应用数学和力学, 第 19 卷 第 12 期(1998 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

一般两速离散 Illner 模型的 1+ 1 维精确解*

吕咸青① 梅生伟② 李岷珊③

(周恒推荐; 1997 年 3 月 24 日收到, 1998 年 5 月 25 日收到修改稿)

摘 要

Illner 模型是最一般的 Boltzmann 方程的两速模型, 它包括 Carleman 模型和 McKean 模型作为两种特殊情形· 离散 Illner 模型 1+ 1 维精确解能够以一种简洁的方式进行研究· 前人的结论需要修正· 我们得到了一类新的 1+ 1 维精确解· 这给出了研究类似的离散 Boltzmann 方程精确行波解的一般方法·

关键词 离散 Boltzmann 方程 Illner 模型 行波解 双孤子解
中图分类号 O411

§1. 引 言

自从本世纪 50 年代以来, 离散 Boltzmann 模型的理论及应用引起了许多学者的注意[1][2][3]· 至今已有许多的离散 Boltzmann 模型方程被提了出来[2][3]· 这些模型被用来分析激波的传播以及 Couette 流和 Rayleigh 流[3], 结果得到了对一些流动模式很好和精确的描述· Iller 模型是最一般的 Boltzmann 方程的两速模型, 它包括 Carleman 模型和 McKean 模型作为两种特殊情形· 得到模型方程的精确解在理论和应用方面都是非常重要的·

对两速离散模型, 我们令 f 及 g 是在 x 轴的两个方向上以速度 1 和 -1 运动的离子的数密度· Illner 模型方程[4] 是

$$\left.\begin{aligned} f_t + f_x &= af^2 - (a+c)fg + cg^2 \\ g_t - g_x &= -af^2 + (a+c)fg - cg^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

这里 $a \leqslant 0,\ c \geqslant 0$·

在本文中, 我们将研究限制在 $a \leqslant 0,\ c \geqslant 0$ 上· 数值 $a = -1,\ c = 1$ 对应 Carleman 模型, $a = 0,\ c = 1$ 对应 McKean 模型· 在文献[4] 中, 作者研究了 Illner 模型的精确行波解和精确双孤子解· 经过繁杂的计算, 他得到了方程组(1.1) 的精确行波解和精确双孤子解· 但是我们认为文献[4] 中的结果需要修正· 在此我们以一种简洁的方式研究方程组(1.1)· 我们不但能够得到文献[4] 中作者所给出的精确双孤子解, 而且得到了一类新的 1+ 1 维精确解·

---

* 国家自然科学基金资助(19631060) 和中国博士后基金资助项目

① 清华大学应用数学系, 北京 100084
② 清华大学电机工程与应用电子技术系, 北京 100084
③ 北方交通大学数学系, 北京 100044

§2. 数学方面的准备

为了阐明我们的观点,我们需要以下的结论:

引理1 常微分方程

$$y' = A(y - y_1)(y - y_2) \tag{2.1}$$

这里 A, y_1, y_2 是常数,而且 $y_1 \neq y_2$,有解

$$y(x) = \frac{y_2 + y_1 e^{(y_2 - y_1)(Ax+B)}}{1 + e^{(y_2 - y_1)(Ax+B)}} \tag{2.2}$$

或者

$$y(x) = \frac{y_1 + y_2 e^{(y_1 - y_2)(Ax+B)}}{1 + e^{(y_1 - y_2)(Ax+B)}} \tag{2.3}$$

这里 B 是积分常数. 进一步我们有

(1) 当 x 趋于正负无穷时 $y(x)$ 的极限是 y_1 和 y_2.

(2) $y(x)$ 的像集合是闭区间 $[y_1, y_2]$ 或者 $[y_2, y_1]$.

显然 $y(x)$ 是严格单调且有界的.

引理2 如果 α, β 是常数,则对上述的 $y(x)$,函数 $\alpha + \beta y(x)$ 也是严格单调且有界的. 而且

(1) 当 x 趋于正负无穷时 $\alpha + \beta y(x)$ 的极限 $\alpha + \beta y_1$ 和 $\alpha + \beta y_2$.

