应用数学和力学, 第 19 卷 第 11 期(1998 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

三维涡流场分析的 $\boldsymbol{A}$, φ_Ω 法*

施展伟[①]　　赵兴华[①]

(1997 年 6 月 20 日收到, 1998 年 6 月 5 日收到修改稿)

摘　　要

本文在分析了不同规范下三维涡流问题的场域方程、界面连续条件后指出: 在涡流区采用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$, 标量电位 φ 及库仑规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$, 在非导电区采用标量磁位 Ω 的求解策略较为合理, 并给出了这一方法($\boldsymbol{A}$, φ_Ω 法)的全部场域方程、边界条件、界面连续条件和相应的泛函•

关键词　三维涡流场　$\boldsymbol{A}$, φ_Ω 法　界面连续条件

中图分类号　TM154

§1. 引　　言

三维涡流场的分析是电磁感应加热分析和电磁设计中的一个重要问题, 近十多年来这方面已经做了许多工作[1], 曾先后提出 $\boldsymbol{A}$, φ法[2], $\boldsymbol{T}$_Ω 法[4], $\boldsymbol{A}^*$ 法等[3, 5]• 但是在用于有限元计算时, 依然存在两个问题: 一是整个区域的节点未知量太多, 计算量太大; 二是在不同介质交界面、区域界面上, 没有真正满足和处理好规范条件和电磁连续条件, 因而导致界面上结果不太好•

针对这一问题, 本文在涡流区采用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$, 标量电位 φ作场域变量, 而非导电区采用标量磁位 Ω作场域变量, 大大减少了未知量• 同时在分析对比不同规范场域方程、界面连续条件的基础上, 提出选用库仑规范 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$, 并给出正确的介质和区域界面电磁连续条件及相应的泛函, 从而较好地满足了各种界面的连接条件•

§2. 基 本 方 程

1. 涡流问题 Maxwell 方程

假设磁导率 μ, 电导率 σ, 介电常数 ε 各向同性, 不同区域其值不同, 但在同一单元内为常数• 对于中低频率的正弦时变场, 由于 εω≪σ(ω 为圆频率), 位移电流与涡流电流密度 $\boldsymbol{J}_e$ 相比, 可以略去不计• 于是涡流问题的 Maxwell 方程为:

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_e+\boldsymbol{J}_s \tag{2.1a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.1b}$$

---

* 国家自然科学基金资助项目(59375197)

① 上海市应用数学和力学研究所, 上海大学, 上海 200072

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{2.1c}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \quad 或 \quad \nabla \cdot \boldsymbol{J}_e = 0 \tag{2.1d}$$

本构关系

$$\boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{D} = \omega \boldsymbol{E}, \qquad \boldsymbol{J}_e = \sigma \boldsymbol{E} \tag{2.2}$$

不同介质界面电磁连续条件

$$\begin{gathered}\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{B}_2 \cdot \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{H}_2 \times \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{E}_2 \cdot \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{n} = \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{n}\end{gathered} \tag{2.3}$$

常用边界条件

$$\begin{gathered}B_n = B_{n_0}, \qquad \boldsymbol{H}_t = \boldsymbol{H}_{t_0} \\ J_n = J_{n_0}, \qquad \boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E}_{t_0}\end{gathered} \tag{2.4}$$

其中, $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ 分别为磁场强度, 磁感强度, 电场强度, 电感强度• $\boldsymbol{J}_s$ 为已知场源电流密度• $\boldsymbol{n}$ 为界面单位法线矢量, B_{n_0}, J_{n_0} 和 $\boldsymbol{H}_{t_0}$, $\boldsymbol{E}_{t_0}$ 分别为已知的法向、切向分量•

实际三维涡流问题, 都存在一片非导电区(气隙), 在此区域内不存在任何电流, 因此用标量磁位 Ω 作未知量较合理• 而在涡流区和场源区, 则用矢量磁位 $\boldsymbol{A}$ 和标量电位 φ 计算效果较好• 在此, 我们对不同的区域采用不同的变量, 不仅可以大大减少有限元分析的节点未知量, 而且得到的电磁计算结果也较好• 下面分别讨论两个区域的控制方程•

2. 涡流区和场源区

引入矢量磁位 $\boldsymbol{A}$, 令

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{2.5}$$

代入(2.1b), 考虑到 $\nabla \times \nabla \varphi = 0$ 得

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \tag{2.6}$$

将(2.5), (2.6) 式代入(2.1a, d) 式, 利用恒等式

$$li \qquad \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} * \nabla \times \boldsymbol{A}\right) = \frac{1}{\mu}(\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2 \boldsymbol{A}) + \left(\nabla \frac{1}{\mu} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})\right)$$

