应用数学和力学, 第 19 卷 第 12 期(1998 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

弱阻尼 KdV 方程样条小波基下约化形式的弱解*

林玉蕊[①]　田立新[②]　刘曾荣[③]

(1997 年 11 月 12 日收到)

摘　　要

本文研究弱阻尼 KdV 方程样条小波基下约化形式的弱解·

关键词　弱解　样条小波基　弱阻尼 KdV 方程　近似惯性流形(AIM)　约化形式
中图分类号　O175, O174

§1. 引　　言

利用样条小波基研究近似惯性流形(AIM) 的方法起源于[1] 中对自共轭型非线性发展方程的讨论·　但在非自共轭型非线性发展方程中不知道是否存在 AIM·　[2] 获得在非自共轭型的弱阻尼 KdV 方程(简记为 WDF KdV 方程) 中利用 Fourier 基存在 AIM·　[3] 在扰动周期 KdV 方程中利用样条小波基获得 AIM·　[4] 建立 WDF KdV 方程中整体吸引子和它的分形维估计·　基于这些论文, 我们研究在弱阻尼 KdV 方程中样条小波基下是否存在 AIM·　本文研究 WDF KdV 方程中样条小波基下约化形式的弱解·　该方程是一类非自共轭型非线性发展方程·　通过利用 WDF KdV 方程中约化形式的弱解我们将研究长期动力学行为和构造近似惯性流形·

§2. 符 号 和 定 理

设 $\Omega = [0, 1]$, $C^N(\Omega)$ 是 Ω 中 N 阶连续可微函数的全体·　$H^s(\Omega)$ 是通常周期 Sobolev 空间·　在 $H^s(\Omega)$ 中定义内积为

$$(u, v)_s = \sum_{k \in Z} |k|^{2s} \hat{u}(k) \overline{\hat{v}(k)}$$

其中
$$\hat{u}(k) = \int_\Omega u(x) e^{-2k\pi i x} dx$$

---

* 国家自然科学基金(19601020) 和机械工业部教育司基金资助课题
① 福建林学院基础系, 福建南平 353001
② 江苏理工大学数理系, 江苏镇江 212013
③ 上海大学理学院数学系(嘉定校区), 上海 201800

这里 Z 记为整数且 $H^s(\Omega)$ 是 Hilbert 空间. 记 $|u|_s$ 作为相应范数, $|u|_s=(u,u)_s^{1/2}$. 当 $s=0$ 时, $H^0(\Omega)=L^2(\Omega)$. 我们考虑有限维空间

$$V_j=\Big\{v\in C^N(\Omega): v\text{ 是}[k/2^j,(k+1)/2^{j+1})\text{ 中阶数}\leqslant N+1\text{ 的几乎多项式函数,}\\ \text{结点在 }k/2^j, 0<k\leqslant 2^j\Big\}$$

我们有

$$V_0\subset V_1\subset V_2\subset\cdots\subset V_n\subset\cdots\cdots L^2(\Omega)$$

记 $W_j=V_{j+1}\cap(V_j)^{\perp}$. 则 $L^2(\Omega)=V_0\oplus W_0\oplus W_1\oplus\cdots\oplus W_n\oplus\cdots$. 该和是正交直和. 由[5]、[6], 对每个整数 N, 存在 ψ_N 满足:

(1) $\psi_N\in C^N(R)$, 这里 ψ_N 是阶数 $\leqslant N+1$ 的几乎多项式函数, 结点在整数上.

(2) 存在 $\varepsilon_N>0$, 对 $m\leqslant N+1$, 成立 $\left|\dfrac{\partial^m}{\partial x^m}\psi_N(x)\right|\leqslant Ce^{-\varepsilon_N|x|}$.

(3) 若 $m\leqslant N+1$, 则 $\int_R x^m\psi_N(x)dx=0$.

