应用数学和力学, 第 20 卷 第 1 期(1999 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

编文编号: 1000 0887(1999) 01_0099_103

轴对称加载的阶梯式压力容器的径向振动

张英世[1], 马致祥[2]

[1] 北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系 508 教研室, 北京 100083;

[2] 北京交通管理干部学院, 北京东燕郊 101601

(钱伟长推荐)

摘要: 用奇异函数建立轴对称加载的阶梯式压力容器径向自由振动和强迫振动的微分方程并求得其通解, 用 W 算子给出主振型函数的表达式及常见支承条件下容器的频率方程

关键词: 轴对称加载; 阶梯式压力容器; 径向振动; 自由振动; 强迫振动响应

分类号: O326 文献标识码: A

引 言

薄壁压力容器在工程中应用广泛, 如: 发电厂锅炉汽包、汽轮机转子转鼓、汽缸引出管、储气罐等 本文讨论承受轴对称径向载荷的阶梯式变厚度圆筒形薄壁压力容器的径向振动

1 自由振动

1.1 自由振动微分方程及其通解

设有总长为 l 的薄壁压力容器, 其壁厚沿轴向呈 n 级阶梯式变化, 各级阶梯的长度为 $l_i = x_i - x_{i-1}$, 各级阶梯内容器的单位面积质量为 m_i、厚度为 h_i、抗弯刚度为 $D_i = \frac{Eh_i^3}{12(1-\mu^2)}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, E 为材料的弹性模量, μ 为泊松系数

在不考虑轴向拉力的情况下, 变厚度压力容器径向自由振动的微分方程为[1]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right] + K(x)w(x,t) + m(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0, \tag{1.1}$$

式中, $w(x,t)$ 为振动的任一瞬时从平衡位置量起的容器的径向位移, $K(x) = Eh(x)/R^2(x)$; $R = R(x)$ 为容器的平均半径

当壁厚沿 x 方向呈阶梯式变化时(图1), 可将容器的抗弯刚度、单位面积质量及 $K(x)$ 分别表为[2]

$$D(x) = \sum_{i=1}^{n} D_i\left(\langle x - x_{i-1}\rangle^0 - \langle x - x_i\rangle^0\right), \tag{1.2}$$

$$m(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\langle x - x_{i-1}\rangle^0 - \langle x - x_i\rangle^0\right), \tag{1.3}$$

收稿日期: 1997_04_21; 修订日期: 1998_09_22
作者简介: 张英世(1948~), 副教授, 已发表论文、译文 21 篇

$$K(x) = \sum_{i=1}^{n} K_i(x - x_{i-1} - x - x_i),\qquad (1\ 4)$$

式中, n 为容器壁厚沿 x 方向变化的阶梯数; D_i, m_i 分别为第 i 级容器的抗弯刚度与单位面积质量; $K_i = Eh_i/R_i^2$; $x_0 = 0, x_n = l, x - x_0 = 1, x - x_n = 0$

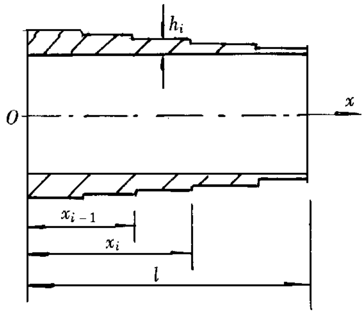

图 1 阶梯式压力容器

当容器各阶梯衔接处的总剪力的总弯矩连续变化时, 用式(1 2) ~ (1 4) 及 函数的性质, 可将式(1 1) 化为

$$D(x) \frac{{}^4 w(x,t)}{x^4} + K(x) w(x,t) + m(x) \frac{{}^2 w(x,t)}{t^2} = 0,\qquad (1\ 5)$$

