

# 输送流体管道的固—液耦合动力学研究

王世忠<sup>①</sup> 刘玉兰<sup>①</sup> 黄文虎<sup>①</sup>

(王彪推荐, 1997 年 10 月 11 日收到)

## 摘 要

根据 Hamilton 原理推导输送流体管道固—液耦合振动方程, 得到反对称的固—液耦合阻尼矩阵和对称的固—液耦合刚度矩阵; 用 QR 法计算管道固有频率, 给出了管道前 4 阶固有频率—流速曲线; 讨论了流体的流速、压强变化以及固—液耦合阻尼和固—液耦合刚度对管道固有频率的影响; 用 New mark 法计算不同流速时管道对阶跃载荷的动力响应; 发现了各阶固有频率都有随流速的提高而降低、再提高、再降低的周而复始现象。

**关键词** 有限元法 输送流体管道 固—液耦合振动

**中图分类号** O353

## § 1. 引 言

流体输送管道固液耦合振动问题普遍存在于宇航、能源、石油和化工等领域。它不仅在理论上具有重要研究价值, 而且有广泛的工程背景。因此, 一直被学术界列为重要的研究课题之一。Housner, G. W. 和 Feodociev, V. Y. 推导出管道固液耦合振动的正确方程<sup>[1][2]</sup>; Long, R. H. 对两端固支的管道<sup>[3]</sup>; Grgeory, R. W. 和 Paidoussis, M. P. 对悬伸的管道<sup>[4]</sup>; Benjamin, T. B. 对关节联接管道<sup>[5]</sup>; Hill, J. L. 和 Swanson, C. P. 对有集中质量管道<sup>[6]</sup>的基频特性分别进行了研究。

近年来, Bajaj, A. K, Sethna, P. R. 和 Lundgreen, T. S. 提出输送流体管道中的分叉现象<sup>[7]</sup>; Tang, D. M. 和 Dowell, E. H. 对悬伸管道中的混沌运动<sup>[8]</sup>, Paidoussis, M. P., Li, G. X. 和 Rand, R. H. 对固支管道内的混沌运动进行了研究<sup>[9]</sup>; 张悉德提出对 Housner 方程的修正<sup>[10]</sup>。

采用有限元方法, 王本利和王世忠给出悬伸的直管道<sup>[11]</sup>; 王世忠和王茹给出悬伸的三维管道基频—流速变化曲线<sup>[12]</sup>。

本文在文献[11][12]的基础上, 给出了管道前 4 阶固有频率—流速曲线; 讨论了流体的流速、压强的变化以及固—液耦合阻尼和固—液耦合刚度对管道固有频率的影响; 发现了各阶固有频率都有随流速的提高而降低、再提高、再降低的周而复始现象。

① 哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001

## § 2. 管道自由振动微分方程

根据 Hamilton 原理

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} = 0 \quad (2.1)$$

式中,  $T$  为管道单元动能, 单位 kJ;  $V$  为管道单元势能, 单位 kJ;  $\delta W_{nc}$  为非保守力在虚位移上作的功, 单位 kJ·

$$\text{而 } T = \int_0^l dT = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} (m - \rho) \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \rho [v^2 + (y + vy')^2] \right\} dx \quad (2.2)$$

$$V = \int_0^l dV = \int_0^l \frac{1}{2} EI (y'')^2 dx \quad (2.3)$$

$$\delta W_{nc} = - \int_0^l cy \delta y dx - \int_0^l APy'' \delta y dx \quad (2.4)$$

式中,  $A$  为管道横截面积( $\text{m}^2$ );  $E$  为管道弹性模量( $\text{N}/\text{m}^2$ );  $m$  为单位长度上管道与液体的质量( $\text{kg}/\text{m}$ );  $\rho$  为单位长度上液体的质量( $\text{kg}/\text{m}$ );  $I$  为管道横截面惯性矩( $\text{m}^4$ );  $P$  为液体压强( $\text{N}/\text{m}^2$ );  $U$  为液体流速( $\text{m}/\text{s}$ )·

