

一个非线性积分微分方程的数值研究

朱 勇

(戴世强推荐, 1997 年 10 月 18 日收到)

摘 要

本文采用 Fornberg 和 Whitham 的拟谱方法, 数值研究了一个非线性积分微分方程的初值问题:

$$R. A_t + 6AA_x + \frac{1}{2|\ln|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x, t)}{\{(x-x')^2 + 2\}^{1/2}} dx = 0$$

发现当 ϵ 很小时, 其解与 KdV 方程的解接近. ϵ 较大的 ϵ 和初始条件对解的影响是很大的.

关键词 拟谱方法 非线性积分微分方程 孤立波

中图分类号 O175

1 引 言

众所周知, Korteweg-de Vries 方程是一个描述非线性与色散效应相平衡的系统的一个典型方程. 这个方程存在孤立子解, 这已被 Zabnsky 和 Kruskal^[1] 通过数值方法发现. 但有时, 一个系统的非线性和色散效应相平衡得到的不是一个微分方程, 而由一个非线性积分微分方程来描述. 例如, Leibovich^[2] 在讨论无界旋转流体中涡破裂问题时导出了一个非线性积分微分方程

$$A_t + 6AA_x + L(A_{xx}) = 0 \quad (1.1)$$

其中

$$L(A) = \frac{1}{2|\ln|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x, t)}{\{(x-x')^2 + 2\}^{1/2}} dx \quad (1.2)$$

式中, A 代表波幅, x 和 t 是已尺度化的长度和时间, ϵ 是一个参数.

当 $\epsilon = 0$ 时上述方程即为 KdV 方程, 但当 $\epsilon > 0$ 时, 该方程的精确解尚未找到(也许无精确解). Leibovich 给出了上述方程, 但对该方程的解未作任何描述.

Grimshaw 和 Zhu^[3] 在研究无界旋转流体绕物体共振流动时, 导出了一个更为复杂的具强迫力项的非线性积分微分方程, 该方程在一个特殊情况下与 Leibovich 所导得的方程相同, 但未作详细的数值分析.

本文拟对方程(1.1)的一些数值分析结果作一报道. 所采用的方法是 Fornberg 和 Whitham^[4] 发展起来的拟谱法(pseudo_spectral method). 对所提及的另一个非线性积分微分方程的数值结果将另文发表.

2 数值方法

所采用的数值方法是拟谱法, 它将 $A(x, t)$ 对 x 转换到 Fourier 空间, 各种对 x 导数在转换变量中具代数形式

将空间周期正规化为 $[0, 2]$, 将这个区间分成 $2N$ 个点, 即取 $x = j/N$ $A(x, t)$ 函数仅在这些点上定义, 这样可转化到离散的 Fourier 空间

$$A(k, t) = FA = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{j=0}^{2N-1} A(j/N, t) e^{-ijk/N} \quad (2.1)$$

其中

$$k = 0, 1, \dots, N \quad (2.2)$$

其反演公式为

$$A(j/N, t) = F^{-1}A = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_k A(k, t) e^{ijk/N} \quad (2.3)$$

这些变换可以用快速 Fourier 算法(FFT)来完成

这样

$$A_x = F^{-1}(ikFA) \quad (2.4)$$

$$L(A_{xxx}) = -F^{-1} \left[ik^3 \frac{K_0(|k|)}{2|\ln|} FA \right] \quad (2.5)$$

其中, $K_0(\cdot)$ 是零阶的第二类修正的 Bessel 函数

对时间导数项采用蛙跳格式, 这样有

$$A(x, t + \Delta t) - A(x, t - \Delta t) + 2i \Delta t A F^{-1}(kFA) - 2i \Delta t F^{-1} \left[ik^3 \frac{K_0(|k|)}{2|\ln|} FA \right] = 0 \quad (2.6)$$

