应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

Banach 空间中微分包含解的存在性*

宋福民①

(钱伟长推荐，1996 年 12 月 2 日收到，1998 年 4 月 2 日收到修改稿)

摘　　要

本文在无穷维 Banach 空间中讨论微分包含解的存在性，先给出了几个普通微分包含的比较定理，讨论了近似解与解的关系，然后得到了 Banach 空间中微分包含解的存在性定理•

关键词　Banach 空间　微分包含　集值映射　存在性定理

中图分类号　O176, O177

§1. 引　　言

由于经济学、生物学等涉及的宏观系统总有不确定性，其中包括由于认识上的限制所引起的不确定性，从数学上，它们一般不能应用微分方程来描述，而要应用微分包含来描述•

众所周知，微分方程 $x'(t)=f(t,x(t))$ 的解 $x(t)$ 的微分 $x'(t)$ 继承了映射 f 和函数 $x(t)$ 的某些性质；而微分包含的解不再是这样，这也是对微分包含的研究比微分方程更困难的原因之一•

本文设 E 为实无穷维 Banach 空间，考察形如

$$x'(t)\in F(t,x(t)),\ x(t_0)=x_0 \tag{1.1}$$

的微分包含，其中 F 是一集值映射，具凸象•

由于无穷维空间和有限维空间之间的本质区别，从而有限维常微分方程以及有限维微分包含的基本定理 Peano 定理在无穷维空间 E 中不再成立•

文[1] 第二章第一节定理 3 给出了 Hilbert 空间中微分包含(1.1) 的解的存在性定理，但使用了所谓局部紧投影映射，在可分 Banach 空间中不可能具有这种条件，但我们仍得到了微分包含(1.1) 的解的存在性定理•

我们先建立普通微分包含的比较定理•

引理 1　设 $G: R_0\to R^1$ 是集值上半连续有界泛函，具凸紧象，其中 $R_0=\left\{(t,u)\in R^2\mid t_0\leqslant t\leqslant t_0+a,\ |u-u_0|\leqslant b\right\}$，$a>0$，$b>0$，则初值问题

$$u'\in G(t,u(t)),\quad u(t_0)=u_0 \tag{1.2}$$

存在定义在 $[t_0,t_0+T]$ 上的解，其中 $T=\min\left\{a,\dfrac{b}{2M+b}\right\}$，$M=\sup\limits_{(t,u)\in R_0}\mathrm{Im}(G)$，$\mathrm{Im}\,G$

---

* 江西省自然科学基金资助课题[赣科基字(1997)5 号 971104]

① 南昌航空工业学院 64 信箱，南昌 330034

$= \bigcup_{(t,u)\in R_0} G(t,u), 0 < M < +\infty$•

证 令 $0 < \varepsilon \leqslant b/2$, 考察

$$u' \in G(t,u) + \varepsilon, \quad u(t_0) = u_0 + \varepsilon \tag{1.3}$$

据普通微分包含的 Peano 定理[2], 初值问题(1.3)有定义在$[t_0, t_0+T]$上的解 $u(t,\varepsilon)$• 令 $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$, 则

$$u(t_0, \varepsilon_2) < u(t_0, \varepsilon_1) \tag{1.4}$$

$$u'(t, \varepsilon_i) \in G(t, u(t, \varepsilon_i)) + \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, t \in [t_0, t_0+T]) \tag{1.5}$$

因 G 上半连续, 存在逼近选择定理[1]意义下, 逼近 G 的连续单值映射系列g_k, 其值域含在 G 的值域的凸壳中, 且

$$\mathrm{Graph}(g_k) \subset B(\mathrm{Graph}(G), \varepsilon) \quad (\forall \varepsilon > 0) \tag{1.6}$$

设

$$u_k'(t, \varepsilon) = g_k(t, u_k(t, \varepsilon)) + \varepsilon, u_k(t_0, \varepsilon) = u_0 + \varepsilon$$

则

$$u_k'(t, \varepsilon_2) = g_k(t, u_k(t, \varepsilon_2)) + \varepsilon_2, u_k(t_0, \varepsilon_2) = u_0 + \varepsilon_2 \tag{1.7}$$

$$u_k'(t, \varepsilon_1) = g_k(t, u_k(t, \varepsilon_1)) + \varepsilon_1 > g_k(t, u_k(t, \varepsilon_1)) + \varepsilon_2 \tag{1.8}$$

我们证明

$$u_k(t, \varepsilon_2) < u_k(t, \varepsilon_1) \quad (\forall t \in [t_0, t_0+T]) \tag{1.9}$$