将式(2.2), (2.3), (2.4)代入式(2.1), 并且考虑到下列关系式成立:

$$\delta y = \frac{\partial}{\partial t} \delta y, \quad \delta y' = \frac{\partial}{\partial x} \delta y, \quad \delta y'' = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta y$$

得到

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ m \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} (\delta y) + \rho \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} (\delta y) + \rho \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) + \rho v^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) - EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (\delta y) \right\} dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l C \frac{\partial y}{\partial t} \delta y dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l AP \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta y dx dt = 0 \quad (2.5)$$

交换积分次序, 作分部积分并且考虑到以下关系

$$\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0$$

得到

$$\int_0^l \int_{t_1}^{t_2} \left[ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta y) + C \frac{\partial y}{\partial t} \delta y + AP \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta y - \rho v^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \delta y - \rho \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} (\delta y) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y \right] dt dx = 0 \quad (2.6)$$

又因为上式在任何时刻都成立, 所以只有

$$\int_0^l \left[ EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\delta y) + C \frac{\partial y}{\partial t} \delta y + AP \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta y - \rho v^2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) + \rho \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \delta y - \rho \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} (\delta y) + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y \right] dx = 0 \quad (2.7)$$

根据有限元法

$$\delta y = [N(x)] \delta u(t)$$

式中,  $[N(x)]$  为形状函数矩阵;  $\delta u(t)$  为结点位移向量

将上式代入式(2.4), 并且考虑到下列关系式成立:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} &= [N(x)]\{ \dot{u}(t) \}; \quad n \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = [N(x)]\{ \ddot{u}(t) \}; \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= [N''(x)]\{ u(t) \}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = [N'(x)]\{ \dot{u}(t) \}; \\ \frac{\partial}{\partial x}(\delta v) &= [N'(x)]\{ u(t) \}; \end{aligned}$$

得到单元运动方程

$$[M^e]\{\ddot{u}\} + ([C_b^e] + [C_a^e])\{\dot{u}\} + ([K_b^e] + [K_a^e])\{u\} = \{f^e\} \quad (2.8)$$

式中,  $[M^e] = \int_0^l m[N]^T[N] dx$  为单元质量矩阵;  $[C_b^e] = \int_0^l C[N]^T[N] dx$  为单元阻尼矩阵;  $[K_b^e] = \int_0^l EI[N'']^T[N''] dx$  为单元刚度矩阵;  $\{f^e\} = [N]^T\{f(t)\}$  为单元结点力向量;  $[C_a^e] = \int_0^l \rho_v([N']^T[N] - [N]^T[N']) dx$  为单元固液耦合阻尼矩阵;  $[K_a^e] = (AP - \rho^2) \int_0^l [N']^T[N'] dx$  为单元固液耦合刚度矩阵;  $[M^e], [C_b^e]$  和  $[K_b^e]$  可以在有限元教材中找到。

而

$$[C_a^e] = 2\rho_v \begin{bmatrix} 0 & -\frac{l}{10} & -\frac{1}{2} & \frac{l}{10} \\ \frac{l}{10} & 0 & \frac{l}{10} & \frac{l}{60} \\ \frac{1}{2} & -\frac{l}{10} & 0 & -\frac{l}{10} \\ -\frac{l}{10} & -\frac{l}{60} & \frac{l}{10} & 0 \end{bmatrix}; [K_a^e] = \partial(AP - \rho^2) \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & \frac{11}{10} & -\frac{6}{5l} & \frac{l}{10} \\ \frac{11}{10} & -\frac{2l}{15} & \frac{l}{10} & -\frac{l}{30} \\ -\frac{6}{5l} & \frac{l}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{11}{10} \\ \frac{l}{10} & -\frac{l}{30} & -\frac{11}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix}$$