(2) $\alpha + \beta y(x)$ 的像集合是闭区间 $[\alpha + \beta y_1, \alpha + \beta y_2]$ 或 $[\alpha + \beta y_2, \alpha + \beta y_1]$.

上述引理的证明是非常简单的,因此我们在这里不进行证明.

§3. Illner 模型的精确行波解

在此我们研究方程组(1.1)的行波解. 设 $u = x - \lambda t$,则 $f(x, t) = f(x - \lambda t) = f(u)$, $g(x, t) = g(x - \lambda t) = g(u)$.

而且方程组(1.1)转化为

$$\left.\begin{aligned} (\lambda - 1) f_u &= -(f - g)(af - cg) \\ (\lambda + 1) g_u &= (f - g)(af - cg) \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

为了得到非平凡的解,我们需要限制 $\lambda \neq \pm 1$. 将方程组(3.1)的两个方程相加,我们得到

$$(\lambda - 1) f_u + (\lambda + 1) g_u = 0 \tag{3.2}$$

将方程组(3.2)积分一次,我们有

$$(\lambda - 1) f + (\lambda + 1) g = b \tag{3.3}$$

这里 b 是积分常数.

我们可将方程(3.3)改写为

$$g = \alpha + \beta f \tag{3.4}$$

这里 $\alpha = \dfrac{b}{\lambda + 1}$, $\beta = \dfrac{1 - \lambda}{1 + \lambda}$

根据方程(3.4)和方程组(3.1),我们消去函数 g 并且得到

$$f_u = A(f - f_{10})(f - f_{20}) \tag{3.5}$$

这里 $A = \frac{(1-\beta)(a-c\beta)}{(1-\lambda)}$, $f_{10} = \frac{\alpha}{1-\beta}$, $f_{20} = \frac{c\alpha}{a-c\beta}$

(1) 当 $\alpha = 0$ 时, 方程(3.5) 变为

$$f_u = Af^2 \tag{3.6}$$

显然方程(3.6) 有下述解:

$$f = \frac{1}{-Au + C} \tag{3.7}$$

此处 C 是积分常数•

这给出了离散 Illner 模型的一类新的精确行波解, 但这类解不能够作为数密度函数, 因对某些 u 而言, 这类函数是无界的且有时取负值•

(2) 当 $\alpha \neq 0$ 时, 根据引理 1, 我们有

$$f(u) = \frac{f_{10} + f_{20}e^{(f_{10}-f_{20})(Ax+B)}}{1 + e^{(f_{10}-f_{20})(Ax+B)}} \tag{3.8}$$

$$g(u) = \frac{f_{10} + f_{30}e^{(f_{10}-f_{20})(Ax+B)}}{1 + e^{(f_{10}-f_{20})(Ax+B)}} \tag{3.9}$$

这里 $f_{30} = \frac{a\alpha}{a-c\beta}$

很明显 $f(u)$ 和 $g(u)$ 在整个 u 轴上是严格单调且有界的函数•

我们可以断定方程组(3.1) 是可积的, 它的解能够精确得到•

根据引理 2, $f(u)$ 的像集合是闭区间 $[f_{10}, f_{20}]$ 或 $[f_{20}, f_{10}]$, 而 $g(u)$ 的像集合是闭区间 $[f_{10}, f_{30}]$ 或 $[f_{30}, f_{10}]$ •

由于 $f(u)$ 和 $g(u)$ 是数密度函数, 只有当 $f(u)$ 和 $g(u)$ 都是整个 u 轴上的非负函数时, 它们才有意义• 所以, 我们必须有以下关系式成立

$$f_{10} > 0,\ f_{20} \geqslant 0,\ f_{30} \geqslant 0 \tag{3.10}$$

很明显, 我们有

$$f_{20}f_{30} = \frac{c\alpha}{a-c\beta}\frac{a\alpha}{a-c\beta} = \frac{ac\alpha^2}{(a-c\beta)^2} \leqslant 0$$