事实上, 若(1.9)式不成立, 令

$$Z = \left\{ t \in [t_0, t_0+T] \mid u_k(t, \varepsilon_1) \leqslant u_k(t, \varepsilon_2) \right\}, \text{则 } Z \neq \varnothing$$

令 $t_1 = \inf Z$, 则由(1.4)式知 $t_0 < t_1$, 且

$$u_k(t_1, \varepsilon_2) = u_k(t_1, \varepsilon_1) \tag{1.10}$$

$$u_k(t, \varepsilon_2) < u_k(t, \varepsilon_1) \quad (t \in [t_0, t_1))$$

于是当 $h < 0, t_1 + h > t_0$ 时有

$$\frac{u_k(t_1+h, \varepsilon_2) - u_k(t_1, \varepsilon_2)}{h} > \frac{u_k(t_1+h, \varepsilon_1) - u_k(t_1, \varepsilon_1)}{h}$$

这表明, Dini 导数

$$D_- u_k(t_1, \varepsilon_2) \geqslant D_- u_k(t_1, \varepsilon_1)$$

由(1.7)、(1.8)两式得

$$\begin{aligned} g_k(t_1, u_k(t_1, \varepsilon_2)) + \varepsilon_2 &\geqslant g_k(t_1, u_k(t_1, \varepsilon_1)) + \varepsilon_1 \\ &> g_k(t_1, u_k(t_1, \varepsilon_1)) + \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

此式与(1.10)式矛盾

现取$\{\varepsilon_n\}$, 使 $0 < \cdots < \varepsilon_n < \cdots < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, $\varepsilon_n \to 0$, 则有

$$\cdots < u_k(t, \varepsilon_n) < \cdots < u_k(t, \varepsilon_2) < u_k(t, \varepsilon_1) \quad (\forall t \in [t_0, t_0+T]) \tag{1.12}$$

由于$\{u_k(t, \varepsilon_n)\}$是一致有界的等度连续函数族, 故由(1.12)式知存在 $r_k(t): [t_0, t_0+T] \to R^1$, 使对 $\forall t \in [t_0, t_0+T]$ 一致有

$$\lim_{n\to\infty} u_k(t, \varepsilon_n) = r_k(t)$$

显然 $r_k(t_0) = u_0$, 由 g_k 的一致连续性, 知 $\forall t \in [t_0, t_0+T]$ 一致有

$$\lim_{n\to\infty} g_k(t, u_k(t, \varepsilon_n)) = g_k(t, r_k(t))$$

注意到 $u_k(t, \varepsilon_n)$ 满足

$$u_k(t, \varepsilon_n) = u_0 + \varepsilon_n + \int_{t_0}^{t} g_k(s, u_k(s, \varepsilon_n))\,ds$$

令 $n \to \infty$, 知 $r_k(t)$ 是初值问题

$$u_k' = g_k(t, u_k), \quad u_k(t_0) = u_0$$

的解. 于是 $((t, r_k(t)), r_k'(t)) \in \mathrm{graph}(g_k)$. 由 G 具紧值, 存在 $\{k\}$ 的子列 $\{k_i\} \subset \{k\}$ 和 $r(t)$, 使得

$$\lim_{i\to\infty} r_{k_i}(t) = r(t), \quad \lim_{i\to\infty} r_{k_i}'(t) = r'(t) \qquad (\forall t \in [t_0, t_0 + T])$$

注意到(1.6)式, 得

$d(((t, r_{k_i}(t)), r_{k_i}'(t)), \mathrm{graph}(G)) = d(((t, r_{k_i}(t)), g_{k_i}(t, r_{k_i}(t)), \mathrm{graph}(G)) \to 0 (i \to \infty)$, 那么, $((t, r(t)), r'(t)) \in \mathrm{graph}(G)$ 即

$$r'(t) \in G(t, r(t)), \quad r(t_0) = u_0 \qquad \text{(Q. E. D.)}$$

引理2 设 Ω 是 R^2 中开集, 集值映射 $G: \Omega \to R^1$, 是上半连续有界泛函, 具凸紧集, $(t_0, u_0) \in \Omega$, 设 $r(t)$ 是初值问题(1.2)的一个解, 其向右最大存在区间为 $[t_0, t_0 + a)$, $(a > 0)$. 设 $[t_0, t_1] \subset [t_0, t_0 + a)$, 则必存在 $\varepsilon_0 > 0$, 使当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 时初值问题(1.3)的解 $r(t, \varepsilon)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上存在, 且当 $\varepsilon \to 0^+$ 时 $r(t, \varepsilon)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上一致收敛于 $r(t)$.

