应用数学和力学, 第 19 卷 第 10 期(1998 年 10 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

非牛顿流体力学变分原理

沈　敏[①]

(刘宇陆推荐, 1997 年 5 月 5 日收到)

摘　　要

本文将钱伟长教授在文献[1]中提出的不可压缩粘性流的最大功率消耗原理进一步推广到本构方程为 $\varepsilon_{ij}=\partial\tau/\partial\sigma'_{ij}$ 的非牛顿流体流动问题, 并采用识别的拉氏乘子法解除变分约束条件, 导出其广义变分原理•

关键词　非牛顿流体　变分原理　拉氏乘子
中图分类号　O354

§1. 引　　言

人们关于流体力学中的变分原理的研究早在本世纪 40 年代就已经开始, 其中具有较为重要贡献的文献见[2—6]• 但这些研究工作大都从 Bernoulli 方程出发, 主要考虑物体外场的无粘流动• 钱伟长教授首先从牛顿粘性流体的 Navier_Stokes 方程出发, 建立了粘性流体流动问题的变分原理即最大功率消耗原理及其广义变分(驻值)原理[1]• 文献[7]把最大功率消耗原理推广到一类特殊的非牛顿流体——广义牛顿流体的流动问题, 并导出了相应的广义变分原理• 本文在这些工作的基础上, 进一步把最大功率消耗原理推广到本构方程为 $\varepsilon_{ij}=\partial\tau/\partial\sigma'_{ij}$ 的非牛顿流体(以下简称为非牛顿流体)的流动问题, 并用拉氏乘子法导出其广义变分原理•

§2. 非牛顿流体流动问题的基本方程

如果我们取 Euler 坐标 $x_i(i=1,2,3)$, 则各点的流速为 $u_i(x_1,x_2,x_3,t)$, 压力为 $p(x_1,x_2,x_3,t)$• 设流体中各点的应力为 σ_{ij}, 则对于我们这里所要讨论的非牛顿流体, 有

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\sigma'_{ij} \tag{2.1}$$

其中 σ'_{ij} 称为偏应力张量, 而

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j \quad r\ N\end{cases} \tag{2.2}$$

因 σ_{ij} 为对称张量即 $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$• 故 σ'_{ij} 也为对称张量• 流体的本构方程(应变速率与偏应力张量的关系)是

$$\varepsilon_{ij}=\partial\tau/\partial\sigma'_{ij} \tag{2.3}$$

这里 τ 称为非牛顿流体的应力函数[8], 而应变速率张量与流速的关系为

① 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

$$\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \tag{2.4}$$

$$u_{i,j} = \partial u_i/\partial x_j \tag{2.5}$$

另外,流体的运动方程为

$$\rho\left(\partial u_i/\partial t + u_k u_{i,k}\right) = \rho F_i + \sigma_{ij,j} \tag{2.6}$$

其中 F_i 为单位质量流体所受的体积力, ρ 为流体的密度• 由于一般无法从本构方程(2.3) 解出 σ'_{ij}, 所以必须以 u_i, p, σ'_{ij} 作为求解未知量, 为此将(2.1) 代入(2.6) 得到用这三个变量表示的流体运动方程为

$$\rho(\partial u_i/\partial t + u_k u_{i,k}) = \rho F_i - p_{,i} + \sigma'_{ij,j} \tag{2.7}$$

按(2.4), 本构方程(2.3) 可写成

$$\partial \tau/\partial \sigma'_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \tag{2.8}$$

此外,流体流动还需满足连续性方程

$$u_{k,k} = 0 \qquad 在\ \Omega 中 \tag{2.9}$$

流场的边界条件为, 在给定面力的边界 Γ_σ 上有

$$\sigma_{ij} n_j = (-p\delta_{ij} + \sigma'_{ij}) n_j = f_i \qquad 在\ \Gamma_\sigma\ 上 \tag{2.10}$$

在固体壁面边界 Γ_s 上, 有无滑移条件

$$u_i = 0 \qquad 在\ \Gamma_s\ 上 \tag{2.11}$$

另外, 在来流边界 Γ_u 上, 流速为已知, 即

$$u_i = u_i \qquad 在\ \Gamma_u\ 上 \tag{2.12}$$

这里整个流场区域 Ω 的边界 $\Gamma = \Gamma_\sigma + \Gamma_s + \Gamma_u$• 于是以 u_i, p, σ'_{ij} 为求解量的定解问题为: 在边界条件(2.10 ~ 2.12) 式下, 从方程组(2.7 ~ 2.9) 求解 u_i, p, σ'_{ij}•