考虑到对每个单元 $\nabla \frac{1}{\mu} = 0$, 化简后有

$$\frac{1}{\mu}(\nabla \nabla \cdot \boldsymbol{A} - \nabla^2 \boldsymbol{A}) + \sigma \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \sigma \nabla \varphi = \boldsymbol{J}_s \tag{2.7a}$$

$$) 会 \qquad -\nabla \cdot \left(\sigma \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) - \nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) = 0 \tag{2.7b}$$

这是用 $\boldsymbol{A}$, φ 表示的涡流问题方程• 由于要确定矢量 $\boldsymbol{A}$, 仅有 $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ 关系是不够的, 还须补充规定它的散度• 对散度不同的规定, 就导致不同的场域方程• (2.7) 式在三种不同规范下的场域方程为:

库仑规范时($\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$)

$$\left.\begin{aligned} -\nabla^2 \boldsymbol{A} + \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} + \mu\sigma \nabla \varphi &= \mu \boldsymbol{J}_s \\ -\nabla^2 \varphi = 0, \quad 整数 \cdot \boldsymbol{A} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

洛仑兹规范时 $\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right.$

①

$$\left.\begin{aligned}
&-\nabla^2\boldsymbol{A}+\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}+\mu\sigma\nabla\varphi=\mu\boldsymbol{J}_s\\
&-\nabla^2\varphi+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}
\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

广义洛仑兹规范时 $\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu\sigma\varphi-\mu\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$

$$\left.\begin{aligned}
&-\nabla^2\boldsymbol{A}+\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}=\mu\boldsymbol{J}_s\\
&-\nabla^2\varphi+\mu\sigma\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\mu\sigma\varphi
\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

在此由于 $\varepsilon\omega\ll\sigma$, 略去了 $-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}$, $-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ 项•

3. 非导电区

在非导电区(气隙), 没有任何电流, 且 $\sigma=0$• 因此可令

$$\boldsymbol{H}=-\nabla\Omega\tag{2.11}$$

方程(2.1)就简化为

$$\nabla^2\Omega=0\tag{2.12}$$

§3. 界面连续条件

1. 同一区域不同材料性质的界面

(A) 涡流区(包括场源区)

设 A_{1l}, A_{1m}, A_{1n}, φ_1 和 A_{2l}, A_{2m}, A_{2n}, φ_2 分别为不同材料交界面两侧 **A** 的切向, 法向分量和 φ 的值, ε_1, μ_1, σ_1 和 ε_2, μ_2, σ_2 分别为两侧不同的材料性质常数• l, m, n 分别为交界面的切向和法向• 将(2.5)、(2.5) 式代入界面连续条件(2.3), 化简后便得:

$$\left.\begin{aligned}
&A_{1l}=A_{2l},\quad A_{1m}=A_{2m}\\
&\varepsilon_1=\frac{\partial A_{1n}}{\partial t}=\varepsilon_2\frac{\partial A_{2n}}{\partial t},\quad \varphi_1=\varphi_2\\
&\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{1n}}{\partial l}-\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{2n}}{\partial l}=\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{1l}}{\partial n}-\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{2l}}{\partial n}\\
&\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{1n}}{\partial m}-\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{2n}}{\partial m}=\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A_{1m}}{\partial n}-\frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A_{2m}}{\partial n}\\
&\varepsilon_1=\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}
\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

为唯一确定 **A** 值, 在界面上还必须补充满足规范条件•

对库仑规范有

$$\frac{\partial A_{1n}}{\partial n}=\frac{\partial A_{2n}}{\partial n}\tag{3.2a}$$

对洛仑兹规范有

$$\frac{\partial A_{1n}}{\partial n}+\mu_1\varepsilon_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}=\frac{\partial A_{2n}}{\partial n}+\mu_2\varepsilon_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \tag{3.2b}$$

用广义洛仑兹规范时得

$$\frac{\partial A_{1n}}{\partial n}+\mu_1\sigma_1\varphi_1=\frac{\partial A_{2n}}{\partial n}+\mu_2\sigma_2\varphi_2 \tag{3.2c}$$

由(3.1)、(3.2)式可以看出，当界面两侧的材料完全相同时，为满足界面上的电磁连续条件和规范约束，要求界面上的 $\boldsymbol{A}$，φ 函数连续，它的法向导数连续，即界面上

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2, && \varphi_1=\varphi_2\\ &\frac{\partial \boldsymbol{A}_1}{\partial n}=\frac{\partial \boldsymbol{A}_2}{\partial n}, && \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}=\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

