非自治时滞微分方程的扰动全局吸引性*

罗交晚①　　刘再明①

(李继彬推荐; 1996 年 10 月 24 日收到, 1997 年 5 月 22 日收到修改稿)

摘　　要

考虑具有扰动项的非自治时滞微分方程

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t-\tau) + F(t, x_t), \qquad t \geqslant 0 \tag{*}$$

其中 $F: [0, \infty) \times C[-\delta, 0] \to R$ 且连续, $C[-\delta, 0]$ 表示将 $[-\delta, 0]$ 映射到 R 的所有连续函数集合. $F(t, 0) \equiv 0$, $a(t) \in C((0, \infty), (0, \infty))$, $\tau \geqslant 0$. 通常文献对 $a(t)$ 不依赖于 t 即 $a(t)$ 为自治情形, 研究了方程(*)零解的局部或全局渐近性质[1~5, 7]. 本文对 $a(t)$ 为非自治即依赖于 t 之情形, 获得了方程(*)零解全局吸引的充分条件, 所得结论在某种意义上说是不可改进的. 本文改进和推广了已有文献的相应结果, 同时本文采用的方法可应用到非自治非线性扰动方程.

关键词　扰动全局吸引性　时滞微分方程　渐近稳定性　基本解　常数变易公式
中图分类号　O175

§1. 引　　言

本文研究具有扰动项的非自治线性时滞微分方程

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t-\tau) + F(t, x_t), \qquad t \geqslant 0 \tag{1.1}$$

零解的全局吸引性, 其中 $F: [0, \infty) \times C[-\delta, 0] \to R$ 且连续, $C[-\delta, 0]$ 表示将 $[-\delta, 0]$ 映射到 R 的所有连续函数集合($\Phi: [-\delta, 0] \to R$), $F(t, 0) \equiv 0$, $t \geqslant 0$. $a(t) \in C((0, \infty), (0, \infty))$, $\tau \geqslant 0$.

对于扰动线性微分方程的渐近稳定性研究, 绝大多数文献局限于其局部性质[1~5]; 即使考虑其全局性质, 也仅仅局限于自治情形[7]. 众所周知, 只有在自治情形下, 才有明确的特征方程, 这样通过利用特征根的分布情况来估计基本解, 从而得出结果. 本文将去掉这一限制, 即在 $a(t)$ 为非自治情形, 借助将非自治方程转化为自治方程, 再利用基本解和常数变易公式, 最后获得结果:

定理 1　假设

$$\inf_{t \geqslant 0} a(t) = b > 0, \quad \sup_{t \geqslant 0} a(t) = a, \qquad 0 \leqslant a\tau < \frac{\pi}{2} \tag{1.2}$$

$$|F(t, \Phi)| \leqslant ca(t)\|\Phi\| \tag{1.3}$$

其中 $\|\Phi\| = \sup|\Phi(s)|$, $0 \leqslant c < 1$ 为常数且满足

---

* 湖南省自然科学基金和湖南省教委科研基金资助课题

① 长沙铁道学院科研所, 长沙 410075

$$a+(c-1)b<\frac{a\alpha_0^2}{\alpha_0^2+\beta_0^2} \tag{1.4}$$

这里 (α_0,β_0) 是方程组

$$\begin{cases}\alpha=-ae^{-a\tau}\cos\beta\tau\\ \beta=\infty\ ae^{-a\tau}\sin\beta\tau\end{cases} \tag{1.5}$$

在区域 $D=\{(\alpha,\beta)\mid -\infty<\alpha\leqslant 0,\ 0\leqslant\beta\leqslant\pi/2\}$ 上的解, 则方程(1.1) 的零解是全局吸引的, 即方程(1.1) 的所有解 $x(t)$ 当 $t\to\infty$ 时趋于零•