证 设 Ω_0 是有界开集, $\Omega_0 \subset \Omega$ 且对 $t \in [t_0, t_1]$, $0 < \varepsilon \leqslant C/2$, 集合

$$\Omega_t^\varepsilon = \{(t, u) \in R^2 \mid t \leqslant t \leqslant t + C, \| u - (r(t) + \varepsilon) \| \leqslant C\}$$

满足 $\Omega_t^\varepsilon \subset \Omega_0$.

因 $G: \Omega_0 \to R_+^1 \cup \{0\}$ 是集值上半连续有界泛函, 故 $G + \varepsilon: \Omega_t^\varepsilon \to R^1$ 是集值上半连续有界泛函且 $\mathrm{Im}(G + \varepsilon) \leqslant M + \dfrac{C}{2}$. 据引理1, 初值问题(1.3)存在定义在 $[t_0, t_0 + \eta]$ 上的解 $r(t, \varepsilon)$, 其中 $\eta = \min\{C, C/2M + C\}$ 是与 ε 无关的常数, 利用引理1的证明方法, 并注意到 $r(t)$ 是确定的已知解, 可知对 $\forall t \in [t_0, t_0 + \eta]$ 一致有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r(t, \varepsilon) = r(t)$$

这表明 $$\lim_{\varepsilon\to 0} r(t_0 + \eta, \varepsilon) = r(t_0 + \eta)$$

取 $0 < \varepsilon_1 \leqslant C/2$, 使当 $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ 时

$$r(t_0 + \eta, \varepsilon) \leqslant r(t_0 + \eta) + \varepsilon$$

用 $\Omega_{t_0+\eta}^\varepsilon (\varepsilon < \varepsilon_1)$ 代替前面的 $\Omega_{t_0}^\varepsilon$, 重复前面的证明可知必存在 $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, 使对 $\varepsilon < \varepsilon_2$, 初值问题

$$u' \in G(t, u) + \varepsilon, u(t_0 + \eta) = r(t_0 + \eta) + \varepsilon$$

存在定义在 $[t_0 + \eta, t_0 + 2\eta]$ 上的解 $r(t, \varepsilon)$, 并且关于 $\forall t \in [t_0 + \eta, t_0 + 2\eta]$ 一致有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r(t, \varepsilon) = r(t)$$

对 $\varepsilon < \varepsilon_2$, 定义

$r(t, \varepsilon) = r(t, \varepsilon)$, $\forall t \in [t_0 + \eta, t_0 + 2\eta]$, 则显然 $r(t, \varepsilon)$ 是初值问题(1.3)在 $[t_0, t_0 + 2\eta]$ 上的一个解, 且在 $[t_0, t_0 + 2\eta]$ 上一致有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r(t, \varepsilon) = r(t)$$

重复上面的证明有限次, 即知存在某自然数 n 及 $\varepsilon_0 = \varepsilon_n$, 使得 $[t_0, t_1] \subset [t_0, t_0 + n\eta]$, 且当 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ 时初值问题(1.3)的解 $r(t, \varepsilon)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上存在, 且关于 $\forall t \in [t_0, t_1]$ 上一致有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} r(t,\varepsilon) = r(t) \qquad (\text{Q. E. D.})$$

由文[3]的比较定理和集值上半连续映射的可积选择映射的存在性，以下引理3是显然的•

引理3 设 Ω是R^2中开集，$G:\Omega\to R^1$，是集值上半连续有界泛函，具凸值，$(t_0,u_0)\in\Omega$，设$r(t)$是初值问题(1.2)的一个解，其向右最大存在区间为$[t_0,t_0+a)(a>0)$• 设$m(t)\in C[(t_0,t_0+a),R^1]$满足：$(t,m(t))\in\Omega(\forall t\in[t_0,t_0+a))$，$m(t_0)\leqslant u_0$，且对四个Dini导数某一个(记为$D$)有

$$Dm(t)\leqslant g(t,m(t)) \qquad (\forall t\in[t_0,t_0+a)\setminus\Gamma)$$

其中g是G的一个可积选择单值映射，r是$[t_0,t_0+a)$中至多可数集，则必有

$$m(t)\leqslant r(t) \qquad (\forall t\in[t_0,t_0+a)) \qquad (\text{Q. E. D.})$$

下记$R_0=[t_0,t_0+a]\times B(x_0,b)$，$a>0$，$b>0$，$B(x_0,b)=\{x\in E\mid \|x-x_0\|\leqslant b$

