应用数学和力学, 第 20 卷 第 1 期(1999 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论文编号: 1000_0887(1999)01_0093_98

值域有界的一类非线性算子不动点的带误差迭代逼近*

薛志群, 周海云

军械工程学院基础部, 石家庄 050003

(丁协平推荐)

摘要: 设 X 为一致光滑实Banach空间• $T:X \to X$ 为连续强增生算子• $\forall f \in X$• 定义算子 $S:X \to X$ 为 $Sx = f - Tx + x$, $\forall x \in X$• 设$\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$与$\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$为两个给定的实数列在$(0,1)$中且满足条件:

(i) $\alpha_n \to 0, \beta_n \to 0 \quad (n \to \infty)$•

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$•

假设$\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$和$\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$为 X 中两个序列且满足 $\|u_n\| = o(\alpha_n)$, $\|v_n\| \to 0 (n \to \infty)$• $\forall x_0 \in X$, 迭代序列$\{x_n\}$定义为:

$$
(\mathrm{IS})\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S y_n + u_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n S x_n + v_n \quad (n \geqslant 0) \end{cases}
$$

若$\{Sx_n\}$, $\{Sy_n\}$有界, 则$\{x_n\}$强收敛于 S 的唯一不动点•

关键词: 一致光滑实 Banach 空间; 带误差的 Ishikawa 迭代; 强增生算子
分类号: O177.91　　文献标识码: A

1 引言及预备知识

设 X 为实 Banach 空间• X^* 为其对偶空间, $\|\cdot\|$ 为范数• 正规对偶映射 $J: X \to 2^{X^*}$ 定义为

$$
Jx = \{x^* \in X^* \mid \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\},
$$

其中, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为广义对偶对• 如果 X^* 是严格凸的, 则 J 是单值的且 $\forall t > 0, x \in X, J(tx) = tJx$• 如果 X^* 是一致凸的, 则 J 在 X 的任何有界子集上是一致连续的(参见 Browder[1], Barbu[2])•

算子 $T: X \supset D(T) \to R(T) \subset X$ 称为增生的• 如果对每 $x, y \in D(T)$, 相应地存在 $j \in J(x-y)$ 使得

$$
\langle Tx - Ty, j \rangle \geqslant 0 \tag{1.1}
$$

* 收稿日期: 1997_09_02; 修订日期: 1998_09_11
作者简介: 薛志群(1965~), 男, 硕士, 讲师

增生算子的概念由 Browder[1] 和 Kato[3] 于 1967 年独立引入• 在增生算子理论中一个基本结果归功于 Browder• 即他证明了如果 T 是局部 Lipshitzian 增生的, 则初值问题:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+Tu=0,\quad u(0)=u_0 \tag{1.2}$$

增生算子 T 称为强增生的, 如果存在正常数 k 并且在(1.1) 中用 $k\|x-y\|^2$ 代替 0, 仍使(1.1) 成立• 不失一般性, 假设 $k\in(0,1)$•

关于强增生算子, 已有许多作者进行了研究(例如 Chidume[4,5], Liu[6])• 同时, Deimling[7] 证明了若 X 是一致光滑的, $T: X\to X$ 为连续(或次连续) 强增生的, 则 $R(T)=X$• 因此, 对于 $\forall f\in X$, 方程 $Tx=f$ 在 X 中至少有一解•

最近, Liu[6, 定理 1] 证明了下述结果:

设 X 是一致光滑 Banach 空间• $T: X\to X$ 为 Lipschitzian 强增生算子, 强增生常数为 $k\in(0,1)$• Lipschitzian 常数 $L\geqslant 1$• 定义 $S: X\to X$ 为 $Sx=f+x-Tx$• 设 $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ 为 X 中序列且 $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\|<\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\|v_n\|<\infty$• $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ 为 $[0,1]$ 中实数列满足:

(i) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;

(ii) $\limsup_{n\to\infty}\beta_n<\frac{k}{L^2-k}$•

任取 $x_0\in X$, 迭代序列 $\{x_n\}$ 定义为:

引言

$$\begin{cases} x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Sy_n+u_n, \\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Sx_n+v_n \quad (n\geqslant 0)\text{•}\end{cases}$$

若 $\{Sx_n\}$ 有界, 则 $\{x_n\}$ 强收敛于方程 $Tx=f$ 的唯一解• 一个问题自然出现: 在没有 Lipschitz 条件下, Liu[6, 定理 1] 还能成立吗?

