应用数学和力学, 第 19 卷 第 11 期(1998 年 11 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

模糊逼近集与模糊逼近泛函映射

曹　纯

(陈明伦推荐, 1997 年 10 月 6 日收到)

摘　要

本文通过对模糊逼近集与模糊逼近泛函映射的建立和研究, 为时间序列预测工作开辟新的途径, 建立新的方法

关键词　模糊逼近集　模糊泛函微分方程　时间序列预测

中图分类号　O159

1　几个需要研究的问题

1 1　由系统以前的状态变化预测系统以后的状态变化时, 由于系统以前的状态变化所处的环境条件与以后状态变化的环境条件存在差异, 因此, 预测往往不是描述以前状态变化的时序曲线的简单的趋势外推, 而更一般的应是由描述系统以前状态的时间函数到以后状态的时间函数的泛函映射　在时间序列预测中, 描述系统以前状态变化的时序曲线需拟合得到而具有一定的模糊性, 从而预测的这种泛函映射是模糊集合间的泛函映射　所以从模糊集合间的泛函映射入手来研究预测方法问题, 更具有一般性和广泛性, 并有可能为更多较为困难的预测问题找到有效的解决方法　而且, 由于预测是模糊泛函映射关系的形式, 显然也将使得对时间序列的分段拟合预测成为可能

1 2　很多预测问题, 很难找到某初等函数曲线来拟合时间序列　如果用相近的曲线来拟合时间序列, 则由于误差较大而无意际意义　但如果预测方法能根据近似曲线拟合造成的误差对预测的误差作有效的估计, 则使预测工作可在一个很宽的模型类中选择而同样实现预测的有效性

1 3　当时间序列的泛函映射关系较为复杂时, 希望能用较简单的泛函映射来代替它进行预测, 并能根据这种代替造成的误差对预测误差进行估计, 使预测工作变得较为简便

本文通过对模糊逼近、模糊逼近泛函映射理论的建立和研究来解决以上问题, 并通过实际的预测例子来证实这一预测理论和方法的实用性

2　模糊逼近集与模糊泛函映射

定义 1　$U = C[a, b], x(t)$　U　称模糊集 A 为 U 上 $x(t)$ 的模糊逼近子集, 是指对

西北民族学院数学系, 兰州 730030

$x(t)\quad U$, 其对 A 的隶属函数为:

$$_A(x(t)) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\quad x(t)-x(t)} & (当\quad x(t)-x(t)\quad) \\ 0 & (当\quad x(t)-x(t)\quad >\quad) \end{cases} \tag{2 1}$$

其中, $=$ const 记或 $A = \{x(t), \ _A(x(t)) \mid x(t)\quad U$ 称 $x(t)$ 为 $x(t)$ 的模糊逼近函数

性质 1 $x(t)\quad A$, $_A(x(t)) = 1$

性质 2 有无穷多个函数 $x_n(t)\quad U$, 在 A 中的隶属度为 $_A(x_n(t)) > 0(n = 1, 2, \quad)$

性质 3 若 $x_1(t)\quad U$, $x_2(t)\quad U$ 且 $x(t)-x_1(t)\qquad x(t)-x_2(t)$, 则 $_A(x_1(t))\quad _A(x_2(t))$

为估计相对误差, 对逼近程度做进一步限制 于是有:

定义 2 记 $\mathscr{F}(U)$ 为 U 上全体模糊逼近子集构成的类 $A\quad \mathscr{F}(U)$, $\quad[0, 1]$ 对 A 的 _截集

$$A\quad = \{x(t)\quad U \mid \ _A(x(t))$$

当 $\dfrac{1}{1+\quad x(t)}(0\qquad <\quad)$, 称 A 为 $x(t)$ 的容限为 的模糊近集, 记为 $A_{-}(x(t))$