这说明只有当 $ac = 0$ 时, 我们才会得到有意义的精确解•

当 $a = 0$, $c > 0$ 时方程组(3.10) 变成

$$\frac{\alpha}{1-\beta} > 0,\ -\frac{\alpha}{\beta} > 0 \tag{3.11}$$

不等式组(3.11) 有解

$$\alpha > 0,\ \beta < 0 \text{ 或 } \alpha < 0,\ \beta > 1$$

当 $a < 0$, $c = 0$ 时方程组(3.10) 变成

$$\frac{\alpha}{1-\beta} > 0,\ \alpha > 0 \tag{3.12}$$

不等式组(3.12) 有解 $\alpha > 0$, $\beta < 1$ •

特别地, 当 $a = 0$, $c = 1$ 时, 方程组(1.1) 就是 McKean 模型[1]

$$\left.\begin{aligned} f_t + f_x &= -fg + g^2 \\ g_t - g_x &= fg - g^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

根据以上分析, 我们得知 McKean 模型有非负精确行波解, 而且其精确行波解在整个 u

轴上是严格单调且有界的• 这与文献[4]中的结果是相同的•

§4. Illner 模型的精确双孤子解

在此我们研究方程组(1.1)的双孤子解• 设

$$
\left.\begin{aligned}
f &= \alpha_1 F(\xi) + \alpha_2 G(\zeta) + \alpha_0 \\
g &= \beta_1 F(\xi) + \beta_2 G(\zeta) + \beta_0
\end{aligned}\right\} \tag{4.1}
$$

这里 $\xi = \gamma_1 x + \rho_1 t + c_1,\ \zeta = \gamma_2 x + \rho_2 t + c_2$

为了得到非平凡的带有变量 ξ 和 ζ 的双孤子解, 我们需要限制

$$
\left.\begin{aligned}
&\rho_1 \gamma_2 - \rho_2 \gamma_1 \neq 0 \\
&(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) \neq 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.2}
$$

这时方程组(1.1)转化为

$$
\left.\begin{aligned}
&\alpha_1(\rho_1 + \gamma_1) F_\xi + \alpha_2(\rho_2 + \gamma_2) G_\zeta \\
&\quad = C_{FF} F^2 + C_{FG} FG + C_{GG} G^2 + C_F F + C_G G + C_0 \\
&\beta_1(\rho_1 - \gamma_1) F_\xi + \beta_2(\rho_2 - \gamma_2) G_\zeta \\
&\quad = - C_{FF} F^2 - C_{FG} FG - C_{GG} G^2 - C_F F - C_G G - C_0
\end{aligned}\right\} \tag{4.3}
$$

这里

$$
\left.\begin{aligned}
C_{FF} &= a\alpha_1^2 - (a + c)\alpha_1 \beta_1 + c\beta_1^2 \\
C_{FG} &= 2a\alpha_1\alpha_2 - (a + c)(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2c\beta_1\beta_2 \\
C_{GG} &= a\alpha_2^2 - (a + c)\alpha_2\beta_2 + c\beta_2^2 \\
C_F &= 2a\alpha_1\alpha_0 - (a + c)(\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1) + 2c\beta_1\beta_0 \\
C_G &= 2a\alpha_2\alpha_0 - (a + c)(\alpha_2\beta_0 + \alpha_0\beta_2) + 2c\beta_2\beta_0 \\
C_0 &= a\alpha_0^2 - (a + c)\alpha_0\beta_0 + c\beta_0^2
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}
$$

根据方程组(4.3)和以下条件,

$$
\left.\begin{aligned}
&2a\alpha_1\alpha_2 - (a + c)(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2c\beta_1\beta_2 = 0 \\
&C_0 = C_{01} + C_{02}
\end{aligned}\right\} \tag{4.5}
$$

我们得到下述的方程组:

$$
\left.\begin{aligned}
&\alpha_1(\rho_1 + \gamma_1) F_\xi = C_{FF} F^2 + C_F F + C_{01} \\
&\alpha_2(\rho_2 + \gamma_2) G_\zeta = C_{GG} G^2 + C_G G + C_{02} \\
&\beta_1(\rho_1 - \gamma_1) F_\xi = - C_{FF} F^2 - C_F F - C_{01} \\
&\beta_2(\rho_2 - \gamma_2) G_\zeta = - C_{GG} G^2 - C_G G - C_{02}
\end{aligned}\right\} \tag{4.6}
$$