§ 3. 非牛顿流体流动问题的最大功率消耗原理(双变量 u_i, σ'_{ij})

由于牛顿流体与非牛顿流体的差别在于本构方程的差异, 而本构关系的差别在功率消耗泛函中就表现为粘性耗散功率项的差别, 由于单位体积流体的粘性耗散功率一般地可表示成

$$A = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma'_{ij} d\varepsilon_{ij} \tag{3.1}$$

与固体力学中势能和余能的关系相似, 并注意到 σ'_{ij} 的对称性, (3.1) 式也可表示成

$$A = \sigma'_{ij}\varepsilon_{ij} - \int_0^{\sigma'_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij} u_{i,j} - \tau \tag{3.2}$$

至此, 我们便可把文献[1] 中关于不可压缩牛顿粘性流体流动问题的变分原理推广到非牛顿流体的流动问题中而得到如下的非牛顿流体流动问题的最大功率消耗原理:

在一切满足连续性方程(2.9) 和边界条件(2.11) 、(2.12) 的 u_i 和任意选取的 σ'_{ij} 中, 使下列流体功率消耗泛函

$$\Pi = \Pi_0 + \iiint_\Omega [\sigma'_{ij} u_{i,j} - \tau - \rho F_i u_i] d\Omega - \iint_{\Gamma_\sigma} f_i u_i ds \tag{3.3}$$

取极大值者, 即为非牛顿流体流动问题的正确解• 这里泛函 Π_0 的变分为

$$\delta\Pi_0 = \iiint_\Omega \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k u_{i,k}\right)\delta u_i d\Omega \tag{3.4}$$

证明 设 u_i, σ'_{ij} 发生变分 $\delta u_i, \delta\sigma'_{ij}$, 则

$$\Pi(u_i+\delta u_i,\sigma'_{ij}+\delta\sigma'_{ij})=\Pi(u_i,\sigma'_{ij})+\delta\Pi+\delta^2\Pi+\cdots \tag{3.5}$$

$$\delta\Pi=\delta\Pi_0+\iiint_\Omega\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\delta\sigma'_{ij}+\frac{1}{2}\sigma'_{ij}\delta(u_{i,j}+u_{j,i})-\frac{\partial\tau}{\partial\sigma'_{ij}}\delta\sigma'_{ij}-\rho F_i\delta u_i\right]d\Omega$$
$$-\iint_{\Gamma_\sigma}f_i\delta u_i ds \tag{3.6}$$

$$\delta^2\Pi=\delta^2\Pi_0+\iiint_\Omega\left[\frac{1}{2}\delta(u_{i,j}+u_{j,i})\delta\sigma'_{ij}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\tau}{\partial\sigma'_{ij}\partial\sigma'_{pq}}\delta\sigma'_{pq}\delta\sigma'_{ij}\right]d\Omega \tag{3.7}$$

其中 $\delta\Pi_0$ 见式(3.4)，而

$$\delta^2\Pi_0=\iiint_\Omega\rho\delta\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_ku_{i,k}\right)\delta u_i d\Omega \tag{3.8}$$

由于连续性方程(2.9)是变分约束条件，故有

$$\delta u_{k,k}=0 \tag{3.9}$$

因此

$$\delta_{ij}p\,\delta u_{i,j}=p\,\delta u_{i,i}=0 \tag{3.10}$$

而

$$0.5\sigma'_{ij}\delta(u_{i,j}+u_{j,i})=\sigma'_{ij}\,\delta u_{i,j} \tag{3.11}$$

于是式(3.6)可写成

$$\delta\Pi=\delta\Pi_0+\iiint_\Omega\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})-\frac{\partial\tau}{\partial\sigma'_{ij}}\right]\delta\sigma'_{ij}d\Omega+\iiint_\Omega[-\delta_{ij}p+\sigma'_{ij}]\delta u_{i,j}d\Omega$$
$$-\iiint_\Omega\rho F_i\delta u_i d\Omega-\iint_{\Gamma_\sigma}f_i\delta u_i ds \tag{3.12}$$

因边界条件(2.11)和(2.12)式为变分约束条件，故有

$$\delta u_i=0\qquad 在\ \Gamma_s,\ \Gamma_u\ 上 \tag{3.13}$$

于是按 Green 定理，我们有

$$\iiint_\Omega[-\delta_{ij}p+\sigma'_{ij}]\delta u_{i,j}d\Omega=\iint_{\Gamma_\sigma}[-\delta_{ij}p+\sigma'_{ij}]n_j\delta u_i ds-\iiint_\Omega[-p_{,i}+\sigma'_{ij,j}]\delta u_i d\Omega$$
$$\tag{3.14}$$

