应用数学和力学, 第 20 卷 第 1 期(1999 年 1 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

论文编号: 1000－0887(1999) 01_0105_009

关于非线性边值问题几个存在性定理的新结果*

吴广荣[1], 黄文华[2], 沈祖和[1]

[1] 南京大学数学系, 南京 210093;
[2] 无锡轻工业大学, 无锡 214036

(张鸿庆推荐)

摘要: 本文运用同胚理论, 研究微分方程边值问题解的存在性与唯一性, 得到两个基本定理, 推广了 Brown(in Annali. Mat. Pura. Appli. 1975, 106: 205～ 214) 的结论, 取消了有界性假设, 并把我们的结果用于有限维的情况, 考虑了非线性守恒系统在扰动情况下(Newton 类运动方程) 周期解的存在性与唯一性问题• 把同胚用于这类问题的研究目前还是新的•

关键词: 同胚; 周期解; 大范围反函数定理
分类号: 34C15, 34A34 文献标识码 A

引 言

设 L 为一个线性微分算子, N 是一个连续 Frechet 可微算子, F 是一个有界算子, 许多文章考虑了

$$Lu + N[u] = F(u) \tag{1}$$

在 $L + N'(u)$ 满足一定条件下解的存在性和唯一性• 一个典型的例子是

$$(Lu)(x) + g(x, u(x), u'(x)) = f(x, u(x), u'(x)) \tag{2}$$

这里的 L 为二阶微分算子, f 是有界的, g 与 L 满足一定的相关条件• 研究这类问题, 经常使用的工具是 Schauder 不动点定理(Schauder fixed point theorem)• 通过构造一个先验界, 然后得到存在性结论• 但这不能得到唯一性的结果, 度论的使用也是不能得到解的唯一性信息, 虽然这些方法的约束要求较弱• 本文拟用大范围反函数定理去研究解的分布, 同时得到了解的唯一性的一个条件, 推广了 Brown[1] 的几个主要结果• 我们的主要工具是同胚延拓方法, 把同胚用于这方面的研究目前是新的•

1 同 胚

这一节我们先叙述关于同胚的几个基本结果• 设 X 与 Y 为 Banach 空间, D 为 X 中的开集• $F: D \subseteq X \to Y$ 为连续映照•

定义 1.1 连续映照 $F: D \subseteq X \to Y$ 满足条件(C): 如果对任一点 $(x_0, y) \in D \times Y$ 和任

* 收稿日期: 1996_12_27; 修订日期: 1998_06_018
作者简介: 吴广荣(1969～), 男, 博士生

一连续曲线 $p:[0,a)\to D$, $a\in(0,1]$, 对

$$F(p(t))=(1-t)F(x_0)+ty\ (0\leqslant t<a)$$

成立时, 有序列 $\{t_i\mid i=1,2,\dots\}$ 使得极限 $\lim_{n\to\infty}p(t_n)$ 存在且此极限在 D 中•

定理 1.1 (Plastock[2]) $F:D\subset X\to Y$ 为一局部同胚• 条件(C) 是 F 从 D 到 Y 同胚的充要条件•

2 主要结果

设 X 和 Y 是两个 Banach 空间, 范数分别为 $\|\cdot\|_X$ 和 $\|\cdot\|_Y$• L 是一个闭自伴算子, 定义域 $D(L)$ 在 X 中稠密, 值域在 Y 内• $D(L)$ 是闭的, 且在范数

$$|||u|||=\|u\|_X+\|Lu\|_Y$$

下是一个 Banach 空间•

定理 2.1 设 $N:X\to Y$ 连续 Frechet 可微, 存在函数 $T(s):R^+\to R^+$, 且 $T(s)=\sup_{\|u\|_X\leqslant s}\|N'(u)\|$• 并设 $L+N'(u)$ 对任何 $u\in X$ 可逆且有

$$\int_1^\infty\frac{\mathrm{d}s}{1+P(s)(1+T(s))}=\infty \tag{2.1}$$

成立, 这里 $P(s)=\sup_{\|u\|_X\leqslant s}\|[L+N'(u)]^{-1}\|$• 则 $L+N$ 是 $D(L)$ 到 Y 的同胚•