由本文第 2 节和第 3 节知, 定理 1 改进和推广了已有文献中相应结果[1~5,7,10], 本文所采用的方法可应用到非线性扰动方程•

§2. 定理 1 的证明

考虑下列方程

$$\dot V(t)=-aV(t-\tau),\qquad t\geqslant 0 \tag{2.1}$$

及初始条件

$$V(s)=0,\ s<0;\ V(0)=1 \tag{2.2}$$

引理 1[7, 定理2.1] 若 $V(t)$ 是在条件(2.2) 下方程(2.1) 的解• 假设(1.2) 成立, (α_0,β_0) 为方程(1.5) 在区域 $D=\{(\alpha,\beta)\mid -\infty<\alpha\leqslant 0,\ 0\leqslant\beta\leqslant\pi/2\}$ 上的解, 则 $V(t)>0,\ t\geqslant 0$ 而且满足

$$\int_0^\infty |V(t)|\,dt\leqslant\frac{1}{a}\frac{\alpha_0^2+\beta_0^2}{\alpha_0^2} \tag{2.3}$$

习惯上, 在条件(2.2) 下方程(2.1) 的解称为方程

$$\dot y(t)=-ay(t-\tau),\qquad t\geqslant 0 \tag{2.4}$$

的基本解• 下面我们将证明定理 1•

定理 1 的证明 令 $\gamma=\max\{\tau,\delta\}$, 记 $\varphi\in C([-\gamma,0],R)$, 定义 $x(t)=x(t;0,\varphi)$ 为满足初始条件

$$x(s;0,\varphi)=\varphi(s),\qquad s\in[-\gamma,0] \tag{2.5}$$

的方程(1.1) 的解• 则不难得证 $x(t)$ 存在且唯一•

假设 $y(t)=y(t;0,\varphi)$ 为方程(2.4) 满足初始条件

$$y(s)=\varphi(s),\quad s\in[-\gamma,0] \tag{2.6}$$

的解•

容易知道, 在条件(2.5) 下方程(1.1) 的解 $x(t)$ 可表示如下:

$$x(t)=y(t)+\int_0^t V(t-s)[(a-a(s))x(s-\tau)+F(s,x_s)]\,ds \tag{2.7}$$

其中 $y(t)$ 为在条件(2.6) 下方程(2.4) 的解, $V(t)$ 为在条件(2.2) 下方程(2.1) 的解•

由条件(1.2) 中 $0\leqslant a\tau<\pi/2$ 知道[3,4], $y(t)\to 0(t\to\infty)$• 从而

$$M_y=\sup_{t\geqslant-\gamma}|y(t)|<\infty$$

我们将证明

$$|x(t)|<\frac{1}{1-q}M_y,\qquad t\geqslant-\gamma \tag{2.8}$$

其中 $q=[a+(c-1)b]\dfrac{\alpha_0^2+\beta_0^2}{a\alpha_0^2}<1$

由于当 $t\in[-\gamma,0]$ 时, $x(t)=y(t)=\varphi(t)$, 即 $t\in[-\gamma,0]$ 时(2.8)成立•

假设(2.8)不成立, 则存在 $T_1\in(0,\infty)$ 使得

$$|x(t)|<\frac{1}{1-q}M_y,\quad -\gamma\leqslant t<T_1,\quad |x(T_1)|=\frac{1}{1-q}M_y$$

从而由(2.7)有

$$\begin{aligned}|x(T_1)|&\leqslant M_y+\int_0^{T_1}|V(T_1-s)[(a-a(s))x(s-\tau)+F(s,x_s)]|\,ds\\&<M_y+\frac{a+(c-1)b}{1-q}M_y\cdot\int_0^{T_1}V(T_1-s)\,ds\end{aligned}$$

由引理1, 上式变为

$$\begin{aligned}|x(T_1)|&<M_y+\frac{a+(c-1)b}{1-q}M_y\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{\alpha_0^2+\beta_0^2}{\alpha_0^2}\\&=\left(1+\frac{q}{1-q}\right)M_y=\frac{1}{1-q}M_y\end{aligned}$$

