应用数学和力学, 第 19 卷 第 12 期(1998 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

三维涡流问题 $\boldsymbol{A}$, φ_Ω 法分区变分原理*

赵兴华[①]　　施展伟[①]

(1997 年 6 月 23 日收到)

摘　　要

本文给出了在涡流区、场源区采用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$、标量电位 φ, 而在非导电区(气隙) 采用标量磁位 Ω, 来求解三维涡流问题的分区变分原理· 通过泛函变分能得到不同区域内的控制方程, 自然边界条件, 以及满足电磁连续性要求的区域界面连续条件·

关键词　三维涡流场　分区变分原理　$\boldsymbol{A}$, φ_Ω 法　界面连续条件
中图分类号　TM154

§1. 引　　言

涡流场分析是电磁感应加热工艺和电机、变压器电磁设计中的一个重要问题· Chair 等人[1] 和 Simkin 等人[2] 首先用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 和标量电位 φ, 求解了涡流问题(称 $\boldsymbol{A}$_φ 法)· 随后 Brown[3] 提出了采用标量磁位 Ω 和矢量电位 $\boldsymbol{T}$ 的 $\boldsymbol{T}$_Ω 法· 为应用有限元分析, 陈伟华[4] 较系统地研究了 $\boldsymbol{A}$_φ 法的泛函· 这些工作有力地推动了三维涡流场研究, 其缺点是未知量太多, 计算工作量大·

实际涡流问题往往存在很大的非导电区域或气隙区, 在这些区域, 由于不存在电流, 场变量实际可以大大减少· 因此, 用单一的场变量 $\boldsymbol{A}$, φ 或 $\boldsymbol{T}$, Ω 描写所有研究场域(包括非导电区), 显然是不经济的· 但是在不同区域采用不同的场变量, 在区域交界面上的电磁连续条件又往往很难满足, 得不到理想的结果·

针对这一问题, 为减少有限元分析中的节点自由度, 本文对涡流区、场源区采用场变量 $\boldsymbol{A}$, φ, 而在非导电区则采用场变量 Ω, 研究并建立了能满足不同区域界面电磁连续条件的涡流问题 $\boldsymbol{A}$, φ_Ω 法的分区变分原理· 通过泛函变分可以导得不同区域全部场域的控制方程、自然边界条件和不同区域的界面连续条件· 为有限元分析提供理论基础·

§2. 涡流问题的基本方程

假设涡流场为中低频率的正弦时变场· 由于 $\varepsilon\omega \ll \sigma$(ε 为介电常数, ω 为圆频率, σ 为电导率), 位移电流密度 $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ 与涡流电流密度 $\boldsymbol{J}_e$ 相比, 在正弦中低频率场中是小量, 可以略去不

* 国家自然科学基金资助项目(59375197)

① 上海市应用数学和力学研究所, 上海大学, 上海 200072

计• 同时认为磁导率为各向同性, 在不同的区域内其值不同, 但在同一单元内为常数•

涡流区、场源区在采用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$, 标量电位 φ, 并应用库仑规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 后, 其基本方程为[6]:

场域控制方程:

$$
\left.
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\mu}\nabla^2\boldsymbol{A}+j\omega\sigma\boldsymbol{A}+\sigma\nabla\varphi=\boldsymbol{J}_s \\
&-\nabla\cdot(\sigma\boldsymbol{A})-\frac{1}{j\omega}\nabla\cdot(\sigma\nabla\varphi)=0, \qquad V\in V_e \\
&\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \qquad\qquad \text{言}
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.1a, b, c}
$$

变量关系:

$$
\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{E}=-j\omega\boldsymbol{A}-\nabla\varphi \tag{2.2}
$$

本构关系:

$$
\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{J}_e=\sigma\boldsymbol{E} \tag{2.3}
$$

非导电区(气隙区)当采用标量磁位 Ω 后, 考虑到域内不存在任何电流, 其基本方程为[6]:

场域控制方程:

$$
-\mu\nabla^2\Omega=0,\qquad V\in V_n \tag{2.4}
$$

变量关系:

$$
\boldsymbol{H}=-\nabla\Omega \tag{2.5}
$$

本构关系:

$$
\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{J}_e=0 \tag{2.6}
$$

涡流区、场源区与非导电区交界面, 界面电磁连续条件为[6]

$$
\left.
\begin{aligned}
&\boldsymbol{n}\cdot\nabla\boldsymbol{A}_e=-\boldsymbol{n}\times\mu_n\nabla\Omega_n \\
&\boldsymbol{n}\times\left(\frac{1}{\mu_e}\nabla\times\boldsymbol{A}_e\right)=-\boldsymbol{n}\times\nabla\Omega_n \\
&\sigma_e\boldsymbol{n}\cdot(j\omega\boldsymbol{A}_e+\nabla\varphi_e)=0, \qquad S\in S_{en}
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.7a, b, c}
$$