显然下述的方程组(4.7)和(4.8)是等价的:

$$
\left.\begin{aligned}
&a\alpha_1^2 - (a + c)\alpha_1\beta_1 + c\beta_1^2 = 0 \\
&2a\alpha_1\alpha_2 - (a + c)(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2c\beta_1\beta_2 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.7}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&a\alpha_2^2 - (a + c)\alpha_2\beta_2 + c\beta_2^2 = 0 \\
&2a\alpha_1\alpha_2 - (a + c)(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) + 2c\beta_1\beta_2 = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.8}
$$

当 $[a\alpha_1^2 - (a + c)\alpha_1\beta_1 + c\beta_1^2][a\alpha_2^2 - (a + c)\alpha_2\beta_2 + c\beta_2^2] \neq 0$ 以及 $C_F^2 - 4C_{FF}C_{10} > 0,\ C_G^2$

$-4C_{GG}C_{20}>0$ 时, 根据引理 1, 我们能够得到在以下条件满足时文献[4] 所给出的解

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1(\rho_1+\gamma_1)+\beta_1(\rho_1-\gamma_1)=0\\ \alpha_2(\rho_2+\gamma_2)+\beta_2(\rho_2-\gamma_2)=0\\ 2a\alpha_1\alpha_2-(a+c)(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+2c\beta_1\beta_2=0\end{aligned}\right\}\tag{4.9}$$

如果 $\alpha_0=\beta_0$, 则 $C_F=C_G=C_0=0$, 特别地, 当 $C_{10}=C_{20}=0$ 时, 我们有

$$F=\frac{1}{A_1\xi+C_1},\ 以及\ G=\frac{1}{A_2\zeta+C_2}$$

这里, C_1, C_2 是积分常数,

$$A_1=-\frac{a\alpha_1^2-(a+c)\alpha_1\beta_1+c\beta_1^2}{\alpha_1(\rho_1+\gamma_1)},\quad A_2=-\frac{a\alpha_2^2-(a+c)\alpha_2\beta_2+c\beta_2^2}{\alpha_2(\rho_2+\gamma_2)}$$

这里我们能够得到方程组(1.1) 的下述双孤子解:

$$\left.\begin{aligned}f=\frac{\alpha_1}{A_1\xi+C_1}+\frac{\alpha_2}{A_2\zeta+C_2}\\ g=\frac{\beta_1}{A_1\xi+C_1}+\frac{\beta_2}{A_2\zeta+C_2}\end{aligned}\right\}\tag{4.10}$$

当 γ_j, ρ_j, c_j, α_j, β_j, A_j, $C_j(j=1,2)$ 都是实数, 这给出了离散 Illner 模型的一类新的精确双孤子解, 但这类解不能够作为数密度函数, 因为在 $A_1\xi+C_1=0$ 或 $A_2\zeta+C_2=0$ 时具有奇异性•

当 γ_j, ρ_j, c_j, α_j, β_j, A_j, $C_j(j=1,2)$ 都是复数而且 $\rho_1=\rho_2^*$, $\gamma_1=\gamma_2^*$, $c_1=c_2^*$, $\alpha_1=\alpha_2^*$, $\beta_1=\beta_2^*$, $A_1=A_2^*$, $C_1=C_2^*$ 时, 这给出了离散 Illner 模型的一类新的精确双孤子解, 不失一般性, 我们定义 $A_1\gamma_1=\gamma=\gamma_R+i\gamma_I$, $A_1\rho_1=\rho=\rho_R+i\rho_I$, $A_1c_1+C_1=c_R+ic_I$, $\alpha_1=\alpha_R+i\alpha_I$, $\beta_1=\beta_R+u\beta_I$, 则(4.10) 式可写为

$$\left.\begin{aligned}f=\frac{2\alpha_R(\gamma_Rx+\rho_Rt+c_R)+2\alpha_I(\gamma_Ix+\rho_It+c_I)}{(\gamma_Rx+\rho_Rt+c_R)^2+(\gamma_Ix+\rho_It+c_I)^2}\\ g=\frac{2\beta_R(\gamma_Rx+\rho_Rt+c_R)+2\beta_I(\gamma_Ix+\rho_It+c_I)}{(\gamma_Rx+\rho_Rt+c_R)^2+(\gamma_Ix+\rho_It+c_I)^2}\end{aligned}\right\}\tag{4.11}$$