这与 T_1 的定义矛盾• 故(2.8)成立• 因此

$$M=\varlimsup_{t\to\infty}|x(t)|<\infty$$

因为 $\displaystyle\int_0^\infty|V(t)|\,dt<\infty,\qquad y(t)\to0(t\to\infty)$

则由(2.7)得

$$\begin{aligned}M&\leqslant[a+(c-1)b]M\int_0^\infty|V(t)|\,dt\\&\leqslant M[a+(c-1)b]\frac{\alpha_0^2+\beta_0^2}{a\alpha_0^2}=qM\end{aligned}$$

由于 $q<1$• 从而 $M=0$• 故 $x(t)\to0(t\to\infty)$•

定理1证毕•

§3. 评　　注

评注1　若 $F\equiv0$, $a(t)\equiv a$, 则方程(1.1)变为

$$\dot{x}(t)=-ax(t-\tau),\qquad t\geqslant0\tag{3.1}$$

文[3,4]中已证方程(3.1)渐近稳定的充要条件为

$$0\leqslant a\tau<\frac{\pi}{2}\tag{3.2}$$

因此定理1中条件(1.2), 在一定程度上讲, 是不可改进的•

评注2　若 $\tau\equiv0$, 则方程(1.1)变为

$$\dot{x}(t)=-a(t)x(t)+F(t,x_t),\qquad t\geqslant0\tag{3.3}$$

关于方程(3.3)及其相关方程的渐近性研究, 文献十分丰富, 例如, 文[9,11]都研究了下列方程

$$\dot{x}(t)=-a(t)x(t)+b(t)x(t-\tau),\qquad t\geqslant0\tag{3.4}$$

他们得到:

定理A[11]　若 $a(t)\geqslant0$, $a(t)\not\equiv0$, $b(t)$ 有界, 而且

$$\inf_{t\geq 0}[2a(t)-(|b(t)|+|b(t+\tau)|)]=A>0$$

$$\sup\int_t^{t+\tau}|b(s)|ds<+\infty$$

则方程(3.4)的零解是全局吸引的•

定理 B[9] 若 $a(t)\geq 0$, $\int_t^{t+\tau}|b(s)|ds$ 有界且

$$a(t)-\alpha|b(t+\tau)|\geq 0,\qquad \alpha>1(\text{常数})$$

$$\lim_{S\to\infty}\int_t^{t+S}[a(s)-\beta|b(s+\tau)|+(\beta-1)|b(s)|]ds=+\infty$$

其中 $1\leq\beta\leq\alpha$, 则方程(3.4)的零解是全局吸引的•

又如, 文[6]、[8]研究了较方程(3.4)更一般的形式

$$x'(t)=-a(t)x(t)+\int_0^t c(t-s)x(s)ds,\qquad t\geq 0 \tag{3.5}$$

文[8]中得到:

定理 C[8] 若 $\int_0^\infty|c(s)|ds<\lim_{t\to\infty}\inf a(t)$

则方程(3.5)的零解一致稳定; 若 $a(t)>0$, $c(t)>0$ 且

$$\int_0^\infty c(s)ds>\lim_{t\to\infty}\sup a(t)$$

则方程(3.5)的零解不一致稳定•

显然, 方程(3.3)包含了方程(3.4)和(3.5), 由定理 1 立刻可得

推论 1 若

$$\inf_{t\geq 0}a(t)=b>0 \tag{3.6}$$

$$|F(t,\Phi)|\leq ca(t)\|\Phi\|,\qquad 0\leq c<1 \tag{3.7}$$

则方程(3.3)的零解全局吸引•

通过比较知道, 定理 A、B、C 是推论 1 的特殊形式, 特别地, 由定理 C 知, 条件(3.7)是不可改进的•

评注 3 考虑方程(1.1)中 $a(t)$ 为自治时情形, 文[7]研究了下列方程

$$x'(t)=-ax(t-\tau)+f(t,x(t-\delta(t))),\qquad t\geq 0 \tag{3.8}$$

此时定理 1 和文[7]中定理 3.1 完全相同, 从而本文推广了文[7]中结论•

评注 4 最近文[10]研究了方程(1.1)当 $a(t)$ 为 τ_周期函数且要求$\int_t^{t+\tau}a(s)ds<\frac{1}{e}$之特殊情形• 从而本文改进和推广了文[10]•