因此

$$\delta\Pi=\iiint_\Omega\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_ku_{i,k}+p_{,i}-\sigma'_{ij,j}-\rho F_i\right]\delta u_i d\Omega+\iiint_\Omega\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right.$$
$$\left.-\frac{\partial\tau}{\partial\sigma'_{ij}}\right]\delta\sigma'_{ij}d\Omega+\iint_{\Gamma_\sigma}[(-\delta_{ij}p+\sigma'_{ij})n_j-f_i]\delta u_i ds \tag{3.15}$$

若 u_i, σ'_{ij} 使 Π 取驻值，即 $\delta\Pi=0$，则由 δu_i 和 $\delta\sigma'_{ij}$ 在 Ω 中的变分独立性及 δu_i 在 Γ_σ 上的变分独立性知，u_i, σ'_{ij} 满足

$$\rho(\partial u_i/\partial t+u_ku_{i,k})-\rho F_i+p_{,i}-\sigma'_{ij,j}=0\qquad 在\ \Omega\ 中 \tag{3.16}$$

$$(\partial\tau/\partial\sigma'_{ij})-(u_{i,j}+u_{j,i})/2=0\qquad 在\ \Omega\ 中 \tag{3.17}$$

$$(-\delta_{ij}p+\sigma'_{ij})n_j-f_i=0\qquad 在\ \Gamma_\sigma\ 上 \tag{3.18}$$

式(3.16)、(3.17)和(3.18)即为方程(2.7)、(2.8)和边界条件(2.10)，因此在变分约束条件下，使泛函 Π 取驻值的 u_i, σ'_{ij} 将满足非牛顿流体流动问题的所有方程和边界条件，是问题的正确解· 现在我们要证明该驻值为极大值· 从式(3.5)知，此时只要证明 $\delta^2\Pi\leqslant 0$ 即可· 为此对式(3.16)取变分得

$$\rho\delta(\partial u_i/\partial t+u_k u_{i,k})+\delta p_{,i}-\delta\sigma'_{ij,j}=0 \tag{3.19}$$

于是式(3.8)可写成

$$\delta^2\Pi_0=\iiint_\Omega[-\delta p_{,i}\ \delta u_i+\delta\sigma'_{ij,j}\ \delta u_i]\,d\Omega \tag{3.20}$$

运用 Green 定理和式(3.9)、(3.13),我们有

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega-\delta p_{,i}\ \delta u_i d\Omega&=\iint_{\Gamma_u+\Gamma_s+\Gamma_\sigma}-\delta p\, n_i\delta u_i ds+\iiint_\Omega\delta p\,\delta u_{i,i}d\Omega\\&=\iint_{\Gamma_\sigma}-\delta p\, n_i\delta u_i ds\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega\delta\sigma'_{ij,j}\ \delta u_i d\Omega&=\iint_{\Gamma_u+\Gamma_s+\Gamma_\sigma}\delta\sigma'_{ij}n_j\delta u_i ds-\iiint_\Omega\delta\sigma'_{ij}\ \delta\varepsilon_{ij}d\Omega\\&=\iint_{\Gamma_\sigma}\delta\sigma'_{ij}n_j\delta u_i ds-\iiint_\Omega\delta\sigma'_{ij}\ \delta\varepsilon_{ij}d\Omega\end{aligned} \tag{3.22}$$

于是式(3.20)可写成

$$\delta^2\Pi_0=\iint_{\Gamma_\sigma}(-\delta p\,\delta_{ij}+\delta\sigma'_{ij})n_j\delta u_i ds-\iiint_\Omega\delta\sigma'_{ij}\ \delta\varepsilon_{ij}d\Omega \tag{3.23}$$

对式(3.18)、(3.17)分别进行变分后得

$$(-\delta p\,\delta_{ij}+\delta\sigma'_{ij})n_j=0 \tag{3.24}$$

$$\delta\varepsilon_{ij}=(\partial^2\tau/\partial\sigma'_{ij}\partial\sigma'_{pq})\,\delta\sigma'_{pq} \tag{3.25}$$

将(3.24)、(3.25)代入(3.23)得

$$\delta^2\Pi_0=-\iiint_\Omega\frac{\partial^2\tau}{\partial\sigma'_{ij}\partial\sigma'_{pq}}\delta\sigma'_{pq}\delta\sigma'_{ij}d\Omega \tag{3.26}$$

将上式和(3.25)代入(3.7)得

$$\delta^2\Pi=-\frac{1}{2}\iiint_\Omega\frac{\partial^2\tau}{\partial\sigma'_{ij}\partial\sigma'_{pq}}\delta\sigma'_{pq}\delta\sigma'_{ij}d\Omega \tag{3.27}$$

对于本构关系为 $\varepsilon_{ij}=\partial\tau/\partial\sigma'_{ij}$ 的非牛顿流体而言,一般地满足

$$(\partial^2\tau/\partial\sigma'_{ij}\partial\sigma'_{pq})\,\delta\sigma'_{pq}\delta\sigma'_{ij}\geqslant 0 \tag{3.28}$$

故按式(3.27)有

$$\delta^2\Pi\leqslant 0 \tag{3.29}$$

即上述泛函的驻值为极大值. 至此我们证明了非牛顿流体流动问题的最大功率消耗原理.