证明 因为对任给的 $u\in X$, $L+N'(u)$ 有逆且 $D(L)$ 在 X 中稠密, 故 $[L+N'(u)]^{-1}$ 对任何 $u\in D(L)$ 成立, 这保证了对任何 $u\in D(L)$, $L+N$ 为局部同胚•

下面我们证明 $L+N$ 满足条件(C)• 首先证明

$$\|[L+N'(u)]^{-1}\|\leqslant(T(\|u\|_X)+1)P(\|u\|_X)+1$$

对任给的 $u\in D(L)$ 成立•

任取 $u_0\in D(L)$, 并记 $[L+N'(u_0)]^{-1}y=x$• 则

$$\begin{aligned}|||x|||&=\|x\|_X+\|Lx\|_Y=\\&\|[L+N'(u_0)]^{-1}y\|_X+\|L[L+N'(u_0)]^{-1}y\|_Y\leqslant\\&P(\|u_0\|_X)\|y\|_Y+\|y\|_Y+\|N'(u_0)[L+N'(u_0)]^{-1}y\|_Y\leqslant\\&\{P(\|u_0\|_X)+1+T(\|u_0\|_X)P(\|u_0\|_X)\}\|y\|_Y\end{aligned}$$

故有

$$\|[L+N'(u_0)]^{-1}\|\leqslant(T(\|u_0\|_X)+1)P(\|u_0\|_X)+1$$

因为 u_0 为任意的, 因此我们有

$$\|[L+N'(u)]^{-1}\|\leqslant(T(\|u\|_X)+1)P(\|u\|_X)+1$$

对任意 $u\in D(L)$ 成立•

任取 $u_0\in D(L)$, 记 $f_0=Lu_0+N[u_0]$, $q(t)=(1-t)f_0+tf$, $f_0,f\in Y$• 并记 $W(u)=Lu+N[u]$ 设 $W(p(t))=q(t)$, 这里 $t\in[0,a)$, $a\leqslant1$ 且 $p(0)=u_0$ 则

$$W'(p(t))p'(t)=q'(t)$$

故而

$$p'(t)=[W'(p(t))]^{-1}q'(t)$$

$$\|p(t)-p(0)\|_X=\|\int_0^t p'(t)\mathrm{d}t\|_X\leqslant$$

$$\int_0^t \|p'(t)\|_X \mathrm{d}t =$$
$$\int_0^t \|[W'(p(t))]^{-1} q'(t)\|_X \mathrm{d}t \leqslant$$
$$\int_0^t \|[W'(p(t))]^{-1}\| \mathrm{d}t \, \|f - f_0\|_Y \leqslant$$
$$\int_0^t \Big\{ P(\|p(t)\|_X)(1 + T(\|p(t)\|_X)) + 1 \ \mathrm{d}t \, \|f - f_0\|_Y$$

X (

因而

$$\|p(t)\|_X \leqslant \|p(0)\|_X + \|f - f_0\|_Y \cdot$$
$$\int_0^t \Big\{ P(\|p(t)\mathrm{F}\|_X)(1 + T(\|p(t)\|_X)) + 1 \Big\} \mathrm{d}t$$

由 Gronwall 不等式,

$$\int_{\|p(0)\|_X}^{\|p(t)\|_X} \frac{\mathrm{d}s}{P(s)(1 + T(s) + 1)} \leqslant \int_0^t \|f - f_0\|_Y \mathrm{d}t \leqslant \|f - f_0\|_Y$$

注意到(2.1)式成立,因此存在一个 $M > 0$,使得 $\|p(t)\|_X \leqslant M$ 对 $t \in [0, a)$ 成立。 设 t_i, $t_j \in [0, a)$, $t_i < t_j$,则

$$\|p(t_i) - p(t_j)\|_X \leqslant \int_{t_i}^{t_j} \|p'(s)\|_X \mathrm{d}s \leqslant$$
$$\|f - f_0\|_Y \int_{t_i}^{t_j} [P(M)(1 + T(M) + 1] \mathrm{d}s \leqslant$$
$$\|f - f_0\|_Y [P(M)(1 + T(M)) + 1] \, | t_j - t_i |$$