§ 2. 近似解与解的关系

定义1[4] 设E是完备度量空间，$\{A_n\}$是$B(E)$的集合序列，称$\{A_n$ 收敛于$A\subset E$，如果

(i) 对每个$a\in A$，存在$a_n\in A_n(n=1,2,\cdots)$，序列a_n收敛于a；

(ii) $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当 $n>N$ 时，有 $A_n\subset\bigcup_{x\in A}B(x,\varepsilon)$，$B(x,\varepsilon)=\{y\in E,d(x,y)<\varepsilon$• 其中$B(E)$表度量空间$E$的所有非空有界子集族，此时称$A$是$\{A_n$ 的极限•

定理1 设E是实Banach空间，集值映射$F:R_0\to D\subset E$是有界上半连续，具凸紧值，D是E的凸子集，$\theta\in D$，又设$0<T\leqslant a$，

$x_n\in C^1[[t_0,t_0+T],B(x_0,b)]$ 满足

$$x'_{n+1}(t)\in F(t,x_n(t))+y_n(t),\ x_n(t_0)=x_0,\ \|y_n(t)\|\leqslant\varepsilon_n$$
$$(n=1,2,\cdots,\forall t\in[t_0,t_0+T]) \tag{2.1}$$

其中，$\varepsilon_n>0$，$\varepsilon_n\to 0$，$y_n\in C[[t_0,t_0+T],D]$• 如果

$$\|x_n(t)-x(t)\|\to 0\quad \text{u•c•}\ \forall t\in[t_0,t_0+T] \tag{2.2}$$

(u•c 表一致收敛)，则

$x\in C[[t_0,t_0+T],B(x_0,b)]$ 且

$$x'(t)\in F(t,x(t)),\ x(t_0)=x_0,\ \forall t\in[t_0,t_0+T] \tag{2.3}$$

证 由(2.2)式知，$x\in C[[t_0,t_0+T],B(x_0,b)]$，因$F$集值上半连续，设$f_n$是逼近选择定理意义下逼近$F$的连续单值映象序列，且使

$$x'_{n+1}(t)=f_n(t,x_n(t))+y_n(t),\ x_n(t_0)=x_0,\ \|y_n(t)\|\leqslant\varepsilon_n \tag{2.4}$$

对任意固定的$t_1\in[t_0,t_0+T]$，令

$$G(t,n)=\frac{x_{n+1}(t)-x_{n+1}(t_1)}{t-t_1}-F(t_1,x_n(t_1))-y_n(t_1)$$

$$\lim_{t\to t_1}G(t,n)=x'_{n+1}(t_1)-F(t_1,x_n(t_1))-y_n(t_1) \tag{2.5}$$

可证 $$\lim_{n\to\infty}F(t_1,x_n(t_1))=F(t_1,x(t_1)) \qquad (*)$$

事实上 记$A_n=F(t_1,x_n(t_1))$，$A=F(t_1,x(t_1))$

(ⅰ)对每个 $z \in A$，由 F 上半连续，知 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $\| x_n(t_1) - x(t_1) \| < \delta$时，有 $d^*(A_n, A) < \varepsilon$，即 $d^*(A_n, A) = \sup_{z \in A} d(z, A_n) = \sup_{z \in A} \inf_{z_n \in A} d(z, z_n) < \varepsilon$，故对每个 $z \in A$，$\inf_{z_n \in A_n} d(z, z_n) < \varepsilon$，令 $M_n = \inf_{z_n \in A_n} d(z, z_n)$，则 $\forall K \in N$，$\exists \{n_k\} \subset \{n\}$，使得 $z_{n_k} \in A_{n_k}$ 有 $\lim_{K \to \infty} d(z, z_{n_k}) = M_{n_k} < \varepsilon$，由 ε 的任意性，得 $\lim_{K \to \infty} d(z, z_{n_k}) = 0$，即对每个 $z \in A$，$\exists z_{n_k} \in A_{n_k} \in \{A_n$，有 $z_{n_k} \to z(k \to \infty)$· b a

(ⅱ) $\forall z_n \in A_n$，首先对属于情况(ⅰ)中的 $z_{n_1} \in \{z_n\}$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1$，当 $n_1 \geqslant N_1$ 时，$z_{n_1} \in B(z, \varepsilon)$，$z \in A$· 其次，对于不属于情况(ⅰ)的 $z_{n_2} \in \{z_n$，则由于

$$\mathrm{Graph}(f_{n_2}) \subset B(\mathrm{Graph}F, \varepsilon) \qquad (\forall \varepsilon > 0)$$

