应用数学和力学,第 19 卷 第 10 期(1998 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

同伦分析方法:一种新的求解非线性问题的近似解析方法

廖世俊①

(戴世强推荐,1997 年 5 月 27 日收到)

摘 要

本文描述了一种称为"同伦分析方法"(HAM)的新的求解非线性问题的近似解析方法之基本思想• 不同于摄动展开方法,"同伦分析方法"的有效性不依赖于所研究的非线性方程中是否含有小参数• 因此,该方法提供了一个强有力的分析非线性问题的新工具• 作为示例,我们应用一个典型的非线性问题来说明该方法的有效性及其巨大潜力•

关键词 非线性近似解析方法 强非线性 同伦 拓扑
中图分类号 O174, O173, O175

§1. 引 言

尽管数值计算机的迅猛发展使得非线性问题的数值求解日益容易,但给出非线性问题解的近似解析表达依然非常困难• 目前,还不存在一种令人十分满意的非线性近似求解方法• 例如,虽然摄动展开方法已被广泛地用来分析科学和工程中的非线性问题,但它的有效性过分强烈地依赖于所谓的小参数,从而摄动展开方法通常仅适用于弱非线性问题• 对于根本不含小参数的非线性问题,摄动展开方法完全失效• 因此,发展一种其有效性不依赖于方程中是否存在小参数的近似解析方法是非常有意义的•

廖世俊[1~6]在这个方面进行了一些有益的尝试• 廖世俊[1,2]在其博士论文中提出了一种新的非线性近似分析方法,称为"同伦分析方法"(HAM)• 同伦分析方法建立在拓扑理论的同伦方法的基础上,其有效性与所研究的方程是否含有小参数无关• 因此,"同伦分析方法"克服了摄动展开方法的上述限制和局限性,提供了一种新的分析强非线性问题的途径• 廖世俊[3~6]在不断地逐步完善该方法的同时,应用"同伦分析方法"成功地求解了一些强非线性问题• 另一方面,廖世俊[7,8]及廖世俊和章梓雄[9]应用"同伦分析方法"的基本思想成功地提出了一种所谓的"广义边界元方法"(GBEM)• 该"广义边界元方法"甚至对控制方程和边界条件均不含线性项的强非线性方程亦有效,且在逻辑上包含传统的边界元方法,是对传统边界元方法的极大一般化• 上述所有这些都说明了"同伦分析方法"的有效性及其巨大的潜力•

本文,我们应用一个简单但典型的例子简洁地说明"同伦分析方法"的基本思想,以进一步

① 上海交通大学船舶及海洋工程学院,上海 200030

说明“同伦分析方法”的有效性及其潜力•

§ 2. 同伦分析方法的基本思想

考虑如下一个非线性方程

$$u'(t) + 2tu^2(t) = 0, \quad u(0) = 1 \tag{2.1}$$

其精确解为

$$u(t) = \frac{1}{1 + t^2} \tag{2.2}$$

假设 t 为小量, 则由摄动展开技术, 我们得到如下的幂级数

$$u(t) = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{2k} \tag{2.3}$$

其收敛半径仅为 $\rho = 1$• 因此, 此摄动展开解几乎无价值•

现在, 我们应用“同伦分析方法”求解同一个问题• 首先, 我们构造如下一个连续映射 $U(t, p, \hbar): [0, +\infty) \times [0, 1] \times \mathscr{R}_0 \to \mathscr{R}$, 满足

$$(1 - p)\frac{\partial U(t, p, \hbar)}{\partial t} = p\hbar\left[\frac{\partial U(t, p, \hbar)}{\partial t} + 2tU^2(t, p, \hbar)\right],$$

$$t \geqslant 0, p \in [0, 1], \hbar \neq 0 \tag{2.4}$$

及边界条件

$$U(0, p, \hbar) = 1, \qquad p \in [0, 1], \hbar \neq 0 \tag{2.5}$$

从而

$$u(t, 0, \hbar) = 1, \quad U(t, 1, \hbar) = u(t) = \frac{1}{1 + t^2} \tag{2.6}$$

其中, $\mathscr{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathscr{R}_0 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$• 这里, 我们设 $\hbar$ 为非零的实数• 显然, 当 p 从 0 增至 1, $U(t, p, \hbar)$ 连续地从初始解 $U(t, 0, \hbar) = 1$ 变化到精确解 $u(t) = 1/(1 + t^2)$• 这种连续变化在同伦中称为“变形”, 因此, 我们称方程(2.4)、(2.5)为“零阶变形方程”• 其次, 假设 $U(t, p, \hbar)$ 足够地光滑, 从而“k 阶变形导数”

$$u_0^{[k]}(t, \hbar) = \left.\frac{\partial^k U(t, p, \hbar)}{\partial p^k}\right|_{p=0} \qquad (k \geqslant 1)$$