本文将要解决这个问题, 下面引进引理•

引理 1.1[7] 设 X^* 为严格凸的实 Banach 空间• 则对 $\forall x, y\in X$• $\|x-y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\langle y, J(x+y)\rangle$•

引理 1.2[6] 设 $\{\rho_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为非负实数列满足:

$$\rho_{n+1}\leqslant(1-\lambda_n)\rho_n+o(\lambda_n),$$

其中, $\lambda_n\in[0,1]$, $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n=\infty$, 则 $\rho_n\to 0\ (n\to\infty)$•

2 主要结果

定理 2.1 设 X 为一致光滑实 Banach 空间, $T: X\to X$ 为连续的强增生算子• 任给 $f\in X$, 定义 $S: X\to X$ 为 $Sx=f-Tx+x$, 对 $\forall x\in X$• 设 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $(0,1)$ 中实数列满足条件

(i) $\alpha_n\to 0$, $\beta_n\to 0$, $(n\to\infty)$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$;

假设 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 X 中序列且满足 $\|u_n\|=o(\alpha_n)$, $\|v_n\|\to 0(n\to\infty)$• $\forall x_0\in$

X, a迭代序列$\{x_n\}$定义为: to

$$(\mathrm{IS})\quad\begin{cases}x_{n+1}=(1-\alpha_n)x_n+\alpha_n Sy_n+u_n,\\ y_n=(1-\beta_n)x_n+\beta_n Sx_n+v_n,\ (n\geqslant 0)\end{cases}\qquad 2$$

若$\{Sx_n\}$, $\{Sy_n\}$有界, 则$\{x_n\}$强收敛于S的唯一不动点•

证明 依 Deimling[7], 可得方程 $Tx=f$ 有唯一解, 记为 q• 则 q 为S 的不动点• 因为 T 为强增生算子• 所以存在 $k(0,1)$ 使得对 $\forall x,y\in X$ 有

$$\langle Tx-Ty,J(x-y)\rangle\geqslant k\|x-y\|^2 \tag{2.1}$$

$$\langle Sx-Sy,J(x-y)\rangle\leqslant(1-k)\|x-y\|^2 \tag{2.2}$$

令 $M=$ 且$\max\{\sup\{\|Sx_n\|\},\sup\{\|Sy_n\|\}\}$•

利用引理 1.1 及(IS)我们得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2=&\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Sy_n-Sq)+u_n\|^2\leqslant\\&\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Sy_n-Sq)\|^2+2\langle u_n,J(x_{n+1}-q)\rangle\leqslant\\&\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Sy_n-Sq)\|^2+2\langle u_n,J(a-\alpha_n)(x_n-q)\rangle\\&+\\&2\langle u_n,J\frac{(x_{n+1}-q)}{1+\|x_n-q\|}-J\frac{(1-\alpha_n)(x_n-q)}{1+\|x_n-q\|}\rangle(1+\|x_n-q\|)\leqslant\\&\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Sy_n-Sq)\|^2+2(1-\alpha_n)\|u_n\|\|x_n-q\|\\&+\\&2\|u_n\|A_n(1+\|x_n-q\|)\leqslant\\&\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Sy_n-Sq)\|^2+\|u_n\|+\\&\|u_n\|\|x_n-q\|^2+2\|u_n\|A_n(1+\|x_n-q\|)\leqslant\\&\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Sy_n-Sq)\|^2+3\|u_n\|A_n+\\&\|u_n\|+(\|u_n\|A_n+\|u_n\|)\|x_n-q\|^2,\end{aligned}\tag{2.3}$$