可见,  $[C_b^e]$  是一个反对称矩阵, 而  $[K_b^e]$  是一个对称矩阵。

将单元运动方程叠加可以得到管道振动方程:

$$[M]\{\ddot{x}\} + ([C_b] + [C_a])\{\dot{x}\} + ([K_b] + [K_a])\{x\} = \{f(t)\} \quad (2.9)$$

式中,  $[M]$  为管道质量矩阵;  $[C_b]$  为管道阻尼矩阵;  $[K_b]$  为管道刚度矩阵;  $[C_a]$  为管道固液耦合阻尼矩阵;  $[K_a]$  为管道固液耦合刚度矩阵。

### § 3. 算 例

取图 1 所示铰支—铰支输水的硬铝管道为研究对象。管道长度  $L = 2.0\text{m}$ ; 外径  $d = 0.1\text{m}$ , 壁厚  $t = 0.002\text{m}$ ; 硬铝的密度  $\rho_1 = 2.8 \times 10^3\text{kg/m}^3$ ; 水的密度  $\rho_2 = 1.0 \times 10^3\text{kg/m}^3$ ; 硬铝的弹性模量为  $E = 6.86 \times 10^{10}\text{Pa}$ , 考虑水为不可压流体:

#### 1. 流体压强变化对管道固有频率的影响

图 2 给出了当流速不变时, 铰支—铰支输水管道的固有频率—压强曲线 ( $P = 0.0 \sim 200000\text{Pa}$ )。曲线表明: 当流速不变时, 流体压强变化对管道固有频率的影响很小, 可以忽略不计。

