应用数学和力学, 第 19 卷 第 11 期(1998 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

扰动周期 KdV 方程的小波基分析*

卢殿臣[①] 田立新[①] 刘曾荣[②]

(1997 年 8 月 11 日收到)

摘 要

本文利用样条小波基构造近似惯性流形来研究扰动周期 KdV 方程的长期动力学行为•

关键词 小波基 近似惯性流形 扰动周期 KdV 方程
中图分类号 O175

§1. 引言及符号

自然界的现象都是在一定时间和空间出现• 时空复杂性体现在用偏微分方程来描述时间与空间的联系及系统长期行为• 传统的方法将状态函数作 Fourier 级数展开, 偏微分方程转化为 Fourier 系数随时间演化的常微分方程• 但是我们很难抓住时空行为模式转变时起主要作用的 Fourier 系数• 其次我们很容易观察到大涡套小涡, 小涡中套更小涡等的串级结构• 因此我们希望通过利用小波去构造近似惯性流形来获得小涡与高频, 大涡与低频之间关系的定理及数值计算新途来研究湍流及孤立波的问题•

Foias, Sell, Teman 等引入新的数学工具: 惯性流形及近似惯性流形(见[1, 2]) , 它们建立在 Fourier 分析上• 尽管近似惯性流形是一种简单有效的方法, 但要在时间与空间都有良好的局部性质就必须突破 Fourier 分析的限制• 利用样条小波研究近似惯性流形起源于[3] 对一类自共轭非线性发展方程的讨论• 本文我们研究扰动周期 KdV 方程, 利用样条小波基去构造近似惯性流形• 该问题及结果不同于[3] • 在近似惯性流形研究基础上我们将研究其上的数值分析•

扰动周期 KdV 方程出现在流体力学的众多领域, 如[4, 5] • 它是一类数学物理中很重要的方程• 该类方程已在[4, 5] 作数值研究• 在[4] , Ercolani, Malaughlin, Roitner 利用非线性谱分析研究吸引子和瞬态• 在[5] , Sun, Chen 研究行波解行为• 由于该类方程的重要性, 它的动力系统长期动力学行为的研究非常有意义• 在[6] 我们得到 Fourier 分析下弱阻尼 KdV 方程存在近似惯性流形•

* 国家自然科学基金(19601020) 及江苏省自然科学基金资助
① 江苏理工大学数理系, 江苏镇江市 212013
② 上海大学理学院数学系, 上海 201800

有关符号见[3, 7]，记 Z, R, C 分别表示整数、实数、复数· $\pi=R/Z$ 为一维环· $C^N(\pi)$ 表示 π 中 N 次连续可微函数全体，$C^N(\pi)\subset H^s(\pi)$，$H^s(\pi)$ 是通常的周期 Sobolev 空间· 我们仍用 $H^s(\pi)$ 表示 $H^s(\pi)$ 中的函数 u 且满足 $\int_\pi u(x)\,dx=0$

$H^s(\pi)$ 中的内积定义为 $(u,v)_s=\sum_{k\in z}|k|^{2s}\hat{u}(k)\overline{\hat{v}(k)}$，则 $H^s(\pi)$ 是 Hilbert 空间，其中 $\hat{u}(k)=\int_\pi u(x)\exp[-2k\pi x i]\,dx$ 记 $|u|_s$ 为相应的范数，$|u|_s=(u,u)_s^{1/2}$· 当 $s=0$ 时，$H^0(\pi)=L^2(\pi)$·

考虑有限维空间 $V_j=\{v\in C^N(\pi): v$ 为 $[k/2^j,(k+1)/2^j)$ 上阶数 $\leqslant N+1$ 的几乎多项式函数，节点在 $k/2^j, 0\leqslant k<2^j\}$· 则

$$V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_i\subset V_{i+1}\subset\cdots\subset L^2(\pi)$$

记 $W_j=V_{j+1}\cap(V_j)^\perp$，则 $L^2(\pi)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}W_j$· 该和是正交直和· 下面引入 W_j 中的周期小波基· 由[3, 7]，我们有，对每个整数 N，存在函数 ψ_N 满足：

(1) $\psi_N\in C^N(R)$，其中 ψ_N 是阶数 $\leqslant N+1$ 的几乎多项式函数，其节点在整数上·

(2) 存在 $\varepsilon_N>0$，对 $m\leqslant N+1$，成立 $\left|\dfrac{\partial^m}{\partial x^m}\psi_N(x)\right|\leqslant C\exp[-\varepsilon_N|x|]$