涡流区、场源区已知边界条件

$$
\left.
\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_0, && S\in S_1 \\
&\varphi=\varphi_0, && S\in S_2 \\
&\boldsymbol{H}_t=\boldsymbol{H}_{t0}, && S\in S_3 \\
&E_n=E_{n0}, && S\in S_4
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.8a, b, c, d}
$$

非导电区已知边界条件

$$
\left.
\begin{aligned}
&\Omega=\Omega_0, && S\in S_5 \\
&B_n=B_{n0}, && S\in S_6
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.9a, b}
$$

其中 $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ 分别为磁场强度, 磁感强度, 电场强度和电感强度• $\boldsymbol{J}_s$ 为场源电流密度; E_n, B_n 分别为 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ 的法向分量; $\boldsymbol{H}_t$ 为 $\boldsymbol{H}$ 的切向分量• V_e, V_n 分别为涡流区(包括场源区)和非导电区的体积, S_{en} 为这两个区域的交界面• $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ 分别为已知边界值 $\boldsymbol{A}_0$, φ_0, $(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n})_0$, E_{n0}, Ω_0, B_{n0} 的边界• $\boldsymbol{n}$ 为界面或边界上的单位外法线矢量•

§ 3. $\boldsymbol{A}$, φ_Ω 法的分区变分原理

用加权残量法, 根据不同区域的场域控制方程(2.1)、(2.4)式, 界面连续条件(2.7)式, 边

界条件(2.8)、(2.9)式,可以得到三维涡流问题,在库仑规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ 下, $\boldsymbol{A}$, φ_Ω 法的分区变分原理• 陈述如下:

在满足区域表面 S_1, S_2, S_5 上已知条件

$$\boldsymbol{A}\,|_{S_1}=\boldsymbol{A}_0,\quad \varphi\,|_{S_2}=\varphi_0,\quad \Omega\,|_{S_5}=\Omega_0 \tag{3.1a, b, c}$$

一切可能的 $\boldsymbol{A}$, φ, Ω 中,实际涡流问题的 $\boldsymbol{A}$, φ, Ω 必须使下列泛函取驻值:

$$\begin{aligned}F(\boldsymbol{A},\varphi,\Omega)=&\frac{1}{2}\int_{V_e}\left\{\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2+\frac{1}{\mu}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})^2+j\omega\sigma\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}+2\sigma\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{A}\right.\\&\left.+\frac{\sigma}{j\omega}(\nabla\varphi)^2-2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}_s\right\}dV+\frac{1}{2}\int_{V_n}\mu(\nabla\Omega)^2dV-\int_{S_3}(\boldsymbol{H}_{t0}\cdot\boldsymbol{A})dS\\&+\frac{\sigma}{j\omega}\int_{S_4}E_{n0}\varphi dS+\int_{S_6}B_{n0}\Omega dS-\int_{S_{en}}(\nabla\Omega\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}\end{aligned} \tag{3.2}$$

证明如下:上式变分得

$$\begin{aligned}\delta F=&\int_{V_e}\left\{\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\delta(\nabla\times\boldsymbol{A})+\frac{1}{\mu}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,\delta(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+j\omega\sigma\boldsymbol{A}\cdot\delta\boldsymbol{A}\right.\\&\left.+\sigma\nabla\varphi\cdot\delta\boldsymbol{A}+\sigma\boldsymbol{A}\cdot\delta(\nabla\varphi)+\frac{\sigma}{j\omega}(\nabla\varphi)\cdot\delta(\nabla\varphi)-\boldsymbol{J}_s\cdot\delta\boldsymbol{A}\right\}dV \qquad \textbf{8a}\\&+\int_{V_n}\mu\nabla\Omega\cdot\delta(\nabla\Omega)\,dV-\int_{S_3}(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n})_0\cdot\delta\boldsymbol{A}dS+\frac{\sigma}{j\omega}\int_{S_4}E_{n0}\,\delta\varphi dS\end{aligned}$$

的体 $$+\int_{S_6}B_{n0}\,\delta\Omega dS-\int_{S_{en}}\left\{\nabla\Omega\times\delta\boldsymbol{A}+(\delta\nabla\Omega)\times\boldsymbol{A}\right\}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{3.3}$$