§4. 非牛顿流体流动问题的广义变分原理(三变量 u_i,p,σ'_{ij})

在上述变分原理中,有三个变分约束条件,即连续性方程(2.9)式和流速边界条件(2.11)、(2.12)式. 为了解除这些变分约束条件而使之成为泛函取驻值的自然条件,我们分别在 Ω 中和 Γ_s, Γ_u 上引入三个拉氏乘子 ε, λ_i 和 π_i 把这三个变分约束条件引入泛函而得到新的泛函

$$\Pi^*=\Pi+\iiint_\Omega\varepsilon u_{i,i}d\Omega+\iint_{\Gamma_s}\lambda_i u_i ds+\iiint_{\Gamma_u}\pi_i(u_i-\bar{u}_i)ds \tag{4.1}$$

其中泛函 Π 见(3.3)式.

对式(4.1)进行变分,并运用 Green 定理得

$$\delta\Pi^*=\iiint_\Omega\left[\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k u_{i,k}\right)-\rho F_i-\varepsilon_{,i}-\sigma'_{ij,j}\ \delta u_i d\Omega+\iiint_\Omega\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right.\right. \qquad)$$

$$
\begin{aligned}
&-\left.\frac{\partial\tau}{\partial\sigma'_{ij}}\right]\delta\sigma'_{ij}d\Omega+\iiint_{\Omega}u_{k,k}\delta\varepsilon d\Omega+\iint_{\Gamma_\sigma+\Gamma_u+\Gamma_s}(\varepsilon n_i+\sigma'_{ij}n_j)\delta u_i ds\\
&+\iint_{\Gamma_s}(u_i\delta\lambda_i+\lambda_i\delta u_i)ds+\iint_{\Gamma_u}[(u_i-u_i)\delta\pi_i+\pi_i\delta u_i]ds-\iint_{\Gamma_\sigma}f_i\delta u_i ds\\
=&\iiint_{\Omega}\left[\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k u_{i,k}\right)-\rho F_i-\varepsilon_{,i}-\sigma'_{ij,j}\right]\delta u_i d\Omega+\iiint_{\Omega}\left[\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right.\\
&-\left.\frac{\partial\tau}{\partial\sigma'_{ij}}\right]\delta\sigma'_{ij}d\Omega+\iiint_{\Omega}u_{k,k}\delta\varepsilon d\Omega+\iint_{\Gamma_s}u_i\delta\lambda_i ds+\iint_{\Gamma_s}[(\varepsilon\delta_{ij}+\sigma'_{ij})n_j\\
&+\lambda_i]\delta u_i ds+\iint_{\Gamma_u}(u_i-u_i)\delta\pi_i ds+\iint_{\Gamma_u}[(\varepsilon\delta_{ij}+\sigma'_{ij})n_j+\pi_i]\delta u_i ds\\
&+\iint_{\Gamma_\sigma}[(\varepsilon\delta_{ij}+\sigma'_{ij})-f_i]\delta u_i ds
\end{aligned}\tag{4.2}
$$

于是由泛函 Π^* 的驻值条件 $\delta\Pi^*=0$, 我们有

$$\rho(\partial u_i/\partial t+u_k u_{i,k})-\rho F_i-\varepsilon_{,i}-\sigma'_{ij,j}=0 \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{4.3a}$$

$$(u_{i,j}+u_{j,i})/2-\partial\tau/\partial\sigma'_{ij}=0 \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{4.3b}$$

$$u_{k,k}=0 \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{4.3c}$$

$$u_i-u_i=0 \qquad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \tag{4.3d}$$

$$\pi_i+(\varepsilon\delta_{ij}+\sigma'_{ij})n_j=0 \qquad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \tag{4.3e}$$

$$u_i=0 \qquad \text{在 } \Gamma_s \text{ 上} \tag{4.3f}$$

$$\lambda_i+(\varepsilon\delta_{ij}+\sigma'_{ij})n_j=0 \qquad \text{在 } \Gamma_s \text{ 上} \tag{4.3g}$$

$$(\varepsilon\delta_{ij}+\sigma'_{ij})n_j-f_i=0 \qquad \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \tag{4.3h}$$