其中, $A_n=\left\|J\frac{(x_{n+1}-q)}{1+\|x_n-q\|}-J\frac{(1-\alpha_n)(x_n-q)}{1+\|x_n-q\|}\right\|\to 0\ (n\to\infty)$• 事实上, 序列 $\left\{\frac{(x_{n+1}-q)}{1+\|x_n-q\|}\right\}$ 与 $\left\{\frac{(1-\alpha_n)(x_n-q)}{1+\|x_n-q\|}\right\}$ 为有界序更, 而且 $0\ \frac{x_{n+1}-q}{1+\|x_n-q\|}-\frac{(1-\alpha_n)(x_n-q)}{1+\|x_n-q\|}\to 0\ (n\to\infty)$• 由于 X 为一致光滑 Banach 空间• 所以 J 在任何有界子集上一致连续• 因此 $A_n\to 0\ (n\to\infty)$•

继续运用引理 1.1 及(IS)我们得

$$\begin{aligned}&\|(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Sy_n-Sq)\|^2\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+2\alpha_n\langle Sy_n-Sq,J((1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Sy_n-Sq))\rangle\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+2\alpha_n\langle Sy_n-Sq,J\frac{((1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Sy_n-Sq))}{1+\|x_n-q\|}-\\&J\frac{(1-\alpha_n)(x_n-q)}{1+\|x_n-q\|}\rangle(1+\|x_n-q\|)+2\alpha_n(1-\alpha_n)\langle Sy_n-Sq,J(x_n-q)\rangle\leqslant\\&(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+2\alpha_n\|Sy_n-Sq\|B_n(1+\|x_n-q\|)+2\alpha_n(1-\alpha_n)\times\\&\langle Sy_n-Sq,J\frac{(x_n-q)}{1+\|x_n-q\|}-J\frac{(y_n-q)}{1+\|x_n-q\|}\rangle(1+\|x_n-q\|)+\\&2\alpha_n(1-\alpha_n)\langle Sy_n-Sq,J(y_n-q)\rangle\leqslant\end{aligned}$$

$$(1-\alpha_n)^2\|x_n-q\|^2+4\alpha_nM(B_n+C_n)(1+\|x_n-q\|)+$$
$$2\alpha_n(1-k)\|y_n-q\|^2\leqslant$$
$$((1-\alpha_n)^2+2\alpha_nM(B_n+C_n))\|x_n-q\|^2+6\alpha_nM(B_n+C_n)+$$
$$2\alpha_n(1-k)\|y_n-q\|^2, \tag{2.4}$$

其中, $B_n=\left\|J\dfrac{(1-\alpha_n)(x_n-q)+\alpha_n(Sy_n-Sq)}{1+\|x_n-q\|}-J\dfrac{(1-\alpha_n)(x_n-q)}{1+\|x_n-q\|}\right\|\to 0,$

$C_n=\left\|J\dfrac{(x_n-q)}{1+\|x_n-q\|}-J\dfrac{(y_n-q)}{1+\|x_n-q\|}\right\|\to 0\quad(n\to\infty)\cdot$

(同 $A_n\to 0\quad(n\to\infty)$)