设 A_1, A_2, A_3 为 $\boldsymbol{A}$ 在三个坐标轴方向上的分量, $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$ 为坐标单位矢量• 利用变分和微分的可互换性和分部积分,上式中各体积分项有:

$$\int_{V_e}\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\delta(\nabla\times\boldsymbol{A})\,dV=\int_{V_e}\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2}-\frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)$$ 展

$$= \int_{V_e}\frac{1}{\mu}\left\{\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1}+\frac{\partial A_2}{\partial x_2}+\frac{\partial A_3}{\partial x_3}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\delta A_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\delta A_2+\frac{\partial}{\partial x_3}\delta A_3\right)\right\}dV$$

$$= -\frac{1}{\mu}\int_{V_e}\left\{\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial x_1\partial x_3}\right)\delta A_1+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial x_2\partial x_3}\right)\delta A_2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x_1\partial x_3}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial x_2\partial x_3}+\frac{\partial^2 A_3}{\partial x_3^2}\right)\delta A_3\right\}dV+\frac{1}{\mu}\oint_{S'}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,\delta\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (3.6)$$

$$*\int_{V_e}\sigma\boldsymbol{A}\cdot\delta(\nabla\varphi)\,dV = -\int_{V_e}\sigma(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,\delta\varphi\, dV+\oint_{S'}\sigma\boldsymbol{A}\,\delta\varphi\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (3.7)$$

$$*\int_{V_e}\frac{\sigma}{j\omega}\nabla\varphi\cdot\delta(\nabla\varphi)\,dV = -\int_{V_e}\frac{\sigma}{j\omega}\nabla^2\varphi\,\delta\varphi\, dV+\oint_{S'}\frac{\sigma}{j\omega}(\nabla\varphi\,\delta\varphi)\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (3.8)$$

$$*\int_{V_n}\mu\nabla\Omega\cdot\delta(\nabla\Omega)\,dV = -\int_{V_n}\mu\nabla^2\Omega\,\delta\Omega\, dV+\oint_{S''}\mu(\nabla\Omega\,\delta\Omega)\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (3.9)$$

式中 S', S'' 分别为涡流区、非导电区的全部边界面.

对(3.3)式中最后一个面积分, 利用矢量公式

$$\nabla\times(\delta\Omega\times\boldsymbol{A}) = (\nabla\delta\Omega)\times\boldsymbol{A}+\delta\Omega\nabla\times\boldsymbol{A}$$
$$(\delta\Omega\times\delta\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{n}\times\nabla\Omega)\cdot\delta\boldsymbol{A}$$

和斯托克斯公式, 可以化成

$$*\ -\int_{S_{en}}\left\{\nabla\Omega\times\delta\boldsymbol{A}+(\delta\nabla\Omega)\times\boldsymbol{A}\right\}\cdot d\boldsymbol{S}$$
$$= -\int_{S_{en}}(\boldsymbol{n}\times\nabla\Omega)\cdot\delta\boldsymbol{A}\,dS-\int_{S_{en}}\nabla\times(\delta\Omega\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}+\int_{S_{en}}(\delta\Omega\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}$$
$$= -\int_{S_{en}}(\boldsymbol{n}\times\nabla\Omega)\cdot\delta\boldsymbol{A}\,dS+\int_{S_{en}}(\delta\Omega\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}-\oint_L\delta\Omega\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{L} \qquad (3.10)$$

其中涡流区与非导电区交界面周边的闭合线积分 $\oint_L\delta\Omega\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{L}=0$. 因为 $\oint_L\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{L}$ 代表闭合线所围曲面的磁通量值, 由磁通量连续性原理, 对闭合的非导电区或闭合的涡流区, 此积分应为零.

将(3.4)~(3.10)式代入(3.3)式, 整理后得

$$\delta F = \int_{V_e}\left\{\left[-\frac{1}{\mu}\nabla^2\boldsymbol{A}+j\omega\sigma\boldsymbol{A}+\sigma\nabla\varphi-\boldsymbol{J}_s\right]\cdot\delta\boldsymbol{A}+\delta\left[-\sigma\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\frac{\sigma}{j\omega}\nabla^2\varphi\right]\delta\varphi\right\}dV$$
$$+\int_{V_n}\left\{-\mu\nabla^2\Omega\right\}\delta\Omega\, dV+\oint_{S'}\frac{1}{\mu}\left\{(\nabla\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{n}\right\}\cdot\delta\boldsymbol{A}\,dS+\oint_{S'}\frac{1}{\mu}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\,\delta A_n\,dS$$
$$+\oint_{S'}\left\{\sigma\boldsymbol{A}+\frac{\sigma}{j\omega}\nabla\varphi\right\}\delta\varphi\cdot d\boldsymbol{S}+\oint_{S''}\mu(\nabla\Omega)\,\delta\Omega\cdot d\boldsymbol{S}-\int_{S_3}(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n})_0\cdot\delta\boldsymbol{A}\,dS$$
$$+\frac{\sigma}{j\omega}\int_{S_4}E_{n0}\,\delta\varphi\, dS+\int_{S_6}B_{n0}\,\delta\Omega\, dS-\int_{S_{en}}(\boldsymbol{n}\times\nabla\Omega)\cdot\delta\boldsymbol{A}\,dS+\int_{S_{en}}(\delta\Omega\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S} \qquad (3.11)$$