(4) 族 $\left\{2^{j/2}\psi_N(2^jx-k)\right\}_{1\leqslant k\leqslant 2^j}$ 形成 W_j 中正交基; 族 $\left\{2^{j/2}\psi_N(2^jx-k)\right\}_{0\leqslant j<\infty,1\leqslant k\leqslant 2^j}$ 形成 $L^2(\Omega)$ 中正交基.

由[5]、[6], 设 $\psi_{j,k}=2^{j/2}\sum_{m\in Z}\psi_N(2^jx+2^jm-k)$. 则 $\{\psi_{j,k}\}_{1\leqslant k\leqslant 2^j}$ 形成 W_j 中周期正交小波基, 族 $\{\psi_{j,k}\}_{0\leqslant j<\infty,1\leqslant k\leqslant 2^j}$ 形成 $L^2(\Omega)$ 中周期正交小波基.

我们考虑如下 WDF KdV 方程:

$$u_t+u_{xxx}-\eta u_{xx}+\gamma u+uu_x=f,\qquad \eta,\gamma>0 \tag{2.1}$$

$$u(x+1,t)=u(x,t) \tag{2.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\in H^2(\Omega)\cap H \tag{2.3}$$

$$f\in H^3(\Omega)\qquad (f\text{ 与 }t\text{ 无关}) \tag{2.4}$$

其中 $H=L^2(\Omega)$ 且它的范数是 $|\cdot|$. 记 $A_0u=u_{xxx}-\eta u_{xx}+\gamma u$, 则 A_0 不是自共轭算子. 因此(2.1)不同于[1]. 为研究(2.1)~(2.4), 我们考虑如下方程:

$$u_t+\varepsilon u_{xxxx}+u_{xxx}-\eta u_{xx}+\gamma u+uu_x=f,\qquad \eta,\gamma>0 \tag{2.5}$$

$$u(x+1,t)=u(x,t) \tag{2.6}$$

$$u(x,0)=u_0(x)\in H^2(\Omega)\cap H \tag{2.7}$$

$$f\in H^3(\Omega) \tag{2.8}$$

记 $Bu=u_{xxxx}$, $V=D(B^{1/2})=H^2(\Omega)$, V 中范数是 $\|\cdot\|$. 设 $A_\varepsilon u=Bu+A_0u$. 则 B 是自共轭算子且 A_ε 满足如下不等式:

$$(A_\varepsilon u,u)\geqslant k_1\|u\|^2\geqslant k_2|u|^2,\qquad k_1,k_2\text{ 是常数} \tag{2.9}$$

方程(2.1)~(2.4)或(2.5)~(2.8)解的存在和唯一性见[2]. 定义正交投影算子 $P_j: H\to V_j$, $Q_j=I-P_j$; $P_{1j}: V\to V_j$, $Q_{1j}=I-P_{1j}$, AIM 的定义见[1]、[2]、[5].

定理 1 若 $N\geqslant 3$, 如果(2.5)~(2.8)的解是 $u^\varepsilon\in H$ 且初值 $u_0(x)$ 满足 $|u_0|\leqslant C_1$ (C_1 是常数, 与 ε 无关), 则存在 t_0, $t\geqslant t_0$ 时使

$$|Q_ju^\varepsilon(x,t)|,\ |Q_{1j}u^\varepsilon(x,t)|,\ \left|\frac{\partial}{\partial t}Q_ju^\varepsilon(x,t)\right|,\ \left|\frac{\partial}{\partial t}Q_{1j}u^\varepsilon(x,t)\right|\leqslant C_2/16^j$$

$$\|Q_ju^\varepsilon(x,t)\|,\ \left\|\frac{\partial}{\partial t}Q_{1j}u^\varepsilon(x,t)\right\|\leqslant C_3/4^j$$

其中 C_2, C_3 是常数且与 ε 无关•

引理 1 设 $\varepsilon > 0$, 方程 $\varepsilon q^{\varepsilon}_{xxxx} + q^{\varepsilon}_{xxx} - \eta q^{\varepsilon}_{xx} + \gamma q^{\varepsilon} = Q_j R(p)$, $p \in V_j$, 在 $H^2(\Omega)$ 中该方程有唯一解 $q^{\varepsilon} = \Phi^{\varepsilon}(p)$, $p \in V_j$•