比较(4.3a)和(3.16)式得

$$\varepsilon=-p \qquad \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{4.4}$$

将上式代入(4.3e)、(4.3g)和(4.3h)式分别得到

$$\pi_i=-(-p\delta_{ij}+\sigma'_{ij})n_j \qquad \text{在 } \Gamma_u \text{ 上} \tag{4.5}$$

$$\lambda_i=-(-p\delta_{ij}+\sigma'_{ij})n_j \qquad \text{在 } \Gamma_s \text{ 上} \tag{4.6}$$

$$f_i=-(-p\delta_{ij}+\sigma'_{ij})n_j \qquad \text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 上} \tag{4.7}$$

这里式(4.5)、(4.6)分别给出了拉氏乘子 π_i, λ_i 的识别结果而式(4.7)则是受力边界条件• 其余的(4.3b)、(4.3c)、(4.3d)和式(4.3f)分别是本构关系、连续性方程、来流边界条件和固壁边界条件• 至此, 我们通过泛函 Π^* 的驻值条件, 求得全部拉氏乘子和非牛顿流体流动问题的全部定解方程和边界条件•

把 ε, π_i 和 λ_i 的表达式(4.3)、(4.4)和(4.5)代入(4.1), 便得到非牛顿流体流动问题的广义变分原理的泛函为

$$\Pi^*=\Pi-\iiint_{\Omega}p u_{k,k}d\Omega-\iint_{\Gamma_s}(-p\delta_{ij}+\sigma'_{ij})n_j u_i ds-\iiint_{\Gamma_u}(-p\delta_{ij}+\sigma'_{ij})n_j(u_i-u_i)ds \tag{4.8}$$

于是, 非牛顿流体流动问题的广义变分原理为:

在一切 u_i, p, σ'_{ij} 中, 使泛函(4.8)为驻值的 u_i, p, σ'_{ij} 必为非牛顿流体流动问题的正确解• 即泛函 Π^* 的驻值条件给出了 u_i, p, σ'_{ij} 定解问题的所有方程和边界条件•

§5. 结束语

本文对本构关系为 $\varepsilon_{ij}=\partial\tau/\partial\sigma'_{ij}$ 的非牛顿流体的流动问题,将文献[1]中的牛顿粘性流体流动问题的最大功率消耗原理进行了推广,并用拉氏乘子法导出了相应的广义变分原理· 由于本构关系的特殊性,此类非牛顿流体流动问题的求解未知量中必须包括 σ'_{ij},这与牛顿流体和广义牛顿流体的定解问题有一定差别· 本文的工作将为建立此类非牛顿流体流动问题的混合有限元法提供理论基础·

参考文献

1 钱伟长,粘性流体力学的变分原理和广义变分原理,应用数学和力学,**5**(3) (1984),305.

2 C. C. Lin and L. Rubinov, On the flow behind curved shocks, J. Math. Physics, **27** (1945), 105.

3 V. I. Skobelkin, Variational principle in hydrodynamics, Soviet Physics_JETP, **4**(1) (1957), 68.

4 K. G. Guderly, An extremum principle for three dimensional compressible inviscid flows, SIAN, J. Appl. Math., **23**(27) (1972), 259.

5 A. R. Manwell, A variational principle of steady homogenetic compressible flow with finite shocks, Wave Motion, **2** (1980), 83.

6 M. Hafez and D. Lovell, Numerical solution of transonic stream function equation, AIAA Journal, **21** (3) (1983).

7 沈敏、孙其仁,一类非牛顿流体流动问题的变分原理和广义变分原理,应用数学和力学,**16**(4) (1995),345.

8 M. J. Grochet, A. R. Davis and K. Walters, Numerical Simulation of Non_Newtonian Flow, Elsevier (1984).

Variational Principles in Hydrodynamics of a Non_Newtonian Fluid

Shen Min

(Shanghai Institute of Applied Mathematics & Mechanics, Shanghai University, Shanghai 200072, P.R.China)

Abstract

In this paper, the principle of maximum power losses for the incompressible viscous fluid proposed by professor Chien Weizang in reference [1] is further extended to the hydrodyamic problem of the non_Newtonian fluid with constitutive law expressed as $\varepsilon_{ij}=\partial\tau/\partial\sigma'_{ij}$. The constraint conditions of variation are eliminated by the method of identified Lagrangian multiplier and a generalized variational principle is established.

Key words non_Newtonian fluid, variational principle, Lagrangian multiplier