故也 $\exists z \in A$，使得 $z_{n_2} = f_{n_2}(t_1, x_{n_2}(t_1)) \in B(z, \varepsilon)$ ($\exists N_2$，当 $n_2 > N_2$)· 总之，$\forall z_n \in A_n$，$\exists z \in A$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = \max\{N_1, N_2$，当 $n > N$ 时

$$A_n \subset \bigcup_{z \in A} B(z, \varepsilon)$$

这样，由(2.5)式有

$$\lim_{n \to \infty} G(t, n) = \frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1} - F(t_1, x(t_1)) \tag{2.6}$$

取 N，使 $\varepsilon_n < \dfrac{\varepsilon}{4}$，$\| x_{n+1}(t) - x(t) \| < \dfrac{\delta_1}{2} \qquad (\forall n > N,\ t \in [t_0, t_0 + T])$ (2.7)

再取 $\delta > 0$，使 $\delta < \delta_1$ 且

$$\| x(t) - x(t_1) \| < \frac{\delta_1}{2},\ \forall | t - t_1 | < \delta \tag{2.8}$$

由 $G(t, n)$ 的定义以及(2.1)式有

$$x_{n+1}(t) - x_{n+1}(t_1) - (t - t_1) x'_{n+1}(t_1) \in (t - t_1) G(t, n)$$

再由(2.4)式知

$$x_{n+1}(t) - x_{n+1}(t_1) - (t - t_1) x'_{n+1}(t_1) = (t - t_1) g(t, n) \tag{2.9}$$

其中

$$g(t, n) = \frac{x_{n+1}(t) - x_{n+1}(t_1)}{t - t_1} - f_n(t_1, x_n(t_1)) - y_n(t_1)$$

取 $\varphi \in E^*$ 使 $\| \varphi \| = 1$ 且

$$\begin{aligned} &\varphi[x_{n+1}(t) - x_{n+1}(t_1) - (t - t_1) x'_{n+1}(t_1)] \\ &\quad = \| x_{n+1}(t) - x_{n+1}(t_1) - (t - t_1) x'_{n+1}(t_1) \| \end{aligned}$$

并令

$$\psi(t) = \varphi(x_{n+1}(t)) - (t - t_1) \varphi(x'_{n+1}(t_1)) \text{ 于是}$$

$$\psi(t) = \varphi(x'_{n+1}(t)) - \varphi(x'_{n+1}(t_1)),$$

从而

$$\begin{aligned} \| x_{n+1}(t) - x_{n+1}(t_1) - (t - t_1) x'_{n+1}(t_1) \| &= \psi(t) - \psi(t_1) \\ &= \psi'(t)(t - t_1) \\ &= \varphi(x'_{n+1}(t) - x'_{n+1}(t_1)) \cdot (t - t_1) \\ &\leqslant \| \varphi \| \| x'_{n+1}(t) - x'_{n+1}(t_1) \| \, | t - t_1 | \\ &= \| x'_{n+1}(t) - x'_{n+1}(t_1) \| \, | t - t_1 |, \end{aligned}$$

其中 t 在 t 与 t_1 之间· 注意到(2.9)式，

$$\|g(t,n)\| \leqslant \|x'_{n+1}(t) - x'_{n+1}(t_1)\| \qquad (t \text{ 在 } t、t_1 \text{ 之间}) \tag{2.10}$$

当 $n > N$ 时, $0 < |t - t_1| < \delta$ 时, 据(2.4)式和(2.6)式

$$\begin{aligned}\|g(t,n)\| &\leqslant \|x'_{n+1}(t) - x'_{n+1}(t_1)\| \\ &\leqslant \|f_n(t,x_n(t)) + y_n(t) - f_n(t_1,x_n(t_1)) - y_n(t_1)\| \\ &\leqslant \|f_n(t,x_n(t)) - f_n(t_1,x(t_1))\| + \|f_n(t_1,x(t_1)) - f_n(t_1,x_n(t_1))\| + 2\varepsilon_n \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 2\varepsilon_n < \varepsilon\end{aligned}$$

即

$$\|g(t,n)\| < \varepsilon \quad (n > N, 0 < |t - t_1| < \delta) \tag{2.11}$$

令 $n \to \infty$ 得

$$\left\|\frac{x(t) - x(t_1)}{t - t_1} - F(t_1, x(t_1))\right\| < \varepsilon$$

因 F 是有界集值映射, 故 $x'(t_1)$ 存在, 由 $t_1 \in [t_0, t_0 + T]$ 的任意性, 得 $x'(t)$ 存在, 于是

$$\begin{aligned}&d(((t,x_n(t)), x'_{n+1}(t)), \mathrm{graph}(F)) \\ &\quad = d(((t,x_n(t)), f_n(t,x_n(t)) + y_n(t)), \mathrm{graph}(F)) \to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

