应用数学和力学, 第 19 卷 第 9 期(1998 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

概率赋范空间中的非线性半群与微分包含*

张石生①　陈玉清①

(1996 年 12 月 30 日收到, 1998 年 2 月 20 日收到修改稿)

摘　　要

本文的目的是在概率赋范空间中引入和研究非线性压缩半群, 并对增生映象建立 Crandall_Liggett 指数公式• 作为应用, 我们将应用这些结果研究概率赋范空间中一类具增生映象的微分包含的 Cauchy 问题解的存在性•

关键词　非线性压缩半群　概率赋范空间　Crandall_Liggett 指数公式　半内积　增生映象
中图分类号　O177

§1. 引　　论

由 F. E. Browder[3] 和 T. Kato[11] 所独立引入的增生映象的概念在集值非线性算子理论及 Banach 空间中的微分方程和偏微分方程中起着极为重要的作用• 另一方面, 许多作者对 Banach 空间和 Hilbert 空间中的非线性压缩半群、微分方程及发展方程已得出了许多重要结果(见, 例如[1, 2, 7, 8, 12, 13])• 最近, 在[5]和[9]中作者们在概率赋范空间中引入了增生映象的概念并研究了它的某些基本性质•

本文的目的是在概率赋范空间中引入和研究非线性压缩半群• 本文证明: 如果 A 是概率赋范空间中满足值域条件的增生映象, 则 A 生成一非线性压缩半群• 作为应用, 我们将应用这一结果研究概率赋范空间中一类具增生映象的微分包含解的存在性问题•

为方便起见, 我们先追述某些定义和符号(见[5, 6, 16])•

文中处处用 $\mathscr{D}$ 表定义在 $\mathbb{R}$ 上的分布函数的集合, 即如果 $f\in\mathscr{D}$, 则 f 是不减的、左连续的, $\sup_{t\in\mathbb{R}} f(t)=1$ 且 $\inf_{t\in\mathbb{R}} f(t)=0$•

定义 1.1　一概率赋范空间(简称 PN_空间) 是一有序对 $(E,\mathscr{F})$, 其中 E 是一实线性空间, $\mathscr{F}: E\to\mathscr{D}$ 是一映象(记 $\mathscr{F}(x)$ 以 F_x)满足下列条件: 对任意的 $x, y\in E$:

(PN_1) $F_x(t)=0,\ \forall t>0$ 当而且仅当 $x=0$;

(PN_2) $F_x(0)=0$;

(PN_3) $F_{\alpha x}(t)=F_x\left(\dfrac{t}{|\alpha|}\right)\quad(\forall\alpha\in\mathbb{R},\ \alpha\neq 0)$;

(PN_4) 如果 $F_x(t_1)=1$, $F_y(t_2)=1$, 则 $F_{x+y}(t_1+t_2)=1$•

* 国家自然科学基金资助课题
① 四川大学数学系, 成都 610064

定义 1.2 一映象 $\Delta: [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 称为一 t_范数, 如果满足下列条件: 对任意的 $a, b, c, d\in[0,1]$

(T_1) $\Delta(a,1) = a;$

(T_2) $\Delta(a,b) = \Delta(b,a);$

(T_3) $\Delta(c,d) \geqslant \Delta(a,b)$ (当 $c\geqslant a;\ d\geqslant b$ 时)

(T_4) $\Delta(\Delta(a,b),c) = \Delta(a,\Delta(b,c))$·

一Menger PN_空间是一三元组$(E,\mathscr{F},\Delta)$, 其中$(E,\mathscr{F})$是一PN_空间, Δ是一t_范数且满足条件:

(PN_4)′ $F_{x+y}(t_1+t_2) \geqslant \Delta(F_x(t_1), F_y(t_2)) \quad (\forall x, y\in E, t_1, t_2\in \mathbb{R}^+ = [0,+\infty))$·

定义 1.3[5] 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一Menger PN_空间·

(i) $A: D(A)\subset E\to 2^E$ 称为增生映象, 如果

$F_{x-y}(t) \geqslant F_{x-y+\lambda(u-v)}(t)$ $(\forall x, y\in D(A), u\in Ax, v\in Ay$ 且 $\lambda>0)$

(ii) A 称为极大增生映象, 如果

$F_{x-y_0}(t) \geqslant F_{x-y_0+\lambda(u-v_0)}(t)$ $(\forall x\in D(A), u\in Ax$ 且 $\lambda>0)$, 则 $y_0\in D(A)$ 且 $v_0\in Ay_0$