这给出了离散 Illner 模型的一类新的精确双孤子解, 我们推广了文献[5] 的结果• 这给出了研究更复杂的离散 Boltzmann 方程精确解的一般方法• 以此方法我们可以研究类似的离散 Boltzmann 方程的有意义的精确解•

§ 5. 结　　论

我们以一种简洁的方式研究了离散 Illner 模型的精确行波解, 其行波解的非负性的处理更为简洁• 离散 Illner 模型的精确行波解能够用简单的方法得到• 我们指出离散 Illner 模型有(3.7) 式所表示的解, 即

$$f=\frac{1}{-Au+C},\quad g=\frac{\beta}{-Au+C}+\alpha\tag{5.1}$$

对于离散 Illner 模型的精确双孤子解, 它也能够用简单的方法进行研究• 方程组(1.1) 存在文献[4] 所说的精确双孤子解• 我们修正了文献[4] 中的结论• 我们指出离散 Illner 模型也有(4.11) 式所表示的解, 即

$$
\left.\begin{aligned}
f &= \frac{2\alpha_R(\gamma_R x + \rho_R t + c_R) + 2\alpha_I(\gamma_I x + \rho_I t + c_I)}{(\gamma_R x + \rho_R t + c_R)^2 + (\gamma_I x + \rho_I t + c_I)^2} \\
g &= \frac{2\beta_R(\gamma_R x + \rho_R t + c_R) + 2\beta_I(\gamma_I x + \rho_I t + c_I)}{(\gamma_R x + \rho_R t + c_R)^2 + (\gamma_I x + \rho_I t + c_I)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{5.2}
$$

其它的离散 Boltzmann 方程可以用此方法进行研究• 这给出了研究更复杂的离散 Boltzmann 方程精确解的一般方法• 以此方法我们可以研究类似的离散 Boltzmann 方程的有意义的精确解•

参 考 文 献

1 M. H. Ernst, Nonlinear model_Boltzmann equation and exact solutions, Phys. Rep., **78**(1) (1981), 1—171•

2 T. Platkowski and R. Illner, Discrete velocity models of the Boltzmann equation: a survey on the mathematical aspects of the theroy, SIAM Review, **30**(2) (1988), 213—255•

3 Roberto Monaco and Luigi Preziosi, Fluid Dynamic Applications of the Discrete Boltzmann Equation, World Scientific, Singapore (1991), 113—198•

4 Henri Cornille, Exact solutions in 1+ 1 dimensions of the general two_velocity discrete Illner model, J. Math. Phys., **28**(7) (1987), 1567—1579•

5 J. Wick, Two classes of explicit solutions of the Carleman model, Math. Methods Appl. Sci., **6** (1984), 515—519•

Exact Solutions in 1+ 1 Dimensions of the General Two_Velocity Discrete Illner Model

L Xianqing

(Department of Applied Mathematics, Qinghua University, Beijing 100084, P.R.China)

Mei Shengwei

(Departmetn of Electrical Engineering, Qinghua University, Beijing 100084, P. R. China)

Li Minshan

(Department of Mathematics, Northern Jiaotong Universtiy, Beijing 100044, P.R.China)

Abstract

The Illner model is the most general two_velocity model of the discrete Boltzmann equation. It includes, as particular cases, both the Carleman and the McKean model. Exact solutions in 1+ 1 dimensions of the general two_velocity discrete Illner model can be studied in a concise way. The conclusions of the precursors need ameliorating. A new type of exact solutions in 1+ 1 dimensions is obtained. This gives a general method for studying non_trivial exact solutions for the similar discrete Boltzmann equation.

Key words discrete Boltzmann equation, Illner model, travelling wave solution, bisoliton solution