得

$$((t,x(t)), x'(t)) \in \mathrm{graph}(F)$$

即

$$x'(t) \in F(t,x(t)), \text{ 且 } x(t_0) = x_0, x \in C^1[[t_0, t_0 + T], B(x_0, b)] \quad (\text{Q.E.D.})$$

§3. 解 的 存 在 性

以下集值映射的范数为

$$\|F\| = \sup_{x \in D(F)} \inf_{f \in F(t,x)} \|f\| / \|x\|, \quad \|G\| = \sup_{u \in D(G)} \inf_{g \in G(t,u)} \|g\| / \|u\| \cdot$$

定义 2 (参见[5]): 设 $G: J \times R^+ \to R$ 是一集值映射, $J = [t_0, T] \cdot \forall u, v \in R, u \leqslant v$, 对任意的 $u_G \in G(t,u)$, 存在 $v_G \in G(t,v)$, 便得 $u_G \leqslant v_G$, 则称 G 为关于 u 的集值单调增算子•

定理 2 设 E 是可分 Banach 空间, (a) 集值映射 $F: R_0 \to D \subset E$ 是有界上半连续, 具凸紧值• D 是 E 的凸闭子集, $\theta \in D$; (b) 集值映射 $G: R_0 \to R^1_+ \cup \{0\}$ 有界上半连续泛函, 具凸紧值, 且关于 u 单调增, 又 $G(t, 0) \equiv \{0\}$, 又普通微分包含

$$u'(t) \in G(t, u), u(t_0) = 0 \tag{3.1}$$

在 $[t_0, t_0 + a]$ 上只有零解 $u = 0$•

(c) $F(t,x) \subset B(F(t,y), |G(t, \|x - y\|)|)$

$$(\forall (t,x), (t,y) \in R_0, \|x - y\| \leqslant b) \tag{3.2}$$

式中, $|G(t,u)| = \sup_{(t,u) \in R_0} \{|v| : v \in G(t,u)\}$ [参见[6]], 则 Cauchy 问题

$$x'(t) \in F(t,x), x(t_0) = x_0$$

在 $[t_0, t_0 + T]$ 上有解, $x \in C^1[[t_0, t_0 + T], B(x_0, b)]$,

其中, $T = \min\left\{a, \dfrac{b}{\|F\|}, \dfrac{b}{\|G\|}\right\}$, 并且迭代序列

$$x_0(t) \equiv x_0, x_{n+1}(t) \in x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, x_n(s)) ds \tag{3.3}$$

在 $[t_0, t_0+T]$ 上一致收敛于 $x(t)$.

证明 由(3.3)式,用归纳法易知

$$\|x_{n+1}(t)-x_0\| \leqslant b \qquad (\forall t \in [t_0, t_0+T]; n=0,1,2,\cdots)$$

事实上,

$$\|x_1(t)-x_0\| \leqslant \|F\| \mid t-t_0 \mid \leqslant \|F\| T \leqslant b$$

令 $n=k$ 成立,易证 $n=k+1$ 成立,故 $x_{n+1} \in C^1[[t_0, t_0+T], B(x_0, b)]$ 且

$$x'_{n+1}(t) \in F(t, x_n(t)), x_n(t_0)=x_0 \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3.4}$$

令 $M=\max\{\|F\|, \|G\|\}$,则 $T=\min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$,作迭代序列如下:

$$u_0=M(t-t_0) \qquad (\forall t \in [t_0, t_0+T])$$

$$u_{n+1} \in \int_{t_0}^{t} G(s, u_n(s))ds \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3.5}$$

设 g_n 是 $G(s, u_n(s))$ 的一个可积选择,使得

$$u_{n+1}=\int_{t_0}^{t} g_n(s, u_n(s))ds$$

因 G 关于 u 单调增,由归纳法可证

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n(t) \leqslant b \tag{3.6}$$

首先

$$u_1(t)=\int_{t_0}^{t} g_0(s, u_0(s))ds \leqslant \|G\|(t-t_0) \leqslant u_0(t) \leqslant b$$

若 $\forall t, 0 \leqslant u_n(t) \leqslant u_{n-1}(t) \leqslant b$,如 $g_{n-1} \in G(t, u_{n-1})$,则 $\exists g_n \in G(t, u_n)$,使得 $g_n \leqslant g_{n-1}$. 于是(3.6)得证.