性质 1 $\quad x(t)$

性质 2 当 $x(t)\quad = 0$ 时, $A_{-}\quad = \{0\}$

定义 3 $x(t), x(t)\quad U$, $\{x_n(t)\} = \{x_n(t) \mid x_n(t)\quad U, n\quad N\}$, 若对任意 $t_1\ [a, b]$, $\quad > 0$, $\quad N > 0$, 使当 $n\quad N$ 时, 有

$$\mid \ _A(x(t_1)) - \ _A(x(t_1)) \mid <$$

恒成立, 则称 $\{x_n(t)\}$ 模糊一致收敛于 $x(t)$, 记为: $\qquad=$

$$\lim_n A(x_n(t)) = A(x(t))$$

并称 $\{x_n(t)$ 为模糊收敛序列

定理 1 $\{x_n(t) = \{x_n(t)\quad U \mid n\quad N$, $x(t)\quad U$, $x(t)\quad U$

(1) 若 $\lim_n(x(t)) = \mid x(t) \mid$, 则 $\lim_n A(x_n(t)) = A(x(t))$, 且由变换:

$$x(t) - x_n(t) = g_n(t) - x(t) \qquad (n = 1, 2, \quad) \tag{2 2}$$

生成的序列 $\{g_n(t)$, 也有 $\lim_n(A(g_n(t))) = A(x(t))$

(2) 若 $\lim_n A(x_n(t)) = A(x(t))$, 则 U 中存在序列 $\{g_n(t)$ 有 $\lim_n g_n(t) = x(t)$

证明 (1) $\quad > 0$, $\quad N > 0$, 当 $n\quad N$ 时, 有

$$x_n(t) - x(t)\quad <$$

则

$$\mid \ _A(x(t)) - \ _A(x_n(t)) \mid = \frac{\mid \quad x(t)-x(t)\quad - \quad x(t)-x_n(t)\quad \mid}{(1+\quad x(t)-x_n(t)\quad)(1+\quad x(t)-x(t)\quad)}$$

$$\frac{x(t)-x(t)}{(1+\quad x(t)-x_n(t)\quad)(1+\quad x(t)-x(t)\quad)} < \tag{2 3}$$

$$\lim_n A(x_n(t)) = A(x(t))$$

由变换(2 2), 有 $g_n(t) = 2x(t) - x_n(t)(n = 1, 2, \quad)$, 于是,

$$x(t) - g_n(t)\quad = \quad x(t) - (2x(t) - x_n(t))\quad = \quad x_n(t) - x(t) \quad (n = 1, 2, \quad)$$

$$|\ _A(g_n(t)) - \ _A(x_n(t))| = \frac{|\ x(t)-x(t)\ -\ x(t)-g_n(t)\ |}{(1+\ x(t)-g_n(t)\ )(1+\ x(t)-x(t)\ )}$$
$$= \frac{|\ x(t)-x(t)\ -\ x_n(t)-x(t)\ |}{(1+\ x_n(t)-x(t)\ )\ (1+\ x(t)-x(t)\ )} <$$

结论(1)成立

(2) 若 $x(t) > x(t), x(t) > x_n(t)$ 或 $x(t) > x(t), x_n(t) > x(t)$, 对任 t_i $[a, b]$ 有

$$|\ _A(x_n(t_i)) - \ _A(x(t_i))| = \frac{|(x(t_i)-x(t_i)-(x(t_i)-x_n(t_i))|}{(1+\ x(t_i)-x(t_i)\ )(1+x(t_i)-x(t_i)\ )}$$
$$= \frac{|x_n(t_i)-x(t_i)|}{(1+\ x(t_i)-x_n(t_i)\ )(1+\ x(t_i)-x(t_i)\ )} <$$

由于 t_i 任意, $x_n(t)-x(t) <$, 这时 $g_n(t) = x_n(t)$

当 $x(t) > x(t) > x_n(t)$ 或 $x_n(t) > x(t) > x(t)$ 时, 则 $g_n(t) > x(t)$ 或 $g_n(t) < x(t)$, 和上面同样的证明, 也有 $g_n(t)-x(t) <$