此即阶梯式压力容器径向自由振动的微分方程

设 $$w(x,t) = \sum_{j=1} w_j(x,t),\qquad (1\ 6)$$

其中 $$w_j(x,t) = Y_j(x) T_j(t)\qquad (1\ 7)$$

为相应于第 j 个主振型的容器的径向位移 将式(1 6) ~ (1 7) 代入式(1 5), 可得以下二方程

$$T_j(t) + {}_j^2 T_j(t) = 0,\qquad (1\ 8)$$

$$Y_j^{(4)}(x) + \frac{1}{D(x)}[K(x) - m(x)\ {}_j^2] Y_j(x) = 0,\qquad (1\ 9)$$

式中, $_j$ 为容器的第 j 阶固有频率

方程(2 8) 、(2 9) 之通解分别为

$$T_j(t) = T_j(0)\cos\ {}_j t + \frac{T_j(0)}{{}_j}\sin\ {}_j t,\qquad (1\ 10)$$

$$\begin{aligned} Y_j(x) = {} & Y_j(0) \sum_{i=1}^{n} (x - x_{i-1} - x - x_i) W^{(i-1)}\ {}_1(\ {}_1 x) + \\ & Y_j(0) \sum_{i=1}^{n} (x - x_{i-1} - x - x_i) W^{(i-1)}\ {}_2(\ {}_1 x) + \\ & Y_j(0) \sum_{i=1}^{n} (x - x_{i-1} - x - x_i) W^{(i-1)}\ {}_3(\ {}_1 x) + \\ & Y_j(0) \sum_{i=1}^{n} (x - x_{i-1} - x - x_i) W^{(i-1)}\ {}_4(\ {}_1 x), \end{aligned}\qquad (1\ 11)$$

式中, $T_j(0)$, $T_j(0)$ 为函数 $T_j(t)$ 之初参数, 可由振动的初始条件确定; $Y_j(0)$ $Y_j(0)$, $Y_j(0)$, $Y_j(0)$ 为主振型函数 $Y_j(x)$ 的初参数, 可由容器的边界条件确定; $_1$ ~ $_4$ 为影响函数, 其定义与分段常数 $_i^4$ 及 $D_i^{-1}(K_i - m_i\ {}_j^2)(i = 1, 2, \ , n)$ 有关, 现进行讨论, 在下列有关影响函数及其微分关系的讨论中, $i = 1, 2, \ , n$

1) $K_i - m_i\ {}_j^2 > 0$

令 $4\ {}_i^4 = \frac{1}{D_i}(K_i - m_i\ {}_j^2)$, 则有

$$
\left.\begin{aligned}
{}_1[\ \ _i(x-x_{i-1})] &= \mathrm{ch}\ \ _i(x-x_{i-1})\cos\ \ _i(x-x_{i-1}),\\
{}_2[\ \ _i(x-x_{i-1})] &= \frac{1}{2\ \ _i}[\mathrm{sh}\ \ _i(x-x_{i-1})\cos\ \ _i(x-x_{i-1})+\\
&\quad \mathrm{ch}\ \ _i(x-x_{i-1})\sin\ \ _i(x-x_{i-1})],\\
{}_3[\ \ _i(x-x_{i-1})] &= \frac{1}{2\ \ _i^2}\mathrm{sh}\ \ _i(x-x_{i-1})\sin\ \ _i(x-x_{i-1}),\\
{}_4[\ \ _i(x-x_{i-1})] &= \frac{1}{4\ \ _i^3}[-\ \mathrm{sh}\ \ _i(x-x_{i-1})\cos\ \ _i(x-x_{i-1})+\\
&\quad \mathrm{ch}\ \ _i(x-x_{i-1})\sin\ \ _i(x-x_{i-1})]
\end{aligned}\right\}\qquad (1\ 12)
$$

以下

2) $K_i - m_i\ \ _j^2 < 0$

令 $\ \ _i^4 = \frac{1}{D_i}(m_i\ \ _j^2 - K_i)$, 则有

$$
\left.\begin{aligned}
{}_1[\ \ _i(x-x_{i-1})] &= \frac{1}{2}[\mathrm{ch}\ \ _i(x-x_{i-1})+\cos\ \ _i(x-x_{i-1})],\\
{}_2[\ \ _i(x-x_{i-1})] &= \frac{1}{2\ \ _i}[\mathrm{sh}\ \ _i(x-x_{i-1})+\sin\ \ _i(x-x_{i-1})],\\
{}_3[\ \ _i(x-x_{i-1})] &= \frac{1}{2\ \ _i^2}[\mathrm{ch}\ \ _i(x-x_{i-1})-\cos\ \ _i(x-x_{i-1})],\\
{}_4[\ \ _i(x-x_{i-1})] &= \frac{1}{2\ \ _i^3}[\mathrm{sh}\ \ _i(x-x_{i-1})-\sin\ \ _i(x-x_{i-1})]
\end{aligned}\right\}\qquad (1\ 13)
$$