又由 $u'_{n+1}(t)=g_n(t, u_n(t)) \leqslant \|G\|$,据(3.6)式和 Ascoli_Arzela 定理知 $\{u_n(t)\}$ 在 $[t_0, t_0+T]$ 上一致收敛于某连续函数 $u(t)$,且

$$u(t) \in \int_{t_0}^{t} G(s, u(s))ds \tag{3.7}$$

由此可知,$u \in C^1[[t_0, t_0+T], [0, b]]$ 且 u 是初值问题(3.1)的解,由假设知,$u(t) \equiv 0$.

下面再证

$$\|x_{n+1}-x_n\| \leqslant u_n(t)=\int_{t_0}^{t} g_{n-1}(s, u_{n-1})ds \qquad (n=0,1,2,\cdots) \tag{3.8}$$

因为 $\|x_1(t)-x_0(t)\| \leqslant \left\|\int_{t_0}^{t} F(s, x_0)ds\right\| \leqslant \|F\| \mid t-t_0 \mid \leqslant M(t-t_0) \leqslant u_0(t)$.

若 $\|x_k(t)-x_{k-1}(t)\| \leqslant u_{k-1}(t)=\int_{t_0}^{t} g_{k-2}(s, u_{k-2}(s))ds$

由 E 是可分 Banach 空间,F 是集值上半连续,故存在可积选择 f_{k-1},使

$$x_k(t)=\int_{t_0}^{t} f_{k-1}(s, x_{k-1}(s))ds \tag{3.9}$$

由(3.2)式知

$$F(t, x_k(t)) \subset B(F(t, x_{k-1}(t)), G(t, \|x_k-x_{k-1}\|))$$

于是 $\exists f_k(t, x_k(t)) \in F(t, x_k(t)), f_{k-1}(t, x_{k-1}(t)) \in F(t, x_{k-1}(t))$ 和 $h(t, \|x_k-x_{k-1}\|) \in G(t, \|x_k-x_{k-1}\|)$,并且由 G 关于 u 单调增,对 $h(t, \|x_k-x_{k-1}\|)$,存在 g_{k-1}

$\in G(t, u_{k-1}(t))$, 使得

$$f_k(t, x_k(t)) - f_{k-1}(t, x_{k-1}(t)) = h(t, \|x_k - x_{k-1}\|) \leqslant g_{k-1}(t, u_{k-1}(t))$$

这样

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|f_k(s, x_k(s)) - f_{k-1}(s, x_{k-1}(s))\| ds$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} g_{k-1}(s, u_{k-1}(s)) ds = u_k$$

即(3.8)式得证.

从(3.9)式知

$$x'_{n+1} = f_n(t, x_n(t)), x'_n(t) = f_{n-1}(t, x_{n-1}(t))$$

$$\|x'_{n+1}(t) - x'_n(t)\| = \|f_n(t, x_n(t)) - f_{n-1}(t, x_{n-1}(t))\|$$

$$\leqslant h(t, \|x_n - x_{n-1}\|) \leqslant g_{n-1}(t, u_{n-1}) \tag{3.10}$$

设 $m \geqslant n$, 注意到(3.10)式和(3.6)式, 有

$$\|x'_n(t) - x'_m(t)\| \leqslant \|x'_m(t) - x'_{m-1}(t)\| + \|x'_{m-1}(t) - x'_{m-2}(t)\|$$

$$+ \cdots + \|x'_{n+1}(t) - x'_n(t)\| \leqslant g_{m-1}(t, u_{m-1}(t)) + g_{m-2}(t, u_{m-2}(t))$$

$$+ \cdots + g_n(t, u_n(t))$$

由于 $G(t, 0) \equiv \{0\}$ 以及(3.6)式, 知对于 $G(t, u_n)$ 的任意可积选择 g, 当 $n \to \infty$ 时 $g(t, u_n(t))$ 一致收敛于0, 这样, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 使得 $m \geqslant n \geqslant N$ 时, 有

$$D^+ \|x_n(t) - x_m(t)\| \leqslant \|x'_n(t) - x'_m(t)\| < \varepsilon$$

这里 D^+ 是 Dini 导数.

从 $\|x_n(t_0) - x_m(t_0)\| = 0 < \varepsilon$, 由引理3知当 $m \geqslant n \geqslant N$,

$$\|x_n(t) - x_m(t)\| \leqslant r(t, \varepsilon) \qquad (\forall t \in [t_0, t_0 + T]) \tag{3.11}$$