(3) 若 $m\leqslant N+1$ 则 $\int_R x^m\psi_N(x)\,dx=0$

(4) 族 $\{2^{j/2}\psi_N(2^jx-k)\}_{j\in z}$ 是 $L^2(R)$ 中的正交基·

本文将 ψ_N 下标省去，简记为 ψ，由[3]，则有周期小波为

$$\psi_{j,k}(x)=2^{j/2}\sum_{m\in Z}\psi(2^jx+2^jm-k)$$

且族 $\{\psi_{j,k}\}_{1\leqslant k\leqslant 2^j}$ 是 W_j 的正交基；族 $\{\psi_{j,k}\}_{1\leqslant k\leqslant 2^j, 0\leqslant j<\infty}$ 是 $L^2(\pi)$ 的正交基·

§2. 扰动周期 KdV 方程的小波基方法

本文研究如下一类扰动周期 KdV 方程

$$u_t+\varepsilon u_{xxxx}+u_{xxx}-\eta u_{xx}+\gamma u+uu_x=f\qquad(\eta,\gamma>0)\tag{2.1}$$

$$u(x,t)=u(x+1,t)\tag{2.2}$$

$$u(x,0)=u_o(x)\in H^3(\Omega)\tag{2.3}$$

$$f\in H^3(\Omega)\ (与\ t\ 无关)\tag{2.4}$$

其中，$H=L^2(\Omega)$，$\Omega=[0,1]$，$V=D(B^{1/2})=H^2(\Omega)$，V 中范数为 $\|\cdot\|$，H 是可析 Hilbert 空间且范数为 $|\cdot|$· 记 $Bu=u_{xxxx}$，$A_0u=u_{xxx}-\eta u_{xx}+\gamma u+uu_x$，$A_\varepsilon u=\varepsilon u_{xxxx}+A_0u$，$R(u)=f-uu_x$· 则(2.1)为

$$u_\varepsilon+A_\varepsilon u=R(u)\tag{2.5}$$

定义　一个光滑的有限维流形 M 称为方程(2.1)的 η 级近似惯性流形，若对该方程的任何轨道 $u(t)$，存在 $t_0>0$，依赖于 $|u_0|$，当 $t\geqslant t_0$ 时成立

$$\operatorname{dist}(u(t),M)\leqslant\eta$$

由定义该方程的整体吸引子被嵌入到 M 的 η 邻域中· 由于 A_0 非自共轭，从而(3.1)的

研究有别于[3]• 这时 $R(u): D(A_\varepsilon)\to D(A_\varepsilon^{3/4})=H^3$. $\varepsilon>0$ 时, A_ε 扇形算子且有紧的预解集(见[6]), 并且

$$(A_\varepsilon u, u)\geqslant\min\{n, \gamma, \varepsilon\}\|u\|^2\geqslant\min\{\eta, \gamma, \varepsilon\}|u|^2$$

当 j 固定, V_j 是方程(2.1)~(2.4)的 Galerkin 逼近的周期几乎多项式函数• 由第 1 节可得当 $N>3$ 时, $V_j\subset V$ 成立• 定义 P_j 是 H 到 V_j 中的投影• $Q_j=I-P_j$• 定义 $P_{1,j}$ 是 V 到 V_j 中的投影且 $Q_{1,j}=I-P_{1,j}$• 方便起见, 下面的研究中省去 P_j, Q_j, P_{1j}, Q_{1j} 中的下标 j, 对(2.1)~(2.4)的解 $u(t)$ 定义 $y(t), y_1(t)$ 为

$$y(t)=Pu(t),\quad y_1(t)=P_1u(t),\quad z(t)=Qu(t),\quad z_1(t)=Q_1u(t)$$

定理 $N>3$ 时, 若初值 u_0 满足 $|u_0|\leqslant R$, 则当 t 充分大时成立

$$|z(t)|,\ |z_1(t)|,\ z'(t)|\ z'_1(t)|\leqslant\frac{C_4}{16^j},\quad z'=\frac{dz}{dt},\quad z'_1=\frac{dz_1}{dt};$$

$$\|z(t)\|,\ \|z_1(t)\|\leqslant C_5/4^j\qquad (C_4, C_5 \text{ 为常数})$$

这时方程(2.1)~(2.4)具有 N 阶的样条小波的光滑流形 V_j 是 H 中级为 $1/16^j$ 或是 V 中级为 $1/4^j$ 的近似惯性流形•

证明 因为 $H=L^2(\Omega)$, 则 $QH=V_j^{\perp}=\bigoplus_{m\geqslant j}W_m$, 对任意 $z\in QV$, $V=D(B^{1/2})\subset H^2(\Omega)$, 则

$$z=\sum_{m=j}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^j}\gamma_{m,k}\phi_{m,k},\qquad |z|^2=\sum_{m,k}|\gamma_{m,k}|^2$$