存在• 另外, 假设 $U(t, p, \hbar)$ 在 $p = 0$ 处的麦克劳伦 (Maclaurin) 级数

$$U(t, 0, \hbar) + \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{u_0^{[k]}(t, \hbar)}{k!}\right] p^k \tag{2.7}$$

在 $p = 1$ 处收敛, 则我们由(2.6), 得

$$u(t) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{u_0^{[k]}(t, \hbar)}{k!} \tag{2.8}$$

这里, $u_0^{[k]}(t, \hbar)(k \geqslant 1)$ 满足如下“k 阶变形方程”:

$$\frac{\partial u_0^{[k]}(t, \hbar)}{\partial t} = \begin{cases} 2\hbar t & (k = 1) \\ k\left[(1 + \hbar)\dfrac{\partial u_0^{[k-1]}(t, \hbar)}{\partial t} + 2t\hbar\displaystyle\sum_{m=0}^{k-1}\binom{k-1}{m} u_0^{[m]}(t, \hbar)\, u_0^{[k-1-m]}(t, \hbar)\right] & (k \geqslant 2) \end{cases} \tag{2.9}$$

及边界条件

$$u_0^{[k]}(0,\hbar)=0,\qquad \hbar\neq 0,\ k\geqslant 1 \tag{2.10}$$

对零阶方程(2.4)、(2.5)关于 p 求 $k(k\geqslant 1)$ 阶导数,然后令 $p=0$,即可得上述“k 阶变形方程”• 应用自动推导软件如 MATHEMATICA 或 MAPLE,方程(2.9)、(2.10)很易求解• 将这些解代入方程(2.8),我们有

$$u(t)=\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=0}^{m}\left[(-1)^k t^{2k}\right]\Phi_{m,k}(\hbar) \tag{2.11}$$

这里,$\Phi_{m,n}(\hbar)$ 定义如下

$$\Phi_{m,n}(\hbar)=\begin{cases}0 & (n>m)\\ (-\hbar)^n\displaystyle\sum_{k=0}^{m-n}\binom{m}{m-n-k}\binom{n+k-1}{k}\hbar^k & (1\leqslant n\leqslant m)\\ 1 & (n\leqslant 0)\end{cases} \tag{2.12}$$

称为“趋近函数”•

“趋近函数” $\Phi_{m,k}(\hbar)$ 具有非常一般的意义• 廖世俊[10]严格地证明了“趋近函数” $\Phi_{m,n}(\hbar)$ 具有如下性质:

引理1 设 ζ 为复变数,$m,n(1\leqslant n\leqslant m)$ 为整数,则成立

$$\Phi'_{m,n}(\zeta)=(-1)^n n\binom{m}{n}\zeta^{n-1}(1+\zeta)^{m-n} \tag{2.13}$$

引理2 设 ζ 为复变数,$m,n(1\leqslant n\leqslant m)$ 为整数,则成立

$$\Phi_{m+1,n}(\zeta)-\Phi_{m,n}(\zeta)=\binom{m}{n-1}(-\zeta)^n(1+\zeta)^{m-n+1} \tag{2.14}$$

引理3 设 $m,n(1\leqslant n\leqslant m)$ 为整数,则成立

$$\Phi_{m,n}(-1)=1 \tag{2.15}$$

引理4 设 ζ 为复变数,$m,n(1\leqslant n\leqslant m)$ 为整数,则成立

$$\lim_{m\to+\infty}\Phi_{m,n}(\zeta)=1\qquad(|1+\zeta|<1) \tag{2.16}$$

而且,廖世俊[10]严密地证明了一个所谓的“广义泰勒定理”• 该定理在本文的附录中给出• 我们强调指出,该“广义泰勒定理”在逻辑上包含了传统的泰勒定理• 而且,对适当的 ζ 值,该“广义泰勒定理”可大大增大传统泰勒级数的收敛区域• 应用本文所述的例子我们可以很好地说明这一点• 方程(2.1)的精确解为 $1/(1+t^2)$,其对应的复变函数 $f(z)=1/(1+z^2)$ 有二个奇点 $\xi_1=i$ 和 $\xi_2=-i$• 因此,根据附录中所述之“广义泰勒定理”,级数(2.11)在区域

$$|t|<\sqrt{\frac{2}{|\hbar|}-1}\qquad(-2<\hbar<0) \tag{2.17}$$

内有效•

§3. 讨论及结论

不妨让我们比较一下摄动展开近似(2.3)及广义泰勒级数(2.11)• 前者仅在区域 $|t|<1$ 内有效,而后者的收敛区域为实数 $\hbar$ 之函数• 首先,由式(2.15)及(2.17)知,级数(2.11)在 $\hbar=-1$ 时就是摄动展开解(2.3),因此,摄动展开解(2.3)是级数家族(2.11)的一个特殊成员• 它意味着级数(2.11)在逻辑上包含着摄动展开解(2.3)• 这种逻辑上的包含性在科学和数学中已被证明是非常重要的• 其次,当 $\hbar$ 从 -1 逐渐增至0,级数(2.11)之收敛区域逐渐增