结论(2)成立　证毕

推论 1　若 $\{x_n(t)\}$ 一致收敛于 $x(t)$ 则

$$\lim_n A(x_n(t)) = A(x(t))$$

定义 4　$x(t)$ U, $\{x_n(t)$ 是论域 U 中的任一对 $x(t)$ 的模糊逼近的模糊一致收敛子序列, 则称模糊逼近集 A 为模糊逼近紧集

由最佳逼近存在定理及前面定理 1 的证明, 以及:

$$|\ _A(x(t)) - \ _A(x_n(t))| < \ x(t)-x_n(t)\ < \tag{2 4}$$

则有:

定理 2　论域 U 的紧子集中存在 $x(t)$ 的模糊逼近紧集

推论 2　$x(t)$ U, $x(t)$ 的容限为 的模糊逼近集若为模糊逼近紧集的 _截集, 则为紧集

定义 5　设 A 为 U 上的 $x(t)$ 的模糊逼近子集, 若 A 满足完备性公理, 即若序列 $\{\ _A(x_n(t))\}$ 具有柯西性质: $\lim_n\ \ _A(x_n(t)) - 1\ _A(x_m(t))\ = 0$ 则存在 $x(t)$, 使 $\lim_n\ \ _A(x_n(t)) - \ _A(x(t))\ = 0$, 则称 A 为模糊 Banach 空间

由(2 4)式及逼近论的 Dimi 定理, 可知:

定理 3　U 的紧子集上的 $x(t)$ 的模糊逼近子集 A 为模糊 Banach 空间

下面, 我们将使用模糊泛函微分方程来实现模糊泛函映射

设 $C([a, b], A^n)$ 表示将区间 $[a, b]$ 映射入 $x(t)$ 的模糊逼近集 A^n 的连续函数所组成的, 并具有一致收敛拓朴的模糊 Banach 空间　将空间 $C([-r, 0], A^n)$ 简记为 C, 则

定义 6　设 D R $C, f: D$ R, 为给定的函数, 则

$$x(t) = f(t, x_t) \tag{2 5}$$

称为模糊时滞泛函微分方程, 简记为 FRFDE, 其中 $x(t)$ 表示 $x(t)$ 对 t 的右导数

FRFDE(2 5) 将其初值函数 $(t-r)$(以后用 $x(t-r)$ 简单表示) 及其模糊逼近函数 $x(t-r)$ 映射成 $x(t)$ 及其模糊逼近函数 $x(t)$ 于是有:

定理 4　设 R C, 函数 f: R 为连续, $f(t,)$ 在 的每一个模糊紧子集上对

满足 Lipschitz 条件, Lipschitz 常数 N $x(t)$ 与 $x(t)$ 分别是从 $(t_0, (t))$ 和 $(t_0, (t))$ 为初值条件的 FRFDE(2 5) 的解, 对任意 > 0, t $[t_0 - r, t_0]$, $(t) - (t) <$, 即

$$_A(x(t - r)) > \frac{1}{1+}, \text{则}$$

$$x(t) - x(t) \quad Nr \tag{2 6}$$

$$_A(x(t)) \quad \frac{1}{1 + Nr} \tag{2 7}$$

证明 对 t $[t_0, t_0 +]$,

$$| x(t) - x(t) | \quad \int_{t_0}^{t} f(s, x_s) - f(s, x_s) | \, ds$$

$$N \int_{t_0}^{t} x_s - x_s \, ds \quad N \sup_{t_0 \ s \ t_0 +} x_s - x_s$$

即

$$\sup_{t_0 \ s \ t_0 +} | x(t) - x(t) | \quad N \sup_{t_0 \ s \ t_0 +} x_s - x_s \tag{2 8}$$

若 FRFDE(2 5) 的 x_t 中不包含 $x(t)$, 则

$$x_s - x_s = (s - r) - (s - r) = x(s - r) - U(s - r) +$$

故由(218)式知(216)式成立, 从而(217)式成立#

若 FRFDE(215) 的 x_t 中包含 $x(t)$, 若 $NA < 1$, 便有

$$\sup_{t_0 [s [t_0 + A} | x(t) - x(t) | [\sup_{t_0 [s [t_0 + A} + x_s - x_s + \tag{219}$$