由[3]推论 5 得到 $\sum_{m,k}4^m|\gamma_{m,k}|^2\leqslant C_6\|z\|^2$• 因为

$$\sum_{m=j}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^j}4^{2m}|\gamma_{m,k}|^2=4^{2j}\sum_{m=j}^{\infty}4^{2(m-j)}|\gamma_{m,k}|^2$$

则
$$|z|^2\leqslant\sum_{m=j}^{\infty}4^{2(m-j)}|\gamma_{m,k}|^2\leqslant\frac{C_6}{4^{2j}}\|z\|^2,\qquad |z|^2\leqslant C_6\|z\|^2/4^{2j}\tag{2.6}$$

同理可证得存在 C_7, 对任意 $z_1\in Q_1V$, 有

$$|z_1|^2\leqslant C_7\|z_1\|^2/4^{2j}\tag{2.7}$$

因为 $\|z_1\|^2=(B^{1/2}z_1, B^{1/2}z_1)=(B^{1/2}u, B^{1/2}z_1)=(Bu, z_1)$, 方程(2.1)与 z_1 作内积则

$$\begin{aligned}\varepsilon\|z_1\|&=2(R(u), z_1)-\left(\frac{du}{dt}, z_1\right)-(A_0u, z_1)\\&\leqslant|R(u)|\ |z_1|-\left|\frac{du}{dt}\right|\ |z_1|-(A_0z_1, z_1)\end{aligned}\tag{2.8}$$

由[6], 方程(2.1)~(2.4)有着整体吸引子则 $|R(u)|\leqslant C_8\|u\|\leqslant M_0$, 来证明 $\left|\frac{du}{dt}\right|\leqslant C_9$

设 $0<h<t_0$ 记 $\omega(t)=u(t+h)$, 则

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{u(t)-w(t)}{h}\right|^2+\gamma_0\left|\frac{u(t)-w(t)}{h}\right|^2\\&\leqslant\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{u(t)-w(t)}{h}\right|^2+\left(A_\varepsilon\frac{u(t)-w(t)}{h}, \frac{u(t)-w(t)}{h}\right)\\&\leqslant\frac{1}{h^2}(Ru(t)-Rw(t), u(t)-w(t))\\&\leqslant\frac{1}{k}|Ru(t)-Rw(t)|^2+k\left|\frac{u(t)-w(t)}{h}\right|^2\qquad(k>0)\end{aligned}$$

令 $k = \gamma_0/2$. 又 $|Ru(t) - Rw(t)| = |uu_x - ww_x| \leqslant M_1$(见[6]), 则记 y 为 $\left|\frac{u(t) - w(t)}{h}\right|$, 成立 $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}y + \gamma_0 y/2 \leqslant M_1$ 或 $\frac{d}{dt}y + \gamma_0 y \leqslant 2M_1$, 由 Growell 不等式得到

$$y \leqslant y(0)e^{-\gamma_0 t} + \frac{M_1}{\gamma_0}\left(1 - e^{-\gamma_0 t}\right) \leqslant C_9$$

j

令 $h \to 0$, 则 $\left|\frac{du}{dt}\right| \leqslant C_9$, 又由[6] 得

$$-(A_0 u, z_1) = -(A_0 z_1, z_1) \leqslant -\min\{\eta, \gamma\}|z_1|^2$$

因此由式(2.8) 得到

$$\|z_1\|^2 \leqslant C_{10}|z_1| \leqslant C_5/4^j$$

由式(2.7), 则 $|z_1| \leqslant C_4/16^j$. 设 $z = Qz_1$, 则 $|z| \leqslant |z_1| \leqslant C_4/16^j$, 所以

$$|z| \leqslant C_4/16^j$$

设 $v = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^m}\gamma_{m,k}\psi_{m,k}$, 则 $Qv = \sum_{m=j}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^m}\gamma_{m,k}\psi_{m,k}$. 由[3] 推论 5

$$\|Qv\| \leqslant C\left(\sum_{m=j}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^m}4^{2m}|\gamma_{m,k}|^2\right)^{1/2}$$

/

$$\leqslant C\left(\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^m}4^{2m}|\gamma_{m,k}|^2\right)^{1/2}$$

2

$$\leqslant C_{10}\|v\|$$

记 $z = Qz_1$, 则 $\|z\| \leqslant C\|z_1\| \leqslant C_4/4^j$, 接下来估计 $|z'|$, $|z'|$.