其中, $r(t, \varepsilon)$ 表初值问题

$$u' \in G(t, u) + \varepsilon, \quad u(t_0) = \varepsilon \tag{3.12}$$

的一个解, 再据引理2知, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $r(t, \varepsilon)$ 在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ 上一致收敛于问题(3.1)的解 $u(t) \equiv 0$. 从(3.11)式知$\{x_n(t)\}$在$[t_0, t_0 + T]$上一致收敛于某连续抽象函数 $x(t)$, 结合(3.3)式和定理1, 即知

$$x \in C^1[[t_0, t_0 + T], B(x_0, b)], \text{且}$$

$$x'(t) \in F(t, x(t)), x(t_0) = x_0 \qquad (\forall t \in [t_0, t_0 + T]) \qquad \text{(Q.E.D.)}$$

推论1 设 E 是可分 Banach 空间, 集值映射 $F: R_0 \to E$ 有界上半连续、Lipschitz 映射, 即

$$F(t, x) \subset B(F(t, y), Ld(x, y)) \quad (L > 0, \text{常数})$$

$$\forall (t, x), (t, y) \in R_0, \|x - y\| \leqslant b \tag{3.13}$$

则 Cauchy 问题(1.1)在 $[t_0, t_0 + T]$ 上有解 $x \in C^1[[t_0, t_0 + T], B(x_0, b)]$, 这里 $T = \min\left\{a, \frac{b}{\|F\|}, \frac{1}{L}\right\}$, 并且迭代序列(3.3)在$[t_0, t_0 + T]$上一致收敛于 $x(t)$.

证 在定理2中取 $G(t, u) = Lu$, $\|G\| = L\|u\| \leqslant Lb$,

于是 $T = \min\left\{a, \frac{b}{\|F\|}, \frac{1}{L}\right\}$. (Q.E.D.)

注 由推论1知, 定理2中的条件(b)和(c)比 Lipschitz 条件更为广泛.

例 1 考察一阶偏微分包含的初值问题:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\in F(t,u(t,x))\\&u(t_0,x)=u_0(x)\end{aligned}\right\}t \tag{3.14}$$

其中, $u_0(x)\in C[[c,d],R^1]$, 集值映射 $F:[t_0,t_0+a]\times D\to R^1$, 有界上半连续, $D=\{v\in R^1|\exists x\in[c,d]$, 使$|v-u_0(x)|\leqslant b\}$, $b>0$, 如 F 还满足

$F(t,x)\subset B(F(t,y),Ld(x,y))(L>0$, 常数$)$, $\forall t\in[t_0,t_0+a]$, $x,y\in D$• 则 $\exists 0<T\leqslant a$, 使初值问题(3.14) 在$[c,d]\times[t_0,t_0+T]$ 上有解 $u(t,x)$, 且迭代序列

$$u_0(t,x)\equiv u_0(x),\ u_{n+1}(t,x)\in u_0(x)+\int_{t_0}^{t}F(s,u_n(s,x))ds \tag{3.15}$$

在$[c,d]\times[t_0,t_0+T]$ 上一致收敛于 $u(t,x)$•

证 显然, (3.14) 式可视为可分 Banach 空间 $E=C[[c,d],R^1]$ 中的微分包含初值问题

$$u'(t)\in F(t,u),\ u(t_0)=u_0 \tag{3.16}$$

其中, $u(t)=u(t,x)\in C[[c,d],R^1](t$ 固定$)$, $u_0=u_0(x)$•

易知推论 1 的条件满足, 故据推论 1, 本例所述结论成立•

参 考 文 献

1 J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer_Verlag, New York (1984)•

2 J. P. Aubin and H. Frankouska, *Set_Valued Analysis*, Birkhauser, Berlin (1990)•

3 V. Lakshmikantham and S. Leala, *Differential and Integral Inequalities*, Vol Ⅰ and Ⅱ, Academic Press, New York (1969)•

4 B. Fisher and K. Iseki, Fixed points set_valued mappings on complete and compact metric spaces, *Math. Japonica*, **28**(5) (1983), 639—646•

5 Chang Shihsen and Ma Yihai, Coupled fixed points for mixed monotone condensing operators and an existence theorem of the solutions for a class of functional equations arising in dynamic programming, *J. Math. Anal. Appl.*, **160** (1991), 468—479•

6 Hu Shouchuan and N. S. Papageorgiou, On the existence of periodic solutions for nonconvex_valued differential inclusions in R^N, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123** (1995), 3043—3050•

Existence of Solutions to Differential Inclusions in Banach Spaces

Song Fumin

(Nanchang Institute of Aeronautical Technology, Nanchang 330034, P.R.China)

Abstract

In this paper, the existence of solutions to differential inclusions is discussed in infinite dimensional Banach spaces. First, some comparability theorems for common differential inclusions are posed, relations between approximate solutions and solutions are studied. In the end, the existence theorem of solutions to differential inclusions is obtained.

Key words Banach space, differential inclusion, set_valued mappings, existence theorem