评注 5 本文所采用的方法可推广到较方程(1.1)更一般形式的扰动方程

$$x'(t)=G(t,x(t-\tau))+F(t,x_t),\qquad t\geq 0 \tag{3.9}$$

参 考 文 献

1 T. Yoneyama and J. Segie, On the stability region of scalar of delay_differential equations, J. Math. Anal. Appl., **134**(3) (1988), 408—425•

2 J. Hale, Theory of Functional Differential Equations, Applied Mathematical Sciences **3**, SpringerVerlag, New York (1977)•

3 R. Bellman and K. L. Cooke, Differential_Difference Equations, Academic Press, New York

(1963).

4 N. D. Hayes, Roots of the transcendental equation_associated with a certain difference_differential equation, *J. London Math. Soc.*, **25**(2) (1950), 226—232•

5 V. B. Kolmovskii and V. R. Nosov, *Stability of Functional Differential Equations*, Academic Press, London, New York (1986)•

6 T. A. Burton, A. Casal and A. Somolions, Upper and lower bounds for Liapunov functionals, *Funkcal. Ekvac.*, **32**(1) (1989), 23—55•

7 I. Gyori, Global attractivity in a perturbed linear delay differential equation, *Applicable Analysis*, **34**(2) (1989), 167—181•

8 T. Hara, T. Yoneyama and R. Miyazaki, Some refines of Razumikhins method and their applications, *Funkcialaj Ekvacioj*, **35**(2) (1992), 279—305•

9 K. Kobayashi, Stability theorems for functional differential equations, *Nonlinear Analysis TMA*, **20**(10) (1993), 1183—1192•

10 刘开宇, 非自治线性时滞微分方程的扰动全局渐近稳定性及一致稳定性, 湖南大学硕士学位论文 (1996)•

11 V. B. Kolmanovskii, L. Torell and R. Verniglio, Stability of some test equations with delay, *SIAM J. Math. Anal.*, **25**(3) (1994), 948—961•

On the Perturbational Global Attractivity of Nonautomous Delay Differential Equations

Luo Jiaowan　　Liu Zaiming

(Research Institute of Sciences, Changsha Railway University, Changsha, Hunan 410075, P. R. China)

Abstract

Consider the perturbed nonautonomous linear delay differential equation

$$\dot{x}(t) = -a(t)x(t-\tau) + F(t, x_t), \qquad t \geqslant 0 \qquad (*)$$

Where $x_t(s) = x(t+s)$ for $-\delta \leqslant s \leqslant 0$. Suppose that $a(t) \in C([0,\infty),(0,\infty))$, $\tau \geqslant 0$, $F:[0,\infty) \times C[-\delta, 0] \to R$ is a continous functions and $F(t,0) \equiv 0$. Here $C[-\delta, 0]$ is the space of continuous functions $\Phi:[-\delta, 0] \to R$ with $\|\Phi\| < H$ for the norm $\|\Phi\| = \sup_{-\delta\leqslant s\leqslant 0} |\Phi(s)|$, where $|\cdot|$ is any norm in R and $0 < H \leqslant +\infty$.

Most of the known papers [1~5,7] have been concerned with the local or global asymptotic behavior of the zero solution of Eq. (*) when $a(t)$ is independent of t i.e., $a(t)$ is autonomous. The aim in this paper is to derive the sufficient conditions for the global attractivity of the zero solution of of Eq. (*) When $a(t)$ is nonautomous. Our results, which extend and improve the known results, are even "sharp". At the same time, the method used in this paper can be applicable to the perturbed nonlinear equation.

Key words perturbational global attractivity, delay differential equation, asymptotic stability, fundamental solutions, constant variable formula