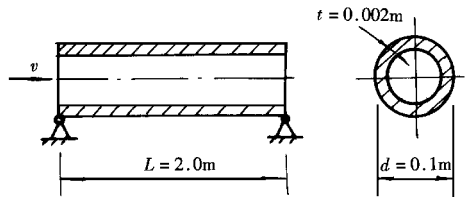


图 1 包含流动流体的铰支管道

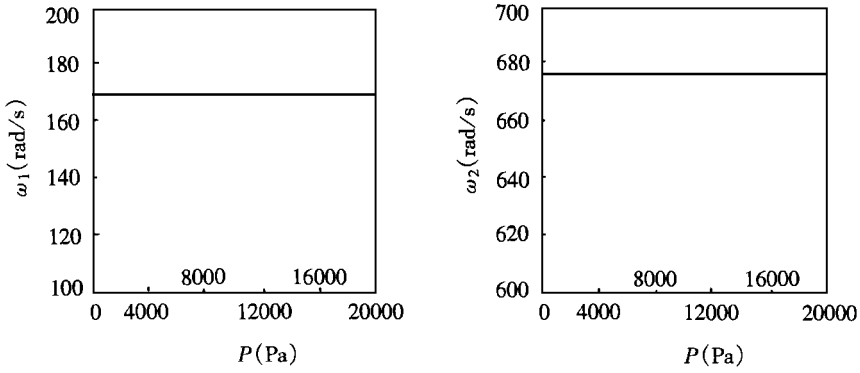


图2 铰支管道固有频率—压强曲线

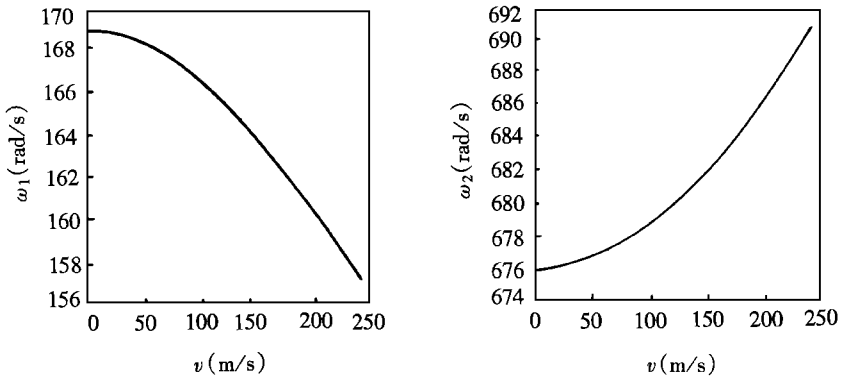


图3 固—液耦合阻尼对管道固有频率的影响

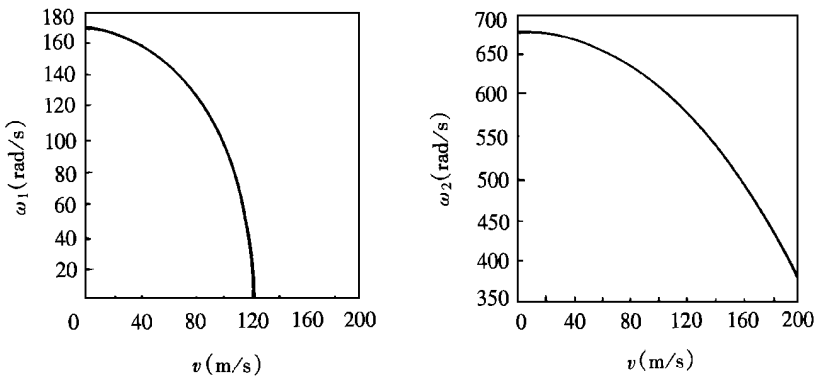


图4 固—液耦合刚度对管道固有频率的影响

### 2 固—液耦合阻尼对管道固有频率的影响

图3给出当不计入固—液耦合刚度,而只计入固—液耦合阻尼时,管道的前两阶固有频率—流速变化曲线。曲线表明,管道的第1阶固有频率随流速升高而降低而第2阶固有频率却随流速升高而升高。这说明固—液耦合阻尼对管道固有频率的影响是复杂的。

### 3 固—液耦合刚度对管道固有频率的影响

图 4 给出不计固—液耦合阻尼, 只计固—液耦合刚度时, 管道的前 2 阶固有频率—流速变化曲线。曲线表明: 管道的前 2 阶固有频率随流速升高而降低。这是因为流速升高使固—液耦合刚度降低(见  $[K_c]$  表达式), 使系统的总刚度  $[K]$  降低, 所以管道的固有频率随流速升高而降低。

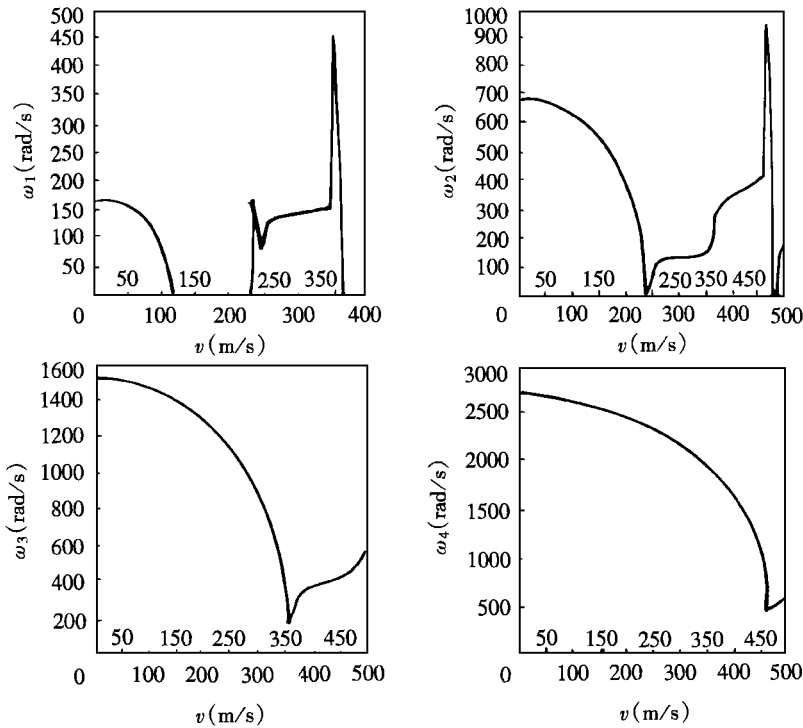
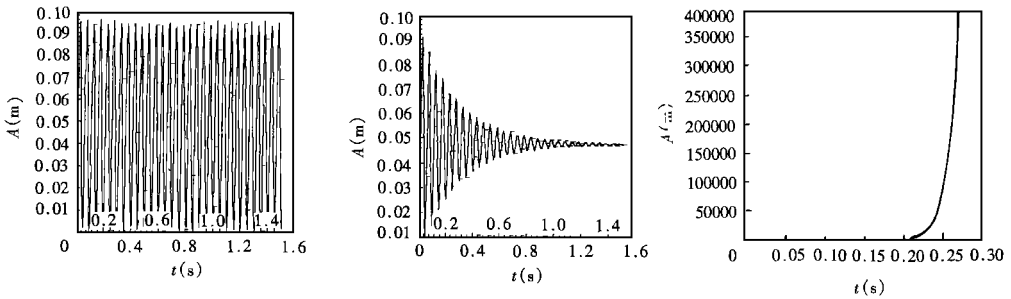