若

$$\sup_{t_0 [s [t_0 + A} + x_s - x_s + = \sup_{t_0 [s [t_0 + A} | x(s) - x(s) | \tag{2110}$$

(2110) 式代入(219) 式矛盾# 故必有

$$+ x_s - x_s + < + U(t - r) - U(t - r) + = + x(t - r) - x(t - r) + \tag{2111}$$

于是定理(216)、(217)式显然成立#

若 $NA \setminus 1$, 可选取 $R < A_1 < A$ 使 $NA_1 < 1$, 这时(2111) 式成立# 再以 $t_0 + A_1$ 为起点, 重复以上证明, 则存在 $t_0 - r [t [t_0 + 2A_1$ 上(2111) 式成立# 于是定理中(216)、(217) 式均成立#

显然有如下推论:

推论 3 满足定理 4 条件的 FRFDE(215) 将 $x(t - r)$ 的模糊逼近集映射成 $x(t)$ 的模糊逼近集; 将 $x(t - r)$ 的模糊逼近紧集映射成 $x(t)$ 的模糊逼近紧集#

由于预测中往往是增长率之间存在某种关系, 因此, 本文只讨论能反映变化率之间的关系的一类中立型模糊泛函微分方程的映射#

定义 7 定义在模糊集 D 上的

$$\hat{x}(t) = kx(t - r) \tag{2112}$$

(其中, k, r = const, 函数的微商为普通的微商) 称为模糊中立型泛函微分方程# 简记为 FNFDE(2112)# 显然, 初值函数由 $\hat{x}(t - r) = U(t - r)$ 确定#

由于

$$| x(t) - x(t) [k \int_{t_0}^{t} | x(s - r) - \overset{H}{x}(s - r) | \, ds [kr \sup_{t_0 [t [t_0 + A} + x(s - r)$$

$$-\overset{H}{x}(s-r)+=kr\sup_{t_0\leq t\leq t_0+A}+U(s-r)-U(s-r)+ \quad (2113)$$

于是有:

定理 5 在 c 的模糊紧子集 8 上, $x(t)$ 与 $x(t)$ 分别是以$(t_0, U(t))$ I 8 和$(t_0, U(t))$ I 8 为初值的 FNFDE(2112) 的解# 对任意 E > 0, t I $[t_0-r, t_0]$, + $U(t)-U(t)$ + < E 即 $L_A(x(t-r))>\frac{1}{1+E}$ 则

$$+x(t)-x(t)+<krE \quad (2114)$$

$$L_A(x(t))>\frac{1}{1+krE} \quad (2115)$$

显然又有:

推论 4 由 FNFDE(2112), 将 $x(t-r)$ 的模糊逼近集映射成 $x(t)$ 的模糊逼近集; 将收敛于 $x(t-r)$ 的模糊收敛序列映射成收敛于 $x(t)$ 的模糊收敛序列; 将 $x(t-r)$ 的模糊逼近紧集映射成 $x(t)$ 的模糊逼近紧集#

31 在预测中的应用及相关定理与方法

很多时间序列{ $x(t)$ 往往难以直接拟合预测, 所以, 通过对时间序列{ $x(t)$ 的离散数据多次求差分, 或求累加和, 或作其它处理(如求比值) 等, 再寻找预测规律是常用的方法# 实际上, 很多时间序列由于实际系统往往具有变化率的周期性变化等规律性变化, 常表现为如下差分方程关系:

$$x(t+1)-x(t)=k[x(t-r+1)-x(t-r)] \quad (311)$$

或者

$$[x(t+1)-x(t)]/x(t)=k[x(t-r+1)-x(t-r)]/x(t-r) \quad (312)$$

其中 k= const#

显然, (311)、(312) 式揭示了时序函数具有以常数 r 为周期、数值扩大 k 倍的保持原性状的变化规律# 因此, 时间序列相应地也可用如下泛函微分方程来描述:

$$x(t)=kx(t-r) \quad (313)$$

和

$$\hat{x}(t)/x(t)=kx(t-r)/x(t-r) \quad (314)$$

这样, 拟合{ $x(t)$ 的已知数据, 得 $x(t-r)$ 或 $\hat{x}(t-r)$ 的模糊逼近初值函数 $x(t-r)$ 或 $\overset{H}{x}(t-r)$, 通过(313)、(314) 式的模糊泛函映射, 便得到可估计误差的预测值 $x(t)$ 了#

显然(313) 式即(2112) 式满足定理 5, (314) 式由于预测函数在闭区间$[t_0-r, t_0]$ 上连续从而有界, 也满足定理 5, 进行模糊泛函映射预测误差是可以控制和估计的# 但是, (314) 式的预测计算很复杂, 我们希望找到易于计算的方法# 为此, 研究以下 FRFDE(315) 和 FNFDE(316) 及 FNFDE(314) 的关系:

$$x(t)=k_1x(t-r) \quad (315)$$

$$x(t)/x(t)=x(t-r)/x(t-r) \quad (316)$$

定理 6 若时间序列{ $x(t)$ 由单调增加的正函数 $x(t)$ 所生成, 但只知{ $x(t)$}# 由{ $x(t)$} 建立的数学模型为 FNFDE(314)# 方程(315)、(316) 和(314) 的初值函数均为 U(t), $U(t)$ 的模糊逼近函数均取为 U(t)# 方程(315)、(316) 和(314) 对应于初值函数 U(t) 和 U(t)

的解和模糊逼近解分别为 $x_i(t)$ 和 $x_i(t)(i = 1, 2, 3)$# $x_i(t) = \overset{H}{l}\, x_i(t)$# 对任意 E> 0, t I $[t_0 - r, t_0]$ 时,

$$+ U(t) - U(t) + < E \tag{317}$$

且 $U(t_0 - r)$ U $U(t_0 - r)$, $x_i(t_0) = x_i(t_0)(i = 1, 2, 3)$# 方程(315) 的系数 k_1 可调节取值, 则由 FRFDE(315), 通过对系数 k_1 的调节: (1) 可将 $x(t - r)$ 的模糊逼近函数 $x(t - r)$ 映射为 FNFDE(315) 的解 $x_2(t)$ 的模糊逼近解 $x_2(t)$; 将 $x(t - r)$ 的容限为 $R_{x(t-r)} = E/ + x(t - r) +$ 的模糊逼近集映射为 FNFDE(316) 的解 $x_2(t)$ 的容限为 $R_{x_2(t)} = E/ + x_2(t) +$ 的模糊逼近集#

(2) 可将 $x(t - r)$ 的模糊逼近函数 $x(t - r)$ 映射为FNFDE(314) 的解 $x_3(t)$ 的模糊逼近解 $x_3(t)$; 将 $x(t - r)$ 的容限为 $R_{x(t-r)} = E/ + x(t - r) +$ 的模糊逼近集映射为 FNFDE(314) 的解 $x_3(t)$ 的容限为 $R_{x_3(t)} = E/ + x_3(t) +$ 的模糊逼近集#

(3) 设 $N(t) = \dfrac{x_3(t_0)x(t - r)}{[x(t_0 - r)]^k x_3(t)}\Big\{[x(t - r)]^{k-1} + [x(t - r)]^{k-2}x(t - r) + , + x(t - r)[x(t - r)]^{k-2} + [x(t - r)]^{k-1}\Big\}$, 则 $N(t)$ S 1#

注　定理 6 讨论的是模糊逼近问题, 且又是为难免有误差的预测工作所用, 所以下面的证明中, 为节约篇幅和简化证明, 有些非常近似地相等的地方, 在不影响正确性的前提下, 就按相等处理# 这在模糊性的原则下, 应该是允许的#