注 1 由引理 1, 对 $p \in V_j$ 存在唯一解 $\Phi^{\varepsilon}(p) \in V_j^{\perp}$ 使 $A_{\varepsilon}\Phi^{\varepsilon}(p) = Q_j R(p)$•

引理 2 设 $\varepsilon > 0$, $p \in V_j$• 由引理 1, $q^{\varepsilon} = \Phi^{\varepsilon}(p)$• 则 $\| D\Phi^{\varepsilon} \|_{1,\infty} \leqslant C_4$, 其中 $D = (\partial/\partial p)dp$, $\| B \|_{1,\infty} = \sup\limits_{u \in D(B)} | B(u) |_1$•

定理 2 设 $p \in V_j$, $q^{\varepsilon} = \Phi^{\varepsilon}(p)$, 选择 $\varepsilon \to 0^+$, 则存在 $q = \Phi(p)$ 满足:

(1) $\sup | \Phi^{\varepsilon}(p) - \Phi(p) |_2 \to 0$, $n \to \infty$ 时;

(2) $\| D\Phi \|_{1,\infty} \leqslant C_5$;

(3) $q = \Phi(p)$ 是如下方程的弱解:

$$q_{xxx} - \eta q_{xx} + \gamma q = Q_j R(p), \qquad p \in V_j$$

注 2 由定理 2 我们得到 WDF KdV 方程的约化形式有弱解且该约化形式如下:

$$p'_t + p_{xxx} - \eta p_{xx} + \gamma p = P_j R(p) \tag{2.10}$$

$$q_{xxx} - \eta q_{xx} + \gamma q = Q_j R(p), \qquad p \in V_j, q \in V_j^{\perp} \tag{2.11}$$

在另外的文章中我们将证明该约化形式是 WDF KdV 方程的近似惯形流形 AIM 且 Φ 的图象含有 WDF KdV 方程的整体吸引子•

§3. 定 理 的 证 明

定理 1 的证明见[3]•

定理 2 的证明:

由注 1, $q^{\varepsilon} = \Phi^{\varepsilon}(p)$, $p \in V_j$ 满足如下方程:

$$A_{\varepsilon} q_{\varepsilon} = Q_j R(p), \qquad p \in V_j \tag{3.1}$$

若 $\theta_{\rho}(r)$ 是截断函数, $\theta(r): R^+ \to [0, 1]$ 是固定的 C' 函数且 $\theta(r) = 1$, $0 \leqslant r \leqslant 1$; $\theta(r) = 0$, $r \geqslant 2$; $| \theta(r) | \leqslant 1$, $| \theta'(r) | \leqslant 1$• $\theta_{\rho} = \theta(r/\rho)$• 则 $\theta_{\rho}(| Au |) = 1$, $| Au | \leqslant \rho$; $\theta_{\rho}(| Au |) = 0$, $| Au | > 2\rho$• 我们得到修正方程:

$$A_{\varepsilon} q_{\varepsilon} = Q_j F(p), \qquad p \in V_j \tag{3.2}$$

由引理 1 在(3.2) 中存在唯一解• 记 $\Delta\Phi^{\varepsilon} = \partial^2 \Phi/\partial p^2$• 我们考虑如下方程:

$$-\beta\Delta\Phi^{\varepsilon} + A_{\varepsilon}\Phi^{\varepsilon} = Q_j F(p), \qquad p \in V_j$$

解(3.2) 的手段是去构造无穷序列 $\left\{ \tau^n_{\varepsilon} \right\}_1^{\infty}$, 它是相应的有限维非线性方程的解:

$$-\beta_n \Delta \tau^n_{\varepsilon} + A_{\varepsilon}\tau^n_{\varepsilon} = F^{r,n}(p), \qquad p \in V_j \tag{3.3}$$