此可

在有限元分析中，也就是要求满足 C^1 阶连续性，这给单元形函数的构造带来了相当高的要求和限制•

另外，从上可以看出，规范条件(3.2)是界面条件一个十分重要的补充，有了它才能完全确定 $\boldsymbol{A}$ 值，在构造有限元时，界面上的规范约束必须被满足•

(B) 非导电区

在非导电区，利用(2.11)式，考虑到此区电流为零，由界面连续条件(2.3)式可得：

$$\left.\begin{aligned}&\Omega_1=\Omega_2\\ &\frac{\partial \Omega_1}{\partial n}=\frac{\partial \Omega_2}{\partial n}\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

如果界面两侧的材料相同，同样要求函数 Ω 和它的法向导数 $\partial\Omega/\partial n$ 在界面上连续•

2. 不同区域(涡流区与非导电区)间的界面

当涡流区(及场源区)采用变量 $\boldsymbol{A}$，φ，非导电区采用变量 Ω 时，在这两个不同性质的界面上，为满足电磁连续条件，利用(2.5)、(2.6)式及(2.11)式，考虑到非导电区电流为零，由(2.3)式化简后可得界面条件：

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{n}\times\frac{1}{\mu_e}\nabla\times\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{n}\times\nabla\Omega\\ &\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{n}\cdot\mu_n\nabla\Omega\\ &\varepsilon_e\boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)=0\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

下标 e 表示涡流区的常数，n 表示非导电区的常数• 化成分量形式有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial A_l}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial l}=0,\quad \frac{\partial A_m}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial m}=0,\quad \frac{\partial A_n}{\partial t}+\frac{\partial \varphi}{\partial n}=0\\ &\frac{1}{\mu_e}\left(\frac{\partial A_n}{\partial m}-\frac{\partial A_m}{\partial n}\right)+\frac{\partial \Omega}{\partial l}=0\\ &\frac{1}{\mu_e}\left(\frac{\partial A_l}{\partial n}-\frac{\partial A_n}{\partial l}\right)+\frac{\partial \Omega}{\partial m}=0\\ &\frac{\partial A_m}{\partial l}-\frac{\partial A_l}{\partial m}+\mu_n\frac{\partial \Omega}{\partial n}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

界面上由规范得的补充条件为

库仑规范时：

$$\frac{\partial A_l}{\partial l}+\frac{\partial A_m}{\partial m}+\frac{\partial A_n}{\partial n}=0 \tag{3.7a}$$

洛仑兹规范时:

$$\frac{\partial A_l}{\partial l}+\frac{\partial A_m}{\partial m}+\frac{\partial A_n}{\partial n}=-\mu_e\varepsilon_e\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{3.7b}$$

广义洛仑兹规范时:

$$\frac{\partial A_l}{\partial l}+\frac{\partial A_m}{\partial m}+\frac{\partial A_n}{\partial n}=-\mu_e\sigma_e\varphi \tag{3.7c}$$

构造有限元分析模型时, 在不同区域的界面上, 条件(3.6)、(3.7)都应该被满足•

§4. 规范的选择和泛函的建立

采用不同的规范, 得到的场域方程和界面连续条件是不同的• 对场域方程来说, 广义洛仑兹规范得到的一组方程最简单, 因为变量 $\boldsymbol{A}$, φ 之间是可以独立求解的(见(2.10)式); 而库仑规范和洛仑兹规范下得到的方程组(2.8)、(2.9), 变量 $\boldsymbol{A}$, φ 间是相互耦联的, 一般求出 φ 再解 $\boldsymbol{A}$• 但从界面条件看(见(3.2)和(3.7)式), 库仑规范最简单, $\boldsymbol{A}$, φ 相互独立, 而其它两种规范, 在界面上 $\boldsymbol{A}$, φ 之间是相互耦联的, 且表达式较复杂• 在以往三维涡流场有限元分析中, 在不同介质界面上之所以得不到满足电磁连续条件的好的结果, 关键在于: 建立有限元模型时, 界面连续条件(3.1)、(3.2)式和(3.6)、(3.7)式, 实际上没有被满足, 因此出现交界面处磁力线走向失真• 这点在过去的文献中没有被充分注意•