证明　(1) 显然 FRFDE(315) 满足定理 4, FNFDE(316)、(314) 由于 $x(t)$、$x(t - r)$ 在 t I $[t_0, t_0 + r]$ 上连续, 从而有界, 所以满足定理 5# 所以它们均有误差可控的模糊逼近解# 即当 $x(t_0) = U(t_0)$ 时, 有

$$+ x_1(t) - x_1(t) + [\ k_1 A + x(t - r) - x(t - r) + [\ k_1 A E \tag{318}$$

$$+ x_2(t) - x_2(t) + [\ k_2 A + x(t - r) - x(t - r) + [\ k_2 A E \tag{319}$$

$$+ x_3(t) - x_3(t) + [\ k_3 A + x(t - r) - x(t - r) + [\ k_3 A E \tag{3110}$$

(为简便起见, 直接将初值函数描述为 $x(t - r)$, $x(t - r)$)#

对(318) 式, 当 k_1 可变动时, 则适当选取 k_1 显然可得到:

$$\frac{+ x_1(t) - x_1(t) +}{+ x_1(t) +} = \frac{+ x(t - r) - x(t - r) +}{+ x(t - r) +} \tag{3111}$$

由于 $x(t - r)$ 为单调增加正函数, 显然经(315)、(316)、(314) 映射后, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ 也为单调增加正函数# 所以, $x_i(t) - x_i(t)$ 与 $x(t - r) - x(t - r)$ 保持同号# 又满足如下关系

$$\frac{x(t) - x(t)}{x(t)} = \frac{x(t - r) - x(t - r)}{x(t - r)} \tag{3112}$$

的正函数 $x(t)$ 和 $x(t)$ 也满足(3111) 式, 且 $x(t) - x(t)$ 与 $x(t - r) - x(t - r)$ 同号#

显然, 若 $x(t) = l_1 x_1(t)$, $x(t) = l_1 x_1(t)$, 则同样满足(3112) 式, 从而也满足(3111) 式#

由 FNFDE(316) 有: $x_2(t) = x_2(t_0)x(t - r)/x(t_0 - r) = l_2 x(t - r)$

但已知 $x_1(t) = \overset{H}{l}\, x_1(t) = l k_1 x(t - r)$, 所以:

$$x_2(t) = l_3 x_1(t) = l_2 x(t - r) \tag{3113}$$

将 $x_2(t)$ 代入(3112), 这时(3112) 式变为:

$$\frac{x(t) - x_2(t)}{x(t)} = \frac{x(t - r) - x(t - r)}{x(t - r)} \tag{3114}$$

由(3114) 式有:

$$\frac{x(t)\,\#\,x(t - r)}{x(t - r)\,\#\,x_2(t)} = 1 \tag{3115}$$

对(3114) 式求导, 并注意到(3115) 式成立, 且 $x(t_0) = x_2(t_0)$, $x(t_0 - r) = x(t_0 - r)$, 便可得:

$$\frac{x(t)}{x(t)} = \frac{\overset{H}{x_2(t)}}{x_2(t)} = \frac{x(t-r)}{x(t-r)} - \frac{\overset{H}{x(t-r)}}{x(t-r)} \tag{3116}$$

所以 $x(t)$ 也是 FNFDE(316) 的解, 且由(3115) 及(3113) 式知

$$x(t) = l_3 x(t-r) \tag{3117}$$

结论(1) 获证#

(2) 解 FNFDE(314), 则

$$x_3(t) = x_3(t_0)\left[\frac{x(t-r)}{x(t_0-r)}\right]^k \quad \text{的容} \tag{3118}$$

$$x_3(t) = x_3(t_0)\left[\frac{x(t-r)}{x(t_0-r)}\right(^k \quad / \quad \mathrm{x} \tag{3119}$$