上述两种情况下的影响函数之间的微分关系, 可统一用下式表示

$$
\left.\begin{aligned}
{}_1[\ \ _i(x-x_{i-1})] &= -\frac{1}{D_i}(K_i - m_i\ \ _j^2)\ \ {}_4[\ \ _i(x-x_{i-1})],\\
{}_2[\ \ _i(x-x_{i-1})] &= \ {}_1[\ \ _i(x-x_{i-1})],\\
{}_3[\ \ _i(x-x_{i-1})] &= \ {}_2[\ \ _i(x-x_{i-1})],\\
{}_4[\ \ _i(x-x_{i-1})] &= \ {}_3[\ \ _i(x-x_{i-1})]
\end{aligned}\right\}\qquad (1\ 14)
$$

下列

W 算子的定义及其运算规则见[2]

将式(1 10)~(1 11)代入式(1 7), 再代入式(1 6), 便得方程(1 5)之通解, 亦即容器径向自由振动的位移

$$
w(x,t) = \sum_{j=1} Y_j(x)\left[T_j(0)\cos\ \ _jt + \frac{T_j(0)}{\ \ _j}\sin\ \ _jt\right] \qquad (1\ 15)
$$

1 2 固有频率的求法

由式(1 9)可得容器固有频率的表达式

$$
\ \ _j^2 = \frac{Y_j^{(4)}(x)}{Y_j(x)}\sum_{i=1}^{n}\frac{D_i}{m_i}(\ \ x-x_{i-1}\ \ -\ \ x-x_i\ \ )+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{m_i}(\ \ x-x_{i-1}\ \ -\ \ x-x_i\ \ ) \qquad (1\ 16)
$$

具体求频率时, 可用表 1 给出的频率方程

1 3 算　　例

两端封口的二级阶梯薄壁压力容器(图 2), 总长 $l = 3$ m, 两段各长 $l_1 = 1$ m, $l_2 = 2$ m, 壁厚 $h_1 = 0\ 01$ m, $h_2 = 0\ 005$ m, 内径 $d = 10$ m, 材料的弹性模量 $E = 200$ GPa, 密度 $\ \ = 7800$ kg/m^3, 泊松系数 $\ \ = 0\ 3$, 求其径向自由振动的位移和一阶固有频率

表 1 阶梯式压力容器的频率方程

支 座	两端固定	两端自由	左端固定 右端自由	左端自由 右端固定
频率方程	$\begin{vmatrix} A_3 & A_4 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} A_3 & A_4 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} = 0$

表中, $A_m = [W^{(n-1)}{}_m(\ {}_1 x)]_{x=l}$, $m = 1, 2, 3, 4$; 、 、 分别表示相应项对 x 的 1, 2, 3 阶导数

解 容器两端封口, 故其主振型函数为

$$Y_j(x) = Y_j(0)[(1- \quad x - \frac{l}{3} \quad) \ {}_3(\ {}_1 x) + x - \frac{l}{3} \ W \ {}_3(\ {}_1 x)] + Y_j(0)[(1- \quad x - \frac{l}{3} \quad {}_4(\ {}_1 x) + x - \frac{l}{3} \ W \ {}_4(\ {}_1 x)]$$

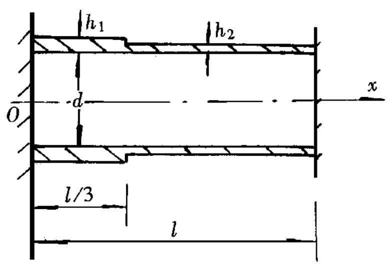

图 2 二级阶梯薄壁压力容器

由题意, 有 $K_i - m_i \ {}_j^2 < 0 (i = 1, 2)$, 故 ${}_1 \sim {}_4$ 由式 (1 13) 给出, 其中

$${}_1^4 = \frac{1}{D_1}(m_1 \ {}_j^2 - k_1), \qquad {}_2^4 = \frac{1}{D_2}(m_2 \ {}_j^2 - K_2)$$