大• 在极限 $\hbar \to 0$ 下, 级数(2.11) 在整个实轴上有效! 然而, 当 $\hbar$ 从 -1 逐渐减小到 -2 时, 其收敛区域变得愈来愈小• 综上所述, 摄动展开解(2.3) 即不是最好的, 亦非最坏的: 它仅为级数家族(2.11) 中一个平凡的一员• 最后, 我们强调指出, 本文所述之“同伦分析方法”完全不需要小参数假设• 换言之, “同伦分析方法”的有效性与所考虑的非线性问题是否含有小参数无关• 仅从形式上而言, “同伦分析方法”似乎适用于所有的非线性问题, 仅管该方法不可避免地存在一些我们至今还不十分清楚的局限性•

不同于摄动展开解(2.3), 级数(2.11) 提供给我们一个近似解的家族• 级数(2.11) 的收敛区域取决于我们在构造零阶方程(2.4) 和(2.5) 时所引入的 $\hbar$ 之值• 显然, 不同的 $\hbar$ 之值对应于不同的映射, 或者更精确地说, 对应于不同的同伦• 事实上, 方程(2.4) 和(2.5) 构造了一个依赖于 $\hbar$ 的同伦之家族 $U(t, p, \hbar)$• 显然, 该家族中一些同伦较另一些为好• 这可以很好地说明为什么级数(2.11) 的收敛区域是 $\hbar$ 的一个函数• 变量 $\hbar$ 之引入确实提供给我们更大的自由, 从而可得到更多、更好的近似• 有趣的是, 若在零阶方程(2.4) 和(2.5) 中用复变数 ζ 代替实数 $\hbar$, 我们将得到一个更大的家族

$$u(t) = \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} [(-1)^k t^{2k}]\, \Phi_{m,k}(\zeta) \tag{3.1}$$

其在区间

$$|1 + \zeta \pm it\zeta| < 1 \qquad (|1 + \zeta| < 1) \tag{3.2}$$

内收敛于精确解 $u(t) = 1/(1 + t^2)$• 注意, (3.2) 式中令 ζ 为实数即得公式(2.17)•

本文上述之示例确实非常简单, 且其精确解存在• 但该例子仍然很好地说明了“同伦分析方法”的有效性及其巨大的潜力• 事实上, “同伦分析方法”可以用来求解非常复杂的非线性问题• 例如, 廖世俊[6] 应用“同伦分析方法”求解了如下关于二维半无限平板上层流黏性流动之方程

$$f'''(\eta) + \frac{1}{2} f(\eta) f''(\eta) = 0, \qquad \eta \in [0, +\infty) \tag{3.3}$$

及边界条件

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(+\infty) = 1 \tag{3.4}$$

这里, 一撇表示对 η 求导数, 众所周知, Blasius[11] 曾给出上述方程的一个如下形式的幂级数解

$$f(\eta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{A_k \sigma^{k+1}}{(3k+2)!} \eta^{3k+2} \tag{3.5}$$

这里

$$A_k = \begin{cases} 1, & k = 0, 1 \\ \displaystyle\sum_{r=0}^{k-1} \binom{3k-1}{3r} A_r A_{k-r-1}, & k \geqslant 2 \end{cases} \tag{3.6}$$

且 $\sigma = f''(0) = 0.33206$ (见 Howarth[12, 13])• 幂级数(3.5) 亦可由摄动展开方法得到• 然而, 幂级数(3.5) 仅在区域 $|\eta| \leqslant 5.690$ 内有效• 应用“同伦分析方法”, 廖世俊[6] 成功地得到如下一个级数家族

$$f(\eta) \doteq \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{A_k \sigma^{k+1}}{(3k+2)!} \eta^{3k+2} \right] \Phi_{m,k}(\hbar), \quad 在\ \eta \in [0, +\infty),\ -2 < \hbar < 0 \tag{3.7}$$

其在区域

$$-\rho_0<\eta<\rho_0\left[\frac{2}{|\hbar|}-1\right]^{1/3}\qquad(-2<\hbar<0)\tag{3.8}$$