通过对不同规范下, 场域方程和界面条件的分析对比, 我们发现采用库仑规范最为有利, 因为在构造涡流问题有限元分析模型时, 要使变量 $\boldsymbol{A}$, φ 在界面上满足复杂的耦联关系(3.2b)、(3.7b)或(3.2c)、(3.7c)是比较困难的, 而满足(3.2a)、(3.7a)要容易得多• 此时场域方程中 $\boldsymbol{A}$, φ 虽有耦联, 但只要通过先解 φ 再解 $\boldsymbol{A}$ 还是比较方便的• 因此在三维涡流问题有限元分析中, 我们采用库仑规范($\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$)下的 **A**, φ_Ω 法•

采用加权残量法, 根据场域方程(2.8)、(2.11), 界面连续条件(3.5), 边界条件(2.4), 可以建立库仑规范下, 三维涡流问题 $\boldsymbol{A}$, φ_Ω 法的分区变分原理• 即在满足区域表面 S_1, S_2, S_5 上已知边界条件

$$\boldsymbol{A}\,|_{S_1}=\boldsymbol{A}_0,\quad \varphi\,|_{S_2}=\varphi_0,\quad \Omega\,|_{S_5}=\Omega_0 \tag{4.1}$$

的一切可能的 $\boldsymbol{A}$, φ, Ω 中, 实际正弦稳态问题的 $\boldsymbol{A}$, φ, Ω 必须使下列泛函取驻值:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{A},\varphi,\Omega)=&\frac{1}{2}\int_{V_e}\left\{\frac{1}{\mu}(\nabla\times\boldsymbol{A})^2+\frac{1}{\mu}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})^2+j\omega\sigma\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}+2\sigma\nabla\varphi\cdot\boldsymbol{A}\right.\\ &\left.+\frac{\sigma}{j\omega}(\nabla\varphi)^2-2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}_s\right\}dV+\frac{1}{2}\int_{V_n}\mu(\nabla\Omega)^2dV-\int_{S_3}(\boldsymbol{H}_{t0}\cdot\boldsymbol{A})\,dS\\ &+\frac{\sigma}{j\omega}\int_{S_4}E_{n_0}\varphi\, dS+\int_{S_6}B_{n_0}\Omega\, dS-\int_{S_{en}}(\nabla\Omega\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S} \end{aligned} \tag{4.2}$$

在此 V_e, V_n 分别为涡流区(包括场源区)和非导电区的体积, S_{en} 为两个区域的界面• S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 分别为已知边界值 A_0, φ_0, H_{t0}, E_{n0}, Ω_0, B_{n0} 的边界• ω 为正弦变化的圆频率•

由变分 $\delta F=0$, 可以得到全部场域方程(2.8)、(2.11), 区域界面连续条件(3.5), 自然边界条件和界面上的规范约束 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$•

利用(4.2)式泛函, 可以用常规的有限元分析方法, 导出场域变量分别采用 $\boldsymbol{A}$, φ 和 Ω 的

有限元公式,随后再研制相应的程序。我们曾用此法发展了一个三维涡流场分析程序,通过典型例子的考核和实例计算,得到了满意的结果,尤其是消除了以往涡流分析中介质交界面上的电磁不连续性。

参 考 文 献

1 Proc. Conf. on the computation of Electromagnetic Fields (Graz. Austria, Aug. 25~28, 1987), also IEEE Trans. Mag., **24**(1) (1988), 13—578.

2 M. V. K. Chari, A. Konrad, M. A. Palmo and J. D. Angelo, Three dimensional vector potential analysis for machine field problem, IEEE Trans. Mag., **18**(2) (1982), 435—446.

3 C. R. I. Emson and J. Somkin, An optimal method for 3_D eddy currents, IEEE Trans. Mag., **19**(6) (1983), 2450—2462.

4 M. L. Brown, Calculation of 3 dimensional eddy currents at power frequencies, PIEE, **129**(1) (1982), 46—53.

5 R. I. Emson and C. W. Trowbridge, Transient 3D eddy currents using modified magnetic vector potentials and magnetic scalar potentials, IEEE Trans. Mag., **24**(1) (1988), 86—89.

$\boldsymbol{A}$, φ_Ω Method for 3_D Eddy Current Field Analysis

Shi Zhanwei　　Zhao Xinghua

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China)

Abstract

After the field equations and the continuous conditions beteen the interfaces for 3_D eddy current problems under various gauges were discussed, it was pointed out in this paper that using the vector magnetic potential A, electric scalar potential φ and Coulomb gauge $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$ in eddy current regions and using magnetic scalar potential Ω in the nonconducting regions are more suitable. All field equations, the boundary conditions, the continuous conditions between the interfaces and the corresponding variational principle corresponding with this method are also given.

Key words　3_D eddy current field, $\boldsymbol{A}$, φ_Ω method, interface continuous conditions