因而 $\{ p(t_i), i = 1, 2, \cdots$ 为一 Cauchy 序列, 故而 $L + N$ 满足条件 (C)。

综上所述, $L + N$ 为 $D(L)$ 到 Y 的同胚。

注 当 $N'(u)$ 和 $[L + N'(u)]^{-1}$ 同时有界时, 定理 2.1 结果亦真, (显然), 这由 Brown[1] 首先获得。

定理 2.2 L 和 N 满足定理 2.1 的条件。 如果 $F: D(L) \to Y$ 是一个连续紧有界算子, 则 $Lu + N[u] = F[u]$ 至少有一解。

证明 类似[1]中的定理 2.1 的推导, 我们首先可以得到 $G'(y) = [L + N'(x)]^{-1}$, 这里 $G = (L + N)^{-1}$ 且 $G(y) = x(y \in Y)$。 由于 F 有界, 故有 $K > 0$, 使得 $\|F(u)\| \leqslant K$ 对一切 $u \in D(L)$ 成立。 下面我们证明 $\|(L + N)^{-1} F(u)\|_X$ 为有界的。 事实上对任给 $u \in F(D(L))$, $\|v\|_Y \leqslant K$。 由于 $L + N$ 是一个 $D(L)$ 到 Y 的同胚, 因此, 有一个 $x(0) \in D(L)$ 使得

$$[L + N](x(0)) = 0$$

设 $q(t) = (1 - t)0 + tv \ (t \in [0, 1])$, v 为 Y 中任意向量。

$$(L + N)(x(t)) = tv = q(t), [L + N'(x(t))] x'(t) = v$$
$$x'(t) = [L + N'(x(t))]^{-1} v$$

因此

$$\|x(t) - x(0)\|_X \leqslant \int_0^t \|[L + N'(x(t))]^{-1} v\| \mathrm{d}t \leqslant$$

$$! \quad] \qquad K\int_0^t \left\{ P(\|x(t)\|_X)[1+T(\|x(t)\|_X)]+1 \right\} dt,$$

故

$$\|x(t)\|_X \leqslant \|x(0)\|_X + K\int_0^t \left\{ P(\|x(t)\|_X)[1+T(\|x(t)\|_X)]+1 \right\} dt$$

由 Gronwall 不等式,

$$\int_{\|x(0)\|_X}^{\|x(t)\|_X} \frac{ds}{P(s)(1+T(s)+1)} \leqslant \int_0^t K\,dt \leqslant K$$

因此 $\|x(t)\|_X \leqslant R$, $t \in [0,1]$, 故有 $\|x(1)\|_X \leqslant R$ 这表明

$$\|(L+N)^{-1}F(u)\|_X \leqslant R$$

对任意 $x \in D(L)$ 成立• 如果我们记 $B_R = \left\{ x \in D(L),\ \|x\| \leqslant R \right\}$, 则 $H \overset{\text{def}}{=} (L+N)^{-1}F$ 把 B_R 映入 B_R• 同时, $F: D(L) \to Y$ 是紧的, 连续的, $(L+N)^{-1}: Y \to D(L)$ 是连续的, 则 H 是紧的, 连续的• 从 Schauder 不动点定理可知 H 至少有一个不动点 $u \in B_R$, 显然对这样的 u, 有 $Lu + N[u] = F(u)$ 成立•

注 我们的结果不要求 $L+N$ 的有界性假设, 这推广了存在性的许多结论(如[1], [3], [4] 等中的结果)•

3 几个应用

我们用上面构造的结果来处理具体的方程• 我们考虑

$$u'' + \mathrm{Grad}G(u) = f(t) \tag{3.1}$$

这里 $f: R \to R^n$ 是连续的 2π 周期函数, $G: R^n \to R$ 二阶连续可微, 这类方程源自非线性摄动守恒系统, 由牛顿类(Duffing 类) 运动方程推得, 这类方程的质点受守恒的内力和周期性外力作用• 关于这类方程的解的存在性与唯一性一直是一个研究热点([3][5])•

记 $Lu = -u''$

$$(Nu)(t) = -\nabla G(u(t)) \quad (t \in [0, 2\pi])$$

并记 $X = L_n^2[0, 2\pi]$, $D(L) = \left\{ u \in X,\ u' \text{ 在}[0,2\pi] \text{ 上绝对连续},\ u_i(0) = u_i(2\pi),\ u_i'(2\pi),\ u_i'' \in L^2[0, 2\pi],\ i = 1, 2, 3, \cdots, n \right\}$•