图 5 包含流动流体的铰支管道前四阶固有频率—流速变化曲线



(a) 流速小于临界速度时, 管道自由端的位移响应(无阻尼)      (b) 流速小于临界速度时, 管道自由端的位移响应(有阻尼)      (c) 流速等于或大于临界速度的响应曲线

图 6 流体速度不同时悬伸管道的自由端位移响应曲线

#### 4 同时计入固—液耦合刚度和固—液耦合阻尼对管道固有频率的影响

图5给出同时计入固—液耦合刚度和固—液耦合阻尼时, 较支—较支直管道的前4阶固有频率—流速变化曲线。

曲线表明: 当流速从零开始升高时, 管道的各阶固有频率都随流速升高而降低。第1阶和第2阶固有频率可以降低到零; 第3阶和第4阶固有频率不能降低到零。有趣的是: 如果流速再提高, 则各阶固有频率能再提高, 再降低反复出现。

#### 5 考虑固—液耦合作用时管道对阶跃载荷的响应

图6给出承受阶跃载荷作用的悬伸管道位移响应曲线。

图6(a)是无阻尼, 流体速度小于临界速度时, 管道的自由端位移响应曲线。曲线表明固—液耦合阻尼不起阻尼作用, 只是具有阻尼的量纲, 因此管道的自由端位移响应曲线是等幅振荡曲线。图6(b)是有阻尼, 流体速度小于临界速度时, 管道的自由端位移响应曲线。曲线是衰减的, 收敛的。图6(c)是有阻尼, 流体速度等于或大于临界速度时, 管道的自由端位移响应曲线。曲线是发散的。即使阶跃载荷再小, 管道的自由端位移响应也迅速增长到无穷大。说明管道丧失了承载能力。

### § 4. 结 论

1. 本文根据Hamilton原理推导的管道固—液耦合振动方程就是用有限元法表示的豪斯纳方程(Housner's equation)。该方程中的固—液耦合阻尼项 $[C_a^c]$ 是反对称的; 固—液耦合刚度项 $[K_a^c]$ 是对称的。

2. 流体压强 $P$ 提高, 管道固有频率 $\omega$ 变化很小, 可以忽略不计。

3. 流体速度 $v$ 提高, 固—液耦合刚度 $[K_a^c]$ 降低(见表达式 $[K_a^c]$ ), 管道的总刚度 $[K]$ 降低, 因此管道的固有频率 $\omega$ 降低。