设 H_c, V_c, V_c^j, $D(B^{1/2})_c$ 是 H, V, V_j, $D(B^{1/2})$ 的复数化空间. 易得 $\{\psi_{m,k}\}_{0\leqslant m\leqslant j,\,1\leqslant k\leqslant 2^m}$ 仍是 V_c^j 上的正交基且 $\{\psi_{m,k}\}_{0\leqslant m<\infty,\,1\leqslant k\leqslant 2^m}$ 是 $L^2(\Omega)_c$ 中的正交基. 且前述的 y_1, z_1 可以被扩张到与 u 扩张相同定义域的对时间的解析函数, 分别设 Y_1. Z_1, U 是 y_1, z_1, u 的扩张, 对 $\rho \in \Gamma = \{\rho \in C: \mathrm{Re}\rho > 0.\ |\mathrm{Im}\rho| \leqslant T_0$, 若 $\mathrm{Re}\rho \geqslant T_0$; $|\mathrm{Im}\rho| \leqslant \mathrm{Re}\rho$, 若 $\mathrm{Re}\rho \leqslant T_0\}$, 方程(2.1) 复数化后为 意 ″ 任

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} + \varepsilon BU + A_0 U = R(U) \tag{2.9}$$

上式与 Z_1 作内积, 则得到

$$\varepsilon\|z_1\|^2 = (R(U), Z_1) - \left(\frac{\partial U}{\partial \rho}, Z_1\right) - (A_0 U, Z_1)$$

$$\leqslant |R(U)||Z_1| + \left|\frac{\partial U}{\partial \rho}\right||Z_1| - (A_0 Z_1, Z_1) \tag{2.10}$$

因为 $|R(U)| \leqslant C\|U\| \leqslant M$, 与上述证 $\left|\frac{dz}{dt}\right| \leqslant C_9$ 类似证明得到

$$\left|\frac{\partial U}{\partial \rho}\right| \leqslant C_{11}, \text{且}(A_0 U, U) = (A_0 Z_1, Z_1) \geqslant \min\{\eta, \gamma\}\|Z_1\|^2$$

则由(2.10) 得到

$$\|Z_1\|^2 \leqslant C_{12}|Z_1| \leqslant C_4\|Z_1\|/4^j$$

则 $\|Z_1\| \leqslant C_5/4^j$

设 $Z = QZ_1$, 得 $|Z| \leqslant |Z_1| \leqslant C_4/16^j$. 同理得 $\|Z\|$, $\|Z_1\| \leqslant C_5/4^j$

当 $\rho \in \Gamma$ 时, 由 Cauchy 积分公式得到对 Γ 中的中心在 ρ 半径为 $T_0/2$ 的球 B 积分得到

$$\left|\frac{dz}{dt}\right| \leqslant C_{13}\sup|Z(p)| \leqslant C_{14}|Z| \leqslant C_4/16^j$$

$$\left|\frac{dz}{dt}\right| \leqslant C_4/16^j,\ 同理得到 \left|\frac{dz_1}{dt}\right| \leqslant C_4/16^j$$

注　利用小波基研究扰动周期 KdV 方程的小波 Gaerkin 解及误差分析我们将另文给出(见[8])· 在本文基础上,我们可以建立约化的有限维小波基空间上的常微分方程形式,可以利用该常微分方程作数值计算·

参 考 文 献

1 R. Teman, Infinite_Dimensional Dynamical system in Mechanics and Physics, Appl. Math. Soc., V. **68**, Springer_Verlay, Berlin, New York (1988).

2 A. Debussche and M. Marion, On the constructure of famliies of approximate inertial manifolds, J. Diff. Egu., **100** (1992), 173—201.

3 O. Goubet, Construction on approximate inertial manfolds using wavelets, SIAM, J. Math. Anal., **9** (1992), 1455—1481.

4 N. M. Ercolani, D. W. Mclaughlin and H. Roitner, Attractors and transients for a perturbed periodic KdV equations: a nonlinear spectral analysis, J. Nonli. Sci., **3** (1993), 477—539.

5 S. M. Sun and M. C. Shen, Exponential small estimate for a generalized solitary wave solution to the perturbed KdV equation, Nonlinear Analy., **23**(4) (1994), 545—564.

6 田立新、徐振源, 弱阻尼 KdV 方程长期动力学行为研究, 应用数学和力学, **18**(10) (1997), 953—958.

7 C. K. Chui, An Introduction to Wavelet, Academic Press, Inc., USA (1992).

8 田立新、卢殿臣、刘曾荣, 弱阻尼 KdV 方程的小波 Galerkin 方法,《MMM—Ⅶ论文集》, 上海大学出版社 (1997).

Wavelet Basis Analysis in Perturbed Periodic KdV Equation

Lu Dianchen　　Tian Lixin

(Department of Mathematics and Physics, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang, Jiangsu 212013, P.R.China)

Liu Zengrong

(Department of Mathematics, Shanghai University, Jiading, Shanghai 201800, P.R.China)

Abstract

In the paper by using the spline wavelet basis to construct the approximate inertial manifold, we study the longtime behavior of perturbed perodic KdV equation.

Key words　wavelet basis, approximate inertial manifold, perturbed periodic KdV equation