蛙跳时间格式有可能引起逐次时间层上解的分离(separation), 为了避免这个问题, 可以在计算了时间层为 $t - \Delta t, t, t + \Delta t$ 后, 引进作为相邻层平均的量的层 $t - \Delta t/2, t + \Delta t/2$, 从这些新的层重新开始进行计算 在我们的计算中每隔 20 时间步长重复一次, 没有出现相邻时间层的解的分离

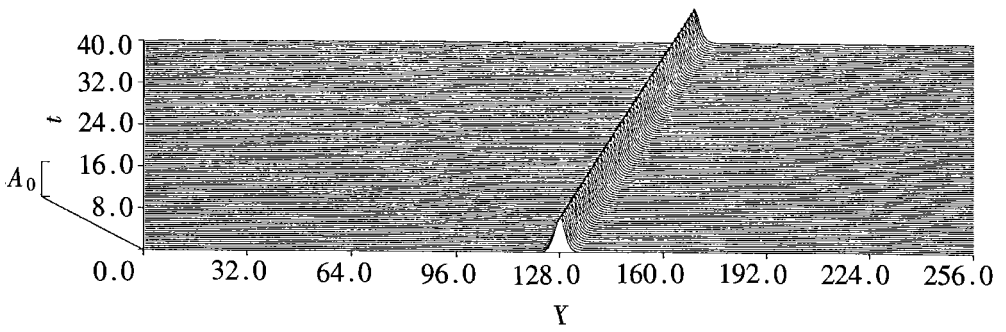
3 数值结果及讨论

我们取方程(1.1)的初始条件为

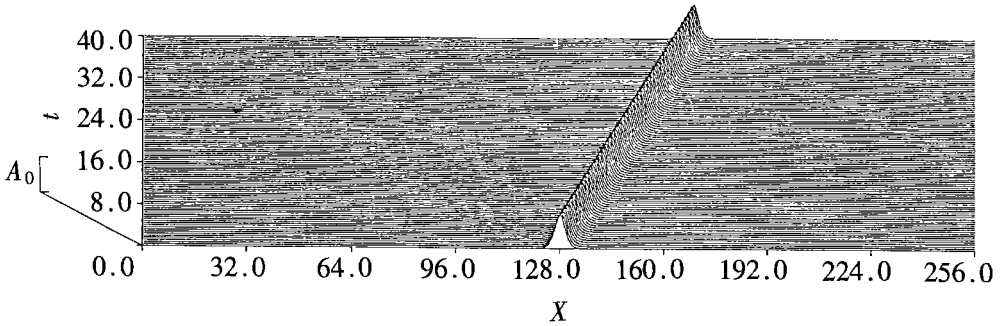
$$A(x, 0) = a \operatorname{sech}^2(bx) \quad (3.1)$$

$$\text{其中, } a = 2b^2 \quad (3.2)$$

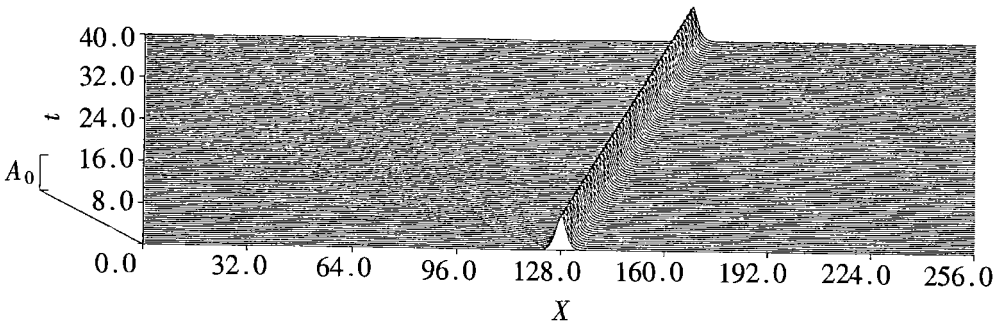
这是一个 kdv 方程的解, 如果方程(1.1)是一个 KdV 方程, 那么方程的解是一常速度为 $2a$ 具固定形状的孤立波 我们取 $\epsilon = 0, 0.01, 0.1, 0.3, a = 0.5$, 其计算结果示于图 1(a) ~ (d) 可以看到, 当 $\epsilon = 0$ 及 0.01 时解的结果与 KdV 孤立波重合, 这也进一步证明了 $\epsilon = 0$ 对应于方程(1.1)退化成 KdV 方程, 而当 ϵ 很小时, ϵ 的影响可忽略不计 当 $\epsilon = 0.1$ 时, 我们看到在主波附近有小的色散波列的出现, 而当 $\epsilon = 0.3$ 时, 色散波列的波幅增大, 进一步加大 ϵ 的作用将越来越明显 图 2(a) ~ (b) 给出了 $\epsilon = 0.1$ 时波幅 a 的影响, 所取的波幅为 a