4. 固—液耦合阻尼 $[C_a^c]$ 是一种回转力。它改变系统的位形, 但不作功。虽然具有阻尼的量纲, 却不起阻尼作用。因此在不计入流体阻尼和结构阻尼情况下, 管道自由端位移响应曲线是等幅振荡曲线。固—液耦合阻尼 $[C_a^c]$ 对管道固有频率 $\omega$ 的影响比较复杂。

5. 当流体速度 $v \geq$ 临界速度 $V_c$ 时, 即使阶跃载荷 $f(t)$ 再小, 管道自由端的位移响应也迅速增长到无穷大。说明管道丧失了承载能力。

6. 当流速从零开始逐渐提高时, 各阶固有频率都随流速提高而降低; 若流速再提高, 则各阶固有频率能再提高, 再降低反复出现。

### 参 考 文 献

- 1 G. W. Housner, Bending vibration of a pipe line containing flowing fluid, J. Appl. Mech., **19**(6) (1952), 205—208
- 2 V. Y. Feodosiev, The vibration and stability of pipe conveying fluid, Handbook of Engineers, **10**(3) (1951). (in Russian)
- 3 R. H. Long, Experimental and theoretical study of Transverse vibration of a tube containing flowing fluid, J. Appl. Mech., **22**(6) (1955), 65—68.
- 4 R. W. Gregory and M. P. Paidoussis, Unstable oscillation of Tubular cantilevers conveying fluid—I Theory, Proc., Roy. Soc., London, Ser. **A293**(5) (1966), 512—527.
- 5 T. B. Benjamin, Dynamics of system of articulated pipes conveying fluid—II Experiments, Proc.

- Roy. Soc., London, Ser. A **261**(5) (1961), 457—499
- 6 J. L. Hill and C. P. Swanson, Effects of lumped masses on the stability of fluid conveying tubes, J. Appl. Mech., **37**(4) (1970), 494—497
- 7 A. K. Bajaj, Hopf bifurcation phenomena in pipes carrying fluid, J. Appl. Mech., **47**(5) (1980), 213—230.
- 8 D. M. Tang and E. H. Dowell, Chaotic oscillations of a cantilevered pipe conveying fluid, J. Fluids and Structures, **2**(3) (1988), 263—283
- 9 M. P. Paidoussis, G. X. Li and R. H. Rand, Chaotic motion of a constrained pipe conveying fluid comparison between simulation, analysis and experiment, J. Appl. Mech., **58**(4) (1991), 559—566.
- 10 张悉德、杜涛等, 输送流体管道 Housner 方程的修正, 应用数学和力学, **14**(2) (1993), 147—149
- 11 王本利、王世忠等, 用有限元法分析导管固液耦合振动, 哈尔滨工业大学学报, **16**(2) (1984), 8—14.
- 12 王世忠、王茹, 三维管道固液耦合振动分析, 哈尔滨工业大学学报, **24**(4) (1992), 43—49
- 13 G. X. Li and M. P. Paidoussis, Stability double degeneracy and chaos in cantilevered pipes conveying fluid, International Journal of Nonlinear Mechanics, **29**(1) (1994), 83—99

## Research on Solid-Liquid Coupling Dynamics of Pipe Conveying Fluid

Wang Shizhong Liu Yulan Huang Wenhui

(Astronautics College Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, P. R. China)

### Abstract

On the basis of Hamilton principle, the equation of solid-liquid coupling vibration of pipe conveying fluid is deduced. An asymmetrical solid-liquid coupling damp matrix and a symmetrical solid-liquid coupling stiffness matrix are obtained. Using QR method, pipe's nature frequencies are calculated. The curves of the first four orders of natural frequency-flow velocity of pipe are given. The influence of flowing velocity, pressure, solid-liquid coupling damp and solid-liquid coupling stiffness on natural frequency are discussed respectively. The dynamic response of the pipes for step-load with different flow velocity are calculated by Newmark method. It is found that, with the flow velocity increased, the nature frequency of the pipes reduced, increased, reduced again and so on.

**Key words** finite element method, pipe conveying fluid, solid-liquid coupling vibration