内有效• 我们强调指出,当实数 $\hbar(-2<\hbar<0)$ 趋近于零时,级数(3.7)在整个正实轴上有效!所有上述这些都一再表明,“同伦分析方法”确实是一种强有力的非线性分析方法,尽管该方法还需不断地改进和更广泛地应用•

附 录

广义泰勒定理 设 $n\geqslant 0$ 为一有限整数, ζ, z, z_0 为复数• 若复变函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 处解析,则在区域

$$\bigcap_{k\in I}\left|1+\zeta-\zeta\left(\frac{z-z_0}{\xi_k-z_0}\right)\right|<1,\qquad |1+\zeta|<1$$

成立

$$\begin{aligned}f(z)&=\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\right]\Phi_{m,k}(\zeta)\\&=\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=0}^{m+n}\left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\right]\Phi_{m,k-n}(\zeta)\\&=\lim_{m\to+\infty}\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k\right]\Phi_{m+n,k+n}(\zeta)\end{aligned}$$

这里,复变函数 $\Phi_{m,k}(\zeta)$ 如(2.12)之定义, $\xi_k(k\in I)$ 为 $f(z)$ 全部之奇点• 另外,当 $\zeta=-1$, 其就是传统的泰勒定理•

广义牛顿二项式定理 设 $t,\hbar$ 和 α 为实数• 则如下定义的广义牛顿二项式

$$(1+t)^\alpha=1+\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\right]t^n\,\Phi_{m,n}(\hbar)\qquad(\alpha\neq 0,1,2,3,\cdots)$$

在区间

$$-1<t<\frac{2}{|\hbar|}-1\qquad(-2<\hbar<0)$$

成立• 这里, $\Phi_{m,n}(\hbar)$ 如(2.12)之定义•

参 考 文 献

1 S. J. Liao, The homotopy analysis method and its applications in mechanics, Ph. D. Dissertation, Shanghai Jiaotong University (1992).

2 S. J. Liao, A kind of linear invariance under homotopy and some simple applications of it in mechanics, Bericht Nr. 520, Institut fuer Schiffbau der Universitaet Hamburg (1992).

3 S. J. Liao, A second_order approximate analytical solution of a simple pendulum by the process analysis method, J. Applied Mechanics, **59** (1992), 970—975.

4 S. J. Liao, Application of process analysis method to the solution of 2D non_linear progressive gravity waves, J. Ship Research, **36**(1) (1992), 30—37.

5 S. J. Liao, A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters: a special exemple, Int. J. Non_Linear Mechanics, **30**(3) (1995), 371—380.

6 S. J. Liao, A kind of approximate solution technique which does not depend upon small parameters (2): an application in fluid mechanics, Int. J. Non_Linear Mechanics, **32**(5) (1997), 815—822.

7 S. J. Liao, Boundary Elements, XVII, Computational Mechanics Publications, Southampton (1995), 67—74.

8 S. J. Liao, High_order BEM formulations for strongly nonlinear problems governed by quite general nonlinear differential operators, Int. J. Numerical Methods in Fluids, **23** (1996), 739—751.

9 S. J. Liao and A. T. Chwang, The general BEM for strongly non_linear problems, Int. J. Numerical Methods in Fluids, **23** (1996), 467—483.

10 S. J. Liao, Homotopy analysis method and its applications in mathematics, Journal of Basic Science and Engineering, **5**(2) (1997), 111—125.

11 H. Blasius, Grenzschichten in Fl essigkeiten mit kleiner Reibung, Z. Math. u. Phys., **56** (1908), 1—37.

12 L. Howarth, On the calculation of steady flow in the boundary layer near the surface of a cylinder in a stream, ARC RM, **1632** (1935).

13 L. Howarth, On the solution of the laminar boundary layer equations, Proc. Roy. Soc. London A, **164** (1938), 547—579.

14 M. L. Abell and J. P. Braselton, The Mathematica Handbook, Academic Press, Inc., Boston (1992).

15 S. L. Liao, The common ground of all numerical and analytical techniques for solving nonlinear problems, Communications of Nonlinear Science and Nonlinear Simulations, **1**(4) (1996), 26—30.

Homotopy Analysis Method: a New Analytic Method for Nonlinear Problems

Liao Shijun
(Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, P.R.China)

Abstract

In this paper, the basic ideas of a new analytic technique, namely the Homotopy Analysis Mehtod(HAM), are described. Different from perturbation methods, the validity of the HAM is independent on whether or not there exist small parameters in considered nonlinear equations. Therefore, it provides us with a powerful analytic tool for strongly nonlinear problems. A typical nonlinear problem is used as an example to verify the validity and the great potential of the HAM.

Key words nonlinear analytic technique, strong nonlinearity, homotopy, topology