其中 $F^{r,n}(p) = R_M F(p)$, $R_M = Q_j H^{r(M)} = \bigoplus\limits_{j+1 \leqslant l \leqslant j+M} W_l$, τ^n_{ε} 的值在 Hilbert 空间

$$H^{r(M)} = \operatorname{span}\left\{ \psi_{j,k}: j+1 \leqslant l \leqslant j+M, 1 \leqslant k \leqslant 2^l \right\}$$

首先我们证明 $D\tau^n_{\varepsilon}(p) \to 0$, 当 $| p | \to \infty$ 时•

设 $\tau^n_{\varepsilon}(p)$ 的样条小波基展开是

$$\tau^n_{\varepsilon}(p) = \sum_{j+1 \leqslant l \leqslant j+M} \sum_{1 \leqslant k \leqslant 2^l} \gamma^n_{l,k}\psi_{l,k}$$

有　　$$A_\varepsilon \tau_\varepsilon^n(p) = \sum_{j+1\leqslant l\leqslant j+M}\ \sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\gamma_{l,k}^n A_\varepsilon \psi_{l,k}$$

其中 $\gamma_{l,k}^n$ 是p 的函数。因为 $V_j = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \cdots \oplus W_j$，则 $Q_jH = \bigoplus_{l>j} W_l$。因为$A_\varepsilon V_j \subset V_j$，我们可设

$$A_\varepsilon \tau_\varepsilon^n(p) = \sum_{j+1\leqslant l\leqslant j+M}\ \sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\gamma_{l,k}^{n,1}\psi_{l,k}$$

由(3.3)，若 $|p|_1 > \rho$，则 $F = 0$ 且

$$-\beta_n\Delta\gamma_{l,k}^n + \gamma_{l,k}^{n,1} = 0$$

由于 $\tau_\varepsilon^n \in W^{1,2}(V_j, V_j^\perp)$，则 $\gamma_{l,k}^{n,1} \in L^2(V_j)$ 且

$$D\gamma_{l,k}^n = \frac{\partial}{\partial p}\gamma_{l,k}^n \in L^2(V_j \setminus \mathscr{B}_\rho) \tag{3.4}$$

其中 $\mathscr{B}_\rho = \{p \in V_j: |p|_1 \leqslant \sigma,\ \sigma > \rho\}$，设 $\omega \in C^\infty$ 是数值函数且满足$|\omega(p)| \leqslant 1$，$p \in V_j$ 且 $\omega(p) = 0$，$|p|_1 \leqslant (\rho+\sigma)/2$；$\omega(p) = 1$，$|p|_1 > \sigma$。这里 $\sigma > \rho$。利用(3.4)有

$$D^\beta \omega D\Phi_j^n(p) \in L^2(V_j) \tag{3.5}$$

对 $\beta \geqslant 0$，由 Sobolev 嵌入定理，则 $W^{k,2} \subset L^r$，对 $r \geqslant 2$ 且 $k > 2^{j-1} - 2^j$，同时由(3.5)有

$$g(p) \overset{\text{定义}}{=} (I-\Delta)(\omega D\Phi_j^n)(p) \in L^r(V_j) \qquad (r \geqslant 2)$$

因为 $\omega D\Phi_j^n(p) = D\Phi_j^n(p)$，对 $|p|_1 > \sigma$，则有

$$D\Phi_j^n(p) = \int_{V_j} G(p-q)g(q)\,dq = \int_{V_j} G(p)g(p-q)\,dq$$

其中 $G(q)$ 是 Bessel 位势且满足

$$G(q) = C_6|q|^{2-2^j} + o(|q|^{2-2^j}), \qquad \text{当} |q| \to 0,\ j \geqslant 2$$
$$G(q) = C_7\ln|q| + o(\ln|q|), \qquad \text{当} |q| \to 0,\ j = 1$$
$$G(q) = C_8(1-|q|) + o(1-|q|), \qquad \text{当} |q| \to 0,\ j = 0$$