由于 $x(t-r)$ 是在 $t\ I\ [t_0, t_0+r]$ 上连续的正函数, 故在 $t_0 - r\ [\ t-r\ [\ t_0 + A - r$ 存在 $0 < m < M$, 有 $m\ [\ x(t-r)\ [\ M$, 所以:

$$\frac{m^{k-1}x_3(t_0)}{x(t_0-r)}x(t-r)\ [\ x_3(t)\ [\ \frac{M^{k-1}x_3(t_0)}{x(t_0-r)}x(t-r) \tag{3120}$$

在 $t\ I\ [t_0, t_0+r]$ 的 A 较小时, $m\ U\ M$, 故有:

$$x_3(t) = l_4 x(t-r) \tag{3121}$$

再由 $t\ I\ [t_0+A, t_0+2A]$ 重复以上证明, 而由分步法求解FNFDE(314)# 反复这样证明, 就可得到对 $t\ I\ [t_0, t_0+r]$, 有(3121) 式成立#

同理, 有

$$x_3(t) = l_4 x(t-r) \tag{3122}$$

由于只讨论 $x_3(t)$ 的模糊逼近 $x_3(t)$, 并由已知的(3110) 式知, 应有

$$x_3(t) = l_4 x(t-r) \tag{3123}$$

比较(3121) 与 $x_1(t) = lk_1 x(t-r)$, 知:

$$x_3(t) = l_5 x_1(t), \ (l_5 = l_4 / lk_1) \tag{3124}$$

将(3121) 式, (3122) 式代入(3112) 式, 知等式成立, 以 $x_3(t)$、$x_3(t)$ 代替 $x_1(t)$、$x_1(t)$, (3111) 式也成立#

结论(2) 获证#

(3) 由(3118) 、(3119) 式及 $x_3(t_0) = x_3(t_0)$, $x(t_0-r) = x(t_0-r)$, 有:

$$\begin{aligned} x_3(t) - x_3(t) &= \frac{x_3(t_0)}{[x(t_0-r)]^k}\{[x(t-r)]^k - [x(t-r)]^k \\ &= \frac{x_3(t_0)}{[x(t_0-r)]^k}\{[x(t-r)]^{k-1} + \ , \\ &\quad + [x(t-r)]^{k-1}\}[x(t-r) - x(t-r)] \\ &= M(t)[x(t-r) - x(t-r)] \end{aligned}$$

于

其中, $M(t) = \dfrac{x_3(t_0)}{[x(t_0-r)]^k}\{[x(t-r)]^{k-1} + \ , + [x(t-r)]^{k-1}$ #

$$- \frac{x_3(t) - x_3(t)}{x_3(t)} = M(t)\frac{x(t-r)}{x_3(t)} \# \frac{x(t-r) - x(t-r)}{x(t-r)}$$

记 $N(t) = M(t)\dfrac{x(t-r)}{x_3(t)}$ #

$$\frac{x_3(t) - x_3(t)}{x_3(t)} = N(t)\frac{x(t-r) - x(t-r)}{x(t-r)} \qquad (3125)$$

又由证明(2)得知, $x_3(t)$, $x_3(t)$ 满足(3112)式, 即

$$\frac{x_3(t) - x_3(t)}{x_3(t)} = \frac{x(t-r) - x(t-r)}{x(t-r)} \qquad (3126)$$

比较(3125)、(3126)式知, $N(t)$ S 1# 结论(3)成立#

注: 证明中 l、l_i = const $(i = 1, 2, , , 5)$#

例 1 1979 年至 1989 年全国电视机产量序列如表 1, 对其预测# (为节约篇幅, 将后面的预测结果及预测相对误差一并列表中, 例 2 同)#

表 1 全国电视机产量预测表 (单位: 万台)

序 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
年 份	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
产量 $x(t)$	31 23	61 94	101 07	171 70	18113	281 05	481 77	1321 14	2471 92	51714	5331 74			2634
$y(t)$	11 15	01 45	01 77	01 024	01 55	01 74	11 71	01 88	11 08	01 032				
新序号	− 6	− 5	− 4	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3	4	5	6	7
预 测	31 998	61 033	91 103	131 74	20173	311 28	471 19	1311 72	2571 15	4461 78	7321 70	11641 12	18151 11	27971 41
相对误差	231 8%	131 1%	91 6%	221 4%	141 3%	111 4%	31 24%	01 32%	31 72%	131 65%	321 32%			61 20%