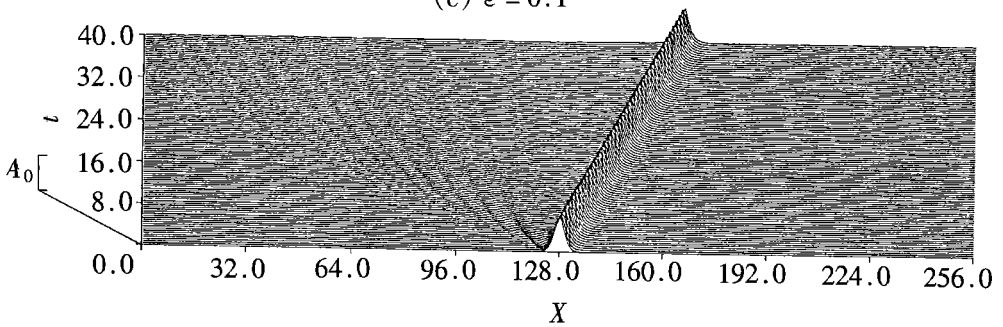
(a) $\epsilon = 0.00$



(b) $\epsilon = 0.01$



(c) $\epsilon = 0.1$

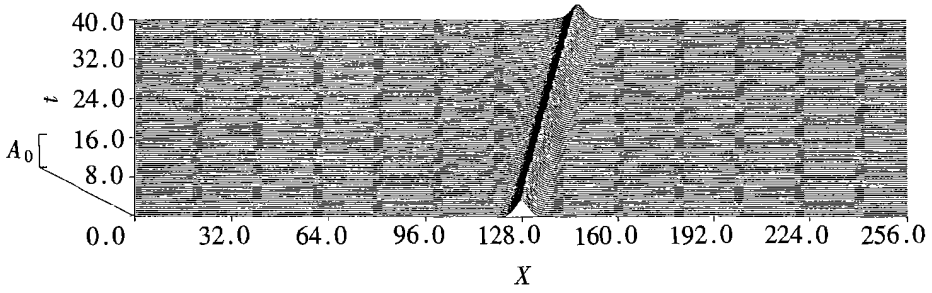


(d) $\epsilon = 0.3$

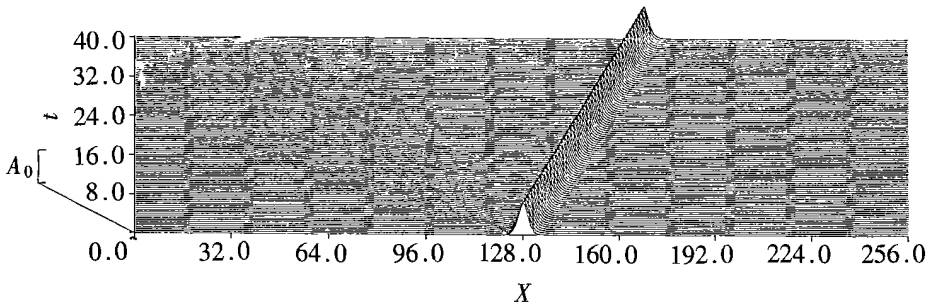
图1 式(1.1)数值解 ($a = 0.5$)