则 L 是一个自伴算子, 其定义域 $D(L)$ 在 X 上稠密• 在图范数 $\|u\|_G = \|u\| + \|Lu\|$ 下, $D(L)$ 是一个 Banach 空间• 设 $\lambda_i(u)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 为 $\dfrac{\partial^2 G(u)}{\partial x_i \partial x_j}$ 的特征值, 其 $\lambda_1(u) \geqslant \lambda_2(n) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(u)$• 这里 L 有特征值 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots, n^2, \to +\infty$, 设有正整数 $N_k (k = 1, 2, \cdots, n)$, 使得 $N_k^2 < \lambda_k(n) < (N_{k+1})^2$, $(k = 1, \cdots, n)$ 对所有 $u \in D(L)$ 成立• 则我们知道零不是 $L + N'(u)$ 的特征值, 故知 $L + N'(u)$ 在 u 是可逆的, 因而 $Lu + N(u)$ 是在任给 $u \in D(L)$ 的局部同胚• (类似的讨论可参见[6], [3]), 由算子谱理论[7], 我们可知道

$$T(s) = \sup_{\|u\| \leqslant s} \|N'(u)\| = \sup_{\|u\| \leqslant s} \left\{ \lambda_1(u) \right\}$$

$$P(s) = \max_{\|u\| \leqslant s} \left\{ \left[\min_{1 \leqslant k \leqslant n} \left\{ \lambda_k(u) - N_k^2, (N_k + 1)^{2n} - \lambda_k(u) \right\} \right]^{-1} \right\}$$

我们记

$$Q(s) = 1 + P(s)(1 + T(s))$$

从这里的讨论和定理 2.1 我们可以得到

定理 3.1 设 L, N 如本节上面所述• $L + N$ 为局部同胚, 如同时有

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{Q(s)} = \infty$$

则 3.1 有唯一解•

注 定理 3.1 推广了[4]、[5]、[3]等文章的结果,目前是保证存在唯一的最弱条件•

参 考 文 献

[1] Brown K J. Nonlinear boundary value problems and a global inverse function theorem[J]. Annali Mat Pura Appli, 1975, **106**: 205~214

[2] Plastock R. Homeomorphisms between Banach spaces[J]. Trans Amer Math Soc, 1974, **200**: 169~183

[3] Brown K J, Lin S S. Periodically perturbed conservative system and a global inverse function theorem[J]. Nonlinear Analysis, 1980, TMA, **4**: 193~201

[4] Mawhin J. Recent trends in nonlinear boundary value problems[Z]. In: Proc Int Conf Nonlinear Oscillations[C], Berlin: Academic_Verlag, 1975: 75~90

[5] Bates P W. Solutions of nonlinear elliptic systems with meshed spectra[J]. Nonlinear Analysis, 1979, TMA, **4**(6): 1023~1030

[6] Dunford N, Schwartz J. Linear Opeator[M], volume Ⅰ, New York: Interscience, 1963

[7] Dunford N, Schwartz J. Linear Operator [M], Volume Ⅱ, New York: interscience, 1963

[8] Adams R A. Sobolev Spaces[M]. New York: Academic Press, 1975

[9] Shen Zuhe, Wolfe M A. On the existence of periodically perturbed conservative systems[J]. J Math Anal and Appl, 1989, **151**: 78~83

[10] Lamberto Cesari. Optimization_Theory and Applications, Problems with Ordinary Differential Equations[M]. Springer_verlag, 1983

New Results of Some Existence Theorems on Nonlinear Boundary Value Problems

Wu Guangrong[1] Huang Wenhua[2] Shen Zuhe[1]

[1]Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210093, P R China;

[2]Wuxi University of Light Industry, Wuxi 214036, P R China

Abstract: With the use of the homeomorohism theory and fixed point theory, the existence and uniqueness of solutions to boundary value problems are investigated. Two basic theorems are obtained without the boundness condition, which generalizes results of Brown. When our results are applied to the existence and uniqueness of periodic solutions for nonlinear perturbed conservative systems (Newtonian equations of motion), the existence and uniqueness of the solution obtained. The results in this note seem less restrictive than those of the former papers we have seen. Mean while, as far as we know, it seems that applying the homeomorphism theory to the research of this kind of problem is new.

Key words homeomorphism, existence and uniqueness, global inverse theorem