of the sunspot relative number recorded from January 1891 to December 1996. In the progress, the fractal dimension ($D = 3.3 \pm 0.2$) for the variation process was computed. This helped us to determine the embedded dimension $[2 \times D + 1] = 7$. By computing the Lyapunov index ($\lambda_1 = 0.863$), it was indicated that the variation process is a chaotic system. The Kolmogorov entropy ($K = 0.0260$) was also computed, which provides, theoretically, the predicable time scale. And at the end, according to the result of the analysis above, an experimental predication is made, whose date was a part cut from the sample date.

Key words: number of sun spots; fractal dimension; Kolmogorov entropy; Lyapunov number; predicate