且　　$$|G(q)| \leqslant C_9 e^{-C_{10}|q|}, \qquad |p| \to \infty \text{时}$$

我们得到对 $|p|_1 > \sigma$ 有

$$\begin{aligned}|D\Phi_j^n(p)| &\leqslant \left|\int_{|q|>|p|/2} G(p-q)g(q)\,dq\right| + \left|\int_{|q|<|p|/2} G(p-q)g(q)\,dq\right| \\ &\leqslant |G|_{L^v}|g|_{L^{v'}(|q|>|p|/2)} + \left[\int_{|q|<|p|/2}|G(p-q)|^v dq\right]^{1/v} |g|_{L^{v'}(V_j)} \\ &\leqslant |G|_{L^v}|g|_{L^{v'}(|q|>|p|/2)} + [\sigma_{2^j}|p|^{2^j}/2]^{1/v} C_9 e^{-C_{10}|p|/2}|g|_{L^{v'}(V_j)} \to 0, \\ &\qquad |p| \to \infty\end{aligned}$$

其中 σ_{2^j} 是R^{2^j+1} 中单位球的体积且 $v < 2^j(2^j-2)$，对$j \geqslant 2$；$v \leqslant 2$ 时 $j < 2$ 且 $v' = v(v-1)^{-1}$。我们可得到：

$$D\Phi_j^n(p) \to 0, \quad \text{当} |p| \to \infty \text{时}, \qquad D\Phi_\varepsilon^n(p) \to 0, \quad |p| \to \infty \text{时}$$

现在我们来证引理 2，记 $A_\varepsilon q_\varepsilon = Q_jR(p)$，我们考虑如下方程：

$$-\beta_n\Delta\tau_\varepsilon^n + A_\varepsilon\tau_\varepsilon^n = F^{r,n}(p),\ F^{r,n}(p) = R_MF(p), \qquad \beta_n \to 0^+ \tag{3.6}$$

在方向 $v = \sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l} v_{l,k}\psi_{l,k}$，$|v|_1 = 1$ 上取(3.6)的 Gateaux 导数，则得到：

$$-\beta_n\Delta\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\ \sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau_{\varepsilon,l,k}^n v_{l,k} + A_\varepsilon\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\ \sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau_{\varepsilon,l,k}^n v_{l,k}$$

$$= \sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\frac{\partial}{\partial p_{l,k}}F^{r,n}(p)v_{l,k}, \qquad p\in V_j \tag{3.7}$$

其中 $\tau^n_{\varepsilon,l,k} = D\tau^n_\varepsilon(p)\psi_{l,k}$, $\frac{\partial}{\partial p_{l,k}}F^{r,n}(p) = DF^{r,n}(p)\psi_{l,k}$

接下来将(3.7)式与

$$A_\varepsilon^2\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}$$

取内积,则得到:

$$-\frac{\beta_n}{2}\Delta\Big|\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big|_1^2 + \beta_n\Big|D\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big|_1^2$$
$$+\Big(A_\varepsilon A_\varepsilon\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k},\ A_\varepsilon\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big)_1$$
$$=\Big(\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}A_\varepsilon\frac{\partial}{\partial p_{l,k}}F^{r,n}v_{l,k},\ A_\varepsilon\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big) \qquad p\in V_j \tag{3.8}$$

则有

$$\Big(A_\varepsilon A_\varepsilon\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k},\ A_\varepsilon\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big)$$
$$\geqslant k_2\Big|A_\varepsilon\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big|^2 \geqslant C_{11}\Big|A_\varepsilon\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big|_1^2$$
$$\geqslant C_{12}\Big|\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big|_0^2 = C_{12}\Big|\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}D\tau^n_\varepsilon(p)\Big|^2\to 0$$

当 $|p|\to\infty$ 时. 则

$$\Big|\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big|\to 0, \qquad |p|\to\infty\text{时}$$