(1) 作变换: $y(t) = [x(t+1) - x(t)]/x(t)$

(2) 找出 $\{y(t)$ 各数据间的关系: $y(7) = 11478y(1)$, $y(8) = 1196y(2)$, $y(9) = 1143y(3)$, $y(10) = 1141y(4)$

于是可得近似关系: $y(t) = 1157y(t-6)$, $t = 7, 8, 9$

即得 $\frac{\hat{x}(t)}{x(t)} = 1157\frac{x(t-7)}{x(t-7)}$ (3127)

根据定理 6, 可用 $\hat{x}(t) = 1157x(t-7)$ 来预测# 拟合已知的负序号及 0 序号的值, 得 $U(tc) = 4711908e^{014114tc}$, $tc = t - 7$, t I $[1, 7]$

以 $U(tc)$ 作初值函数, 解 $\hat{x}(t) = kx(t-7)$, 得

$$x(t) = ke^{014114(t-7)} \qquad (3128)$$

为进一步减少误差, 同时调节积分常数 c 和系数 k, 得:

$$x(t) = 16315215e^{014114(t-7)} - 11510197 \qquad (3129)$$

$

以(3129)式预测原序号 8~ 14 的值即可#

该方法由于理论的正确性, 还可预测出异常情况# 如 1989 年是异常生产年份#

例 2 1973 年至 1987 年某县山羊存栏数如表 2, 对其预测#

表 2 某县山羊存栏数及预测 (单位: 万只)

序 号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
年 份	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
存栏数	191 72	221 96	261 43	271 82	271 68	311 49	301 64	321 71	281 82	311 84
$y(t)$	31 24	31 47	11 39	− 01 14	31 81	− 01 85	21 07	− 31 89	3102	− 101 96
预测										
相对误差										

续表

序 号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
年 份	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
存栏数	201 88	241 50	281 51	291 99	291 78	341 06	32152	341 66	301 10	341 78	191 79
$y(t)$	31 62	31 91	11 58	- 01 21	41 30						
预测		231 64	281 25	291 71	291 92	331 94	32162	341 84	301 21	341 96	191 89
相对误差		31 51%	01 56%	01 93%	01 47%	01 35%	014%	01 5%	01 38%	01 51%	01 51%

(1) 作差分 $y(t) = x(t+1) - x(t)$, 得新序列$\{y(t)\}$ #

(2) 计算 $y(t)$ 各数据关系, 有:

$y(11)$ U $1113y(1)$, $y(12)$ U $1113y(2)$, $y(13)$ U $1113y(3)$, $y(14)$ U $1113y(4)$

(3) 建立 FNFDE 预测模型:

$$x(t) = 1113x(t-10) \qquad (3130)$$

模型满足定理 5#

(4) 因已知数据只能分段拟合, 以二次函数三点一段拟合 $\hat{x}(t-10)$, 并分段预测#

从例 1、例 2 来看, 只能作本文的模糊逼近泛函映射的方法预测, 而且预测效果很好#

参 考 文 献

1 E. W. 切尼(美),5逼近论导引6, 徐献瑜等译, 上海科技出版社, 上海 (1981)#

2 李森林、温立志,5泛函微分方程6, 湖南科学技术出版社, 长沙 (1987)#

3 汪培庄,5模糊集合论及其应用6, 上海科学技术出版社, 上海 (1983)#

Fuzzy Approaching Set and Fuzzy Approaching Functional Mapping

Cao Chun

(Department of Mathematics, Northwesten National Universtiy, Lanzhou 730030, P. R. China)

Abstract

By establishing the concepts of fuzzy approaching set and fuzzy approaching functional mapping and making research on them, a new method for time series prediction is introduced.

Key words fuzzy approaching set, fuzzy approaching functional mapping, time series prediction