上式的面积分

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}\oint_{S'}\left\{(\nabla\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{A}dS \text{ 的边界} S' = S_1+S_3+S_{en}, \text{且} S_1 \text{上} \delta\boldsymbol{A}=0\right.\\
&\oint_{S'}\left\{\sigma\boldsymbol{A}+\frac{\sigma}{j\omega}\nabla\varphi\quad\delta\varphi\cdot d\boldsymbol{S} \text{ 的边界} S' = S_2+S_4+S_{en}, \text{且} S_2 \text{上} \delta\varphi=0\right.\\
&\oint_{S''}\mu(\nabla\Omega)\,\delta\Omega\cdot d\boldsymbol{S} \text{ 的边界} S'' = S_5+S_6+S_{en}, \text{且} S_5 \text{上} \delta\Omega=0
\end{aligned}\right\} \tag{3.12a, b, c}$$

由于 $\delta\boldsymbol{A}$, $\delta\varphi$, $\delta\Omega$, δA_n 都是独立的变分, 当泛函取驻值时 $\delta F=0$, 由(3.11) 式可得:

场域控制方程

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{\mu}\nabla^2\boldsymbol{A}+j\omega\sigma\boldsymbol{A}+\sigma\nabla\varphi=\boldsymbol{J}_s\\
&-\sigma\nabla\cdot\boldsymbol{A}-\frac{\sigma}{j\omega}\nabla^2\varphi=0
\end{aligned}\right\} V\in V_e \tag{3.13a, b}$$

$$-\mu\nabla^2\Omega=0,\qquad V\in V_n \tag{3.14}$$

自然边界条件

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n})_0, && S\in S_3\\
&[j\omega\sigma\boldsymbol{A}+\sigma\nabla\varphi]\cdot\boldsymbol{n}=E_{n0}, && S\in S_4\\
&-\mu\nabla\Omega\cdot\boldsymbol{n}=B_{n0}, && S\in S_6\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0, && S\in S'
\end{aligned}\right\} \tag{3.15a, b, c, d}$$

涡流区和非导电区的界面连续条件

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}\times\nabla\Omega\\
&-\nabla\times\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}=\mu\nabla\Omega\cdot\boldsymbol{n}\\
&[j\omega\sigma\boldsymbol{A}+\sigma\nabla\varphi]\cdot\boldsymbol{n}=0
\end{aligned}\right\} S\in S_{en} \tag{3.16a, b, c}$$

由此可以看到通过泛函取驻值, 可以得到三维涡流问题 $\boldsymbol{A}$, φ_Ω 法, 在库仑规范下($\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$) 的场域控制方程(2.1)、(2.4) 式, 区域界面连续条件(2.7) 式, 自然边界条件(2.8c, d) 式, (2.9b) 式及边界上的库仑规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$• 完全满足界面上的电磁连续条件• 这一变分原理可以为有限元分析提供一种节点自由度较少的有效方法•

参 考 文 献

1 M. V. K. Chari, A. Konrad, M. A. Palmo and J. D. Angelo, Three dimensional vector potential analysis for machine field problem, IEEE Trans. Mag., **18**(2) (1982), 435—446•

2 C. R. I. Emson and J. Simkin, An optimal method for 3_D eddy currents, IEEE Trans. Mag., **19**(6) (1983), 2450—2452•

3 M. L. Brown, Calculation of 3 dimensional eddy currents at power frequencies, IEE Proc. A, **129**(1) (1982), 46—53•

4 陈伟华, 三维正弦涡流场的实泛函与复泛函, 哈尔滨电工学院学报, **7**(3) (1984), 1—31•

5 钱伟长,《广义变分原理》, 知识出版社 (1985)•

6 施展伟、赵兴华, 三维涡流场分析的 $\boldsymbol{A}$, φ_Ω 法, 应用数学和力学, **19**(11) (1989), 941—946•

A Divided Region Variational Principle of $\boldsymbol{A}$, φ_Ω Method for 3_D Eddy Current Problems

Zhao Xinghua Shi Zhanwei
(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University,
Shanghai 200072, P.R.China)

Abstract

In this paper, a divided region variational principle to solve 3_D eddy current problems was given. It adopts the magnetic vector potential $\boldsymbol{A}$ and the electric scalar potential φ in the eddy current rgeions and the source regions, and the magnetic scalar potential Ω in the non_conducting regions (air gap). Using variation of the functional, all governing equations in various regions, the natural boundary conditions and the interface continuity conditions which satisfy electromagnetic continuity are obtained.

Key words 3_D eddy current field, divided region variational principle, $\boldsymbol{A}$, φ_Ω mtheod, interface continuity conditions