频率方程为

$$\begin{vmatrix} [W \ {}_3(\ {}_1 x)]_{x=l} & [W \ {}_4(\ {}_1 x)]_{x=l} \\ [W \ {}_3(\ {}_1 x)]_{x=l} & [W \ {}_4(\ {}_1 x)]_{x=l} \end{vmatrix} = 0$$

将各影响函数分别展开为泰勒级数, 取前两项代入上式, 可得容器的一阶固有频率

$${}_1 = 1012 \ 3323 = 0 \ 0365 \frac{2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_1}{A_1}},$$

其中, l, E, 已由题目给定, $I_1 = 3 \ 9368 \ \mathrm{m}^4$, $A_1 = 0 \ 1571 \ \mathrm{m}^2$, 相应于 ${}_1$, 有 ${}_1^4 = 5 \ 2122 \ \mathrm{m}^{-4}$, ${}_2^4 = 3 \ 4164 \ \mathrm{m}^{-4}$ 由此便可求出主振型函数, 进而求得容器径向自由振动的位移, 此处, $Y_j(0)$、$Y_j(0)$ 为任意常数

2 强迫振动

阶梯式变厚度薄壁压力容器在轴对称径向载荷 $q(x, t)$ 作用下强迫振动的微分方程为:

$$D(x) \frac{{}^4 w(x, t)}{x^4} + K(x) w(x, t) + m(x) \frac{{}^2 w(x, t)}{t^2} = q(x, t) \tag{2 1}$$

根据模态分析法, 将方程(2 1) 的解表为

$$w(x, t) = \sum_{j=1} Y_j(x) T_j(t) \tag{2 2}$$

式中, $Y_j(x)$ 为正则化的主振型函数, $T_j(t)$ 为广义坐标, 将式(2 2) 代入方程(2 1), 可求得其通解, 即容器的动力响应

$$w(x, t) = \sum_{j=1} Y_j(x) \Big[T_j(0) \cos \ {}_j t + \frac{T_j(0)}{{}_j} \sin \ {}_j t \ + w_0(x, t), \tag{2 3}$$

式中，$T_j(0)$, $\dot{T}_j(0)$ 分别为广义坐标和广义速度的初值，可由初值条件及式(2 2) 确定，$w_0(x, t)$ 为强迫振动响应

$$w_0(x,t)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{Y_j(x)}{M_j\omega_j}\int_0^t Q_j(\tau)\sin\omega_j(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \qquad (2\ 4)$$

式中

$$Q_j(t)=\int_0^l q(x,t)\,Y_j(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (2\ 5)$$

$$M_j=\int_0^l m(x)\,Y_j^2(x)\,\mathrm{d}x \qquad (2\ 6)$$

分别为与广义坐标相应的第 i 阶广义力和广义质量

用奇异函数可求得容器在不同形式的轴对称载荷作用下的强迫振动响应

参 考 文 献

[1] Ugral A C. 板壳应力[M]. 范钦珊译. 北京: 中国建筑工业出版社, 1986, 188~ 190

[2] 张英世, 王燮山. 文克尔地基上阶梯式单向矩形薄板的振动[J]. 应用数学和力学, 1998, **19**(2): 157 ~ 164

Radial Vibrations of Axisymmetrically Loaded Stepped Pressure Vessels

Zhang Yingshi[1], Ma Zhixang[2]

[1]Division 508, Department of Flight Vehicle Design and Applied Mechanics, Beijing University of Aeronatics and Astronautics, Beijing 100083, P R China;

[2]Beijing Communications Management Institute for Executives, Beijing 101601, P R China

Abstract: Differential equations of free/forced radial vibrations of axisymmetrically loaded stapped pressure vessels are established by using singular functions. Furthermore, their general solutions are solved, the expression of vibration mode function and frequency equations on usual supports are derived with W operator and forced response of such vessels are calculated.

Key words: axisymmetrically loaded; stepped pressure vessel; radial vibration; free vibration; forced response