因此 $\Big|\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big|_1^2$ 在某点 $p_0\in V_j$ 有极大值. 由极大值原理在 p_0 点成立:

$$D\Big|\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big|_1^2 = 0,\quad \Delta\Big|\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big|_{L^\infty} = 0$$

由公式(3.8)成立

$$C_{11}\Big|A_\varepsilon\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big|^2$$
$$\leqslant\Big(A_\varepsilon A_\varepsilon\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k},\ A_\varepsilon\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big)$$
$$\leqslant\Big|\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}A_\varepsilon\frac{\partial}{\partial p_{l,k}}F^{r,n}v_{l,k}\cdot A_\varepsilon\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}\tau^n_{\varepsilon,l,k}v_{l,k}\Big|_{L^\infty}$$
$$\leqslant\|D\tau^n_\varepsilon\|_{1,\infty}\Big|\sum_{0\leqslant l\leqslant j}\sum_{1\leqslant k\leqslant 2^l}A_\varepsilon\frac{\partial}{\partial p_{l,k}}F^{r,n}v_{l,k}\Big|_{0,\infty}$$
$$\leqslant\|D\tau^n_\varepsilon\|_{1,\infty}\sup_{|v|_1=1}\sup_{u\in V_j}|DF(u)v|_1$$
$$\leqslant C_{13}\|D\tau^n_\varepsilon\|_{1,\infty}\sup_{|v|_1=1}\sup|u_xv+uv_x|_1$$
$$\leqslant C_{14}\|D\tau^n_\varepsilon\|_{1,\infty}\sup_{|v|_1=1}|u_x|_\infty|v|_1$$
$$\leqslant C_{15}\|D\tau^n_\varepsilon\|_{1,\infty}$$

因此 $\|D\tau^n_\varepsilon\|_{1,\infty}\leqslant C_{16}$, $\|D\Phi^n_\varepsilon\|_{1,\infty}\leqslant C_{16}$. 进一步,因为 $\|D\Phi^n_\varepsilon\|_{1,\infty}\leqslant C_{16}$,我们能利

用 Ascoli_Arzelà 定理, $n \to \infty$, $\beta_n \to 0^+$, 得到 $\| D\Phi^\varepsilon \|_{1,\infty} \leqslant C_4$. 证毕.

通过利用 Ascoli_Arzelà 定理和引理 2, 我们很容易证得定理 2, 略去.

参 考 文 献

1 O. Goubet, Construction on approximate inertial manifolds using wavelets, SIAM, J. Math. Anal., **9** (1992), 1455—1481.

2 田立新、徐振源, 弱阻尼 KdV 方程中长期动力学行为的研究, 应用数学和力学, **18**(10) (1997), 953—958.

3 卢殿臣、田立新、刘曾荣, 扰动周期 KdV 方程的小波基分析, 应用数学和力学, **19**(11) (1998), 975—980.

4 J. M. Ghidaglia, Weakly damped forced KdV equation behave as finite dimensional dynamical system in the longtime, J. Differential Equations, **74** (1988), 369—390.

5 A. Debussche and M. Marion, On the constructure of families of approximate inertial manifolds, J. Differential Equations, **100** (1992), 173—201.

6 C. K. Chui, An Introduction to Wavelet, Academic Press Inc., USA (1992).

7 C. Foias, G. Sell and R. Temann, Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equation, J. Differential Equations, **73** (1988), 309—353.

The Wild Solutions of the Induced Form under the Spline Wavelet Basis in Weakly Damped Forced KdV Equation

Lin Yurui

(Department of Basic Courses, Fujian Forestry Institute, Nanpin, Fujian 353001, P.R.China)

Tian Lixin

(Department of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang, Jiangsu 212013, P.R.China)

Liu Zengrong

(Department of Mathematics, Shanghai University (Jiading), Shanghai 201800, P.R.China)

Abstract

In the paper what is studied is the wild solution of the induced form under the spline wavelet basis in weakly damped forced KdV equation.

Key words wild solution, spline wavelet basis, weakly damped forced KdV (WDF KdV) equation, approximate inertial manifold (AIM), induced form