$\epsilon = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ 十分明显, 随着初始条件的波幅的增加, 在主波附近将会有较大的色

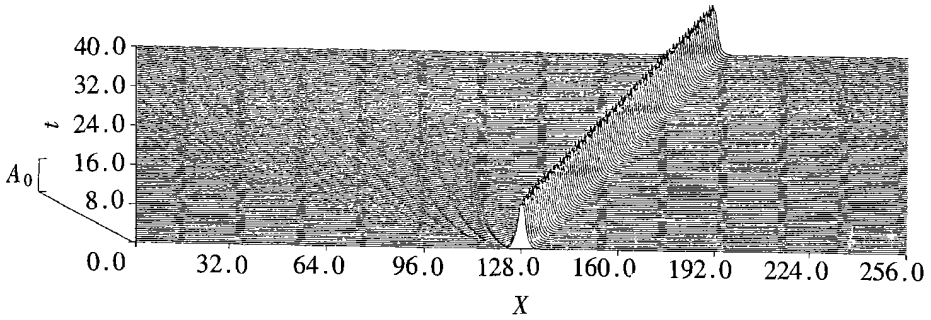
散波列 初始条件的影响是很大的



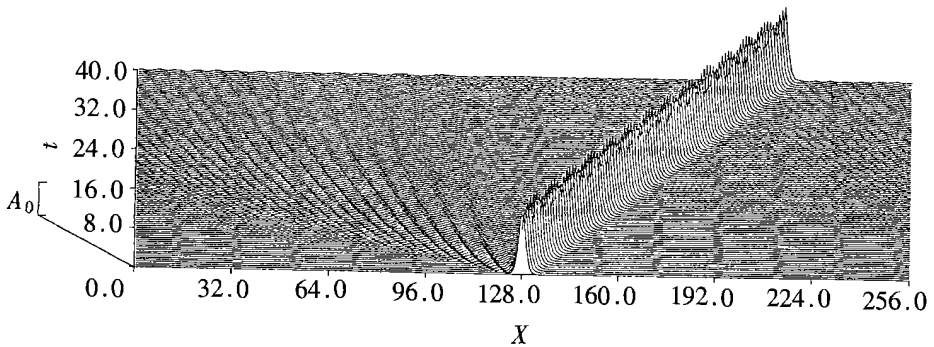
(a) $a = 0.25$



(b) $a = 0.5$



(c) $a = 0.75$



(d) $a = 1.0$

图 2 式(1.1)数值解 ($\epsilon = 0.1$)

致谢 本文部分工作是作者在澳大利亚 Monash 大学时完成的, 作者感谢与 R. Grimshaw 院士的讨论

参 考 文 献

- 1 N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Interaction of soliton in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.*, **15** (1965), 240–243
- 2 S. Leibovich, Weakly nonlinear waves in rotating fluids, *J. Fluid Mech.*, **42** (1970), 803–822
- 3 R. Grimshaw and Y. Zhu, Resonant flow of a rotating fluid past an obstacle: the radially unbounded case, *Can. Appl. Math. Quart.*, **2**(2) (1994), 189–206
- 4 D. Fornberg and G. B. Whitham, A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, **A289** (1978), 373–404

Numerical Study of a Nonlinear Integro-Differential Equation

Zhu Yong

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University,
Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract

In this paper, by using the pseudo_spectral method of Fornberg and Whitham, a nonlinear integro-differential equations

$$A_t + 6AA_x + \frac{1}{2|\ln|} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(x', t)}{(x-x')^2 + \frac{1}{2}} dx' = 0 \quad (1)$$

is investigated numerically. It is found that for small ϵ , the result is close to that of the KdV equation, but the effects of larger ϵ and the initial condition are significant.

Key words integro-differential equation, spectral method, solitary waves