再次利用引理 1.1 及(IS)我们有

$$\|y_n-q\|^2=\|(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(Sx_n-Sq)+v_n\|^2\leqslant$$
$$\|(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(Sx_n-Sq)\|^2+2\langle v_n,J(y_n-q)\rangle\leqslant$$
$$(1-\beta_n)^2\|x_n-q\|^2+2\beta_n\langle Sx_n-Sq,J((1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(Sx_n-Sq))\rangle+$$
$$2\langle v_n,J\frac{(y_n-q)}{1+\|x_n-q\|}-J\frac{(x_n-q)}{1+\|x_n-q\|}\rangle(1+\|x_n-q\|)+$$
$$2\langle v_n,J(x_n-q)\rangle\leqslant$$
$$(1-\beta_n)^2\|x_n-q\|^2+2\beta_n\langle Sx_n-Sq,J\frac{(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(Sx_n-Sq)}{1+\|x_n-q\|}-$$
$$J\frac{(1-\beta_n)(x_n-q)}{1+\|x_n-q\|}\rangle(1+\|x_n-q\|)+2\beta_n\langle Sx_n-Sq,$$
$$J(1-\beta_n)(x_n-q)\rangle+2\|v_n\|C_n(1+\|x_n-q\|)+2\|v_n\|\|x_n-q\|\leqslant$$
$$(1-\beta_n)^2\|x_n-q\|^2+4M\beta_nD_n(1+\|x_n-q\|)+2\beta_n(1-\beta_n)$$
$$(1-k)\|x_n-q\|^2+3\|v_n\|C_n+\|v_n\|C_n\|x_n-q\|^2+$$
$$\|v_n\|+\|v_n\|\cdot\|x_n-q\|^2\leqslant$$
$$((1-\beta_n)^2+2\beta_n(1-\beta_n)(1-k)+\|v_n\|C_n+\|v_n\|+$$
$$2M\beta_nD_n)\|x_n-q\|^2+3\|v_n\|C_n+\|v_n\|+6M\beta_nD_n \tag{2.5}$$

其中, $D_n=\left\|J\dfrac{(1-\beta_n)(x_n-q)+\beta_n(Sx_n-Sq)}{1+\|x_n-q\|}-J\dfrac{(1-\beta_n)(x_n-q)}{1+\|x_n-q\|}\right\|\to 0\,(n\to\infty)$(同 $A_n\to 0\,(n\to\infty)$)

将(2.4)、(2.5)代入(2.3)得

$$\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant(1-2k\alpha_n+\alpha_n(\alpha_n+2M(B_n+C_n)+2(1-k)(-\beta_n^2-$$
$$2k\beta_n+2k\beta_n^2+\|v_n\|C_n+\|u_n\|+2\beta_nD_n)+\frac{\|u_n\|A_n}{\alpha_n}+$$
$$\frac{\|u_n\|}{\alpha_n}))\|x_n-q\|^2+3\|u_n\|A_n+\|u_n\|+6M\alpha_n(B_n+C_n)+$$
$$6\alpha_nC_n\|v_n\|+2\alpha_n\|v_n\|+12M\alpha_n\beta_nD_n \tag{2.6}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n=\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}B_n=\lim_{n\to\infty}C_n=\lim_{n\to\infty}D_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\|u_n\|}{\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\|v_n\|=0 \tag{2.7}$$

存在 N, 对 $\forall n\geqslant N$ 使得

$$\alpha_n+2M(B_n+C_n)+2(1-k)(-\beta_n^2-2k\beta_n+2k\beta_n^2+\|v_n\|C_n+\|u_n\|+$$

$$2\beta_n D_n) + \frac{\|u_n\| A_n}{\alpha_n} + \frac{\|u_n\|}{\alpha_n} < k \tag{2.8}$$

令 $\rho_n = \|x_n - q\|^2$, $\lambda_n = k\alpha_n$, $o(\lambda_n) = 3\|u_n\| A_n + \|u_n\| + 6M\alpha_n(B_n + C_n) + 6\alpha_n\|v_n\| C_n + 2\alpha_n\|v_n\| + 12M\alpha_n\beta_n$, 因此对 $\forall n \geqslant N$ 我们有

$$\rho_{n+1} \leqslant \rho_n(1 - \lambda_n) + o(\lambda_n) \tag{2.9}$$

由引理 1.2, 我们得 $\rho_n \to 0(n \to \infty)$, 即 $x_n \to q(n \to \infty)$, 定理 1.1 证毕•

注 1　当 $u_n \equiv v_n \equiv 0$, 定理 2.1 改进 Chidume[4, 定理 2]•

注 2　由于定理 2.1 在没有 Lipschitz 假设之下, 仍成立, 因此推广了 Liu[6, 定理 1]•

下面我们利用同样方法证明定理 2.2•

定理 2.2　设 X 为一致光滑实 Banach 空间• $T: X \to X$ 为次连续的强增生算子• 对 $\forall f \in X$, 定义 $S: X \to X$ 为 $Sx = f - Tx + x$, $\forall x \in X$• 设 $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ 与 $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 $(0, 1)$ 中两个实数列且满足:

(i) $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ $(n \to \infty)$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$•

假设 $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为 X 中两个序列满足 $\|u_n\| = o(\alpha_n)$, $\|v_n\| \to 0(n \to \infty)$, 对 $\forall x_0 \in X$, 迭代序列 $\{x_n\}$ 定义为

$$(\mathrm{IS})\quad \begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n S y_n + u_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n S x_n + v_n, \ (n \geqslant 0)\end{cases}$$

若 $\{Tx_n\}$, $\{Ty_n\}$ 是有界的, 则 $\{x_n\}$ 强收敛于 S 的唯一不动点•

致谢　作者真诚感谢审稿人提出的宝贵意见•

参 考 文 献

[1] Browder F E. Nonlinear operators and nonlinear equations of evolntion in Banach spaces[J]. Proc Sympos Pure Math, 1976, **18**

[2] Barbu V. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces[M]. Leyden, The Netherlands: Noordhoff Int Publ, 1976

[3] Kato T. Nonlinear semigroups and evolution equations[J]. J Math Soc Japan, 1967, **18/19**:, 508~520

[4] Chidume C E. Iterative solution of nonlinear equations with strongly accretive operators[J]. J Math Anal Appl, 1995, (192): 502~518

[5] Chidume C E. Iterative solution of nonlinear equation in smooth Banach spaces[J]. Nonlinear Anal TMA, 1996, **26**(11): 1823~1834

[6] Liu L S. Ishikawa and Mann iterative process with erorrs for nonlinear strangly accretive mappings in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1995, (194): 114~125

[7] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis[M]. New York: Berlin: Springer_Verlag, 1985

[8] Deimling K., Zeros of accretive operators[J]. Manuscripta Math, 1974, (13): 365~374

[9] Weng X L. Fixed point iteration for local strictly pseudocontractive mapping[J]. Proc Amer Math Soc, 1991, (113): 727~731

Iterative Approximation with Errors of Fixed Point for a Class of Nonlinear Operation with a Bounder Range

Xue Zhiqun[1], Zhou Haiyun

Deptartment of Basic Science, Ordnance Engineering College, Shijianzhuang 050003, P R China

Abstract: Let X be a uniformly smooth real Banach space. Let $T: X \to X$ be a continuous and strongly accretive operator. For a given $f \in X$, define $S: X \to X$ by $Sx = f - Tx + x$, for all $x \in X$. Let $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}, \{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$ be two real sequences in $(0, 1)$ satisfying: [2].

(i) $\alpha_n \to 0, \beta_n \to 0$, as $n \to \infty$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

Assume that $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ and $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ are two sequences in X satisfying $\|u_n\| = o(\alpha_n)$ and $\|v_n\| \to 0$ as $n \to \infty$. For arbitrary $x_0 \in X$, the iteration sequence $\{x_n\}$ is defined by

$$(\mathrm{IS})\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n S y_n + u_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n S x_n + v_n \quad (n \geqslant 0) \end{cases},$$

Moreover, suppose that $\{Sx_n\}$ *and* $\{Sy_n\}$ are bounded, then $\{x_n\}$ converges strongly to the unique fixed point of S.

Key words: uniformly smooth real Banach spaces; Ishikawa iteration with errors; strongly accretive operator