(iii) A 称为m_增生的, 如果 A 是增生的, 且 $I+A$ 是满射的·

(iv) A 称为强增生的, 如果存在 $k\in(0,1)$ 使得

$$F_{(\lambda-k)(x-y)}(t) \geqslant F_{(\lambda-1)(x-y)+u-v}(t)$$

对一切 $x, y\in D(A), u\in Ax, v\in Ay$ 且 $\lambda>k$·

(v) A 称为耗散的(极大耗散的、m_耗散的)如果$-A$ 是增生的(极大增生的、m_增生的)·

§2. Menger PN_空间中的半内积

本文中处处设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一Menger PN_空间·

对任一 $\lambda\in(0,1]$, 定义一实的非负函数 $P_\lambda: E\to \mathbb{R}^+$ 如下:

$$P_\lambda(x) = \inf\{t: F_x(t) > 1-\lambda\} \quad (\forall x\in E) \qquad le$$

由 $P_\lambda(x)$ 的定义, 易于证明下面的结论成立:

命题 2.1 设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一Menger PN_空间, Δ满足条件: $\Delta(t,t)\geqslant t$, $\forall t\in[0,1]$, 则对任一 $\lambda\in(0,1)$

(i) $P_\lambda(\alpha x) = |\alpha| P_\lambda(x) \quad (\forall \alpha\in \mathbb{R}, x\in E);$

(ii) $P_\lambda(x+y) \leqslant P_\lambda(x) + P_\lambda(y) \quad (\forall x, y\in E);$

(iii) 对给定的 $x, y\in E$, $\dfrac{P_\lambda(x+ty) - P_\lambda(x)}{t}$ 关于 $t\in(0,+\infty)$ 是不减的;

(iv) 对任意的 $x, y\in E$, $\dfrac{P_\lambda(x) - P_\lambda(x-ty)}{t}$ 关于 $t\in(0,+\infty)$ 是不增的·

由命题 2.1 知, 下面的二极限存在:

$$\lim_{t\to0^+}\frac{P_\lambda(x+ty)-P_\lambda(x)}{t}, \qquad \lim_{t\to0^+}\frac{P_\lambda(x)-P_\lambda(x-ty)}{t}$$

以后, 我们记

$$[x, y]^+_\lambda = \lim_{t\to0^+}\frac{P_\lambda(x+ty)-P_\lambda(x)}{t},$$

$$[x, y]^-_\lambda = \lim_{t \to 0^+} \frac{P_\lambda(x) - P_\lambda(x - ty)}{t}$$

下面我们给出$[x, y]^{\pm}$的某些基本性质:

引理 2.1 设$(E, \mathscr{T}, \Delta)$是满足 $\Delta(t, t) \geqslant t$ $(\forall t \in [0, 1])$的Menger PN_空间,则下之结论成立:

(i) $[x, y]^-_\lambda \leqslant [x, y]^+_\lambda$;

(ii) $|[x, y]^{\pm}_\lambda| \leqslant P_\lambda(y)$, 且$[x, \alpha x]^{\pm}_\lambda = \alpha P_\lambda(x)$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$;

(iii) $|[x, y]^{\pm}_\lambda - [x, z]^{\pm}_\lambda| \leqslant P_\lambda(y - z)$;

(iv) $[x, y]^+_\lambda = -[x, -y]^-_\lambda = -[-x, y]^-_\lambda$;

(v) $[sx, ry]^{\pm}_\lambda = r[x, y]^{\pm}_\lambda$ $(\forall r, s \geqslant 0)$;

(vi) $[x, y + z]^+_\lambda \leqslant [x, y]^+_\lambda + [x, z]^+_\lambda$,

$[x, y + z]^-_\lambda \geqslant [x, y]^-_\lambda + [x, z]^-_\lambda$

(vii) $[x, y + z]^+_\lambda \geqslant [x, y]^+_\lambda + [x, z]^-_\lambda$,

$[x, y + z]^-_\lambda \leqslant [x, y]^-_\lambda + [x, z]^+_\lambda$;

(viii) $[x, y + \alpha x]^{\pm}_\lambda = [x, y]^{\pm}_\lambda + \alpha P_\lambda(x)$ $\quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$;

(ix) 如果$x(t): [a, b] \to E$ 关于$t \in (a, b)$ 可微且 $\varphi_\lambda(t) = P_\lambda(x(t))$, 则

$$D^+ \varphi_\lambda(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P_\lambda(x(t + h)) - P_\lambda(x(t))}{h} = [x(t), x'(t)]^+_\lambda;$$

$$D^- \varphi_\lambda(t) = \lim_{h \to 0^+} \frac{P_\lambda(x(t)) - P_\lambda(x(t - h))}{h} = [x(t), x'(t)]^-_\lambda;$$

(x) $[x, y]^+_\lambda$ 是上半连续的, 而$[x, y]^-_\lambda$ 是下半连续的•

证 性质(i)~(v)易于证明,其详这里省略•

(vi) 因

$$(P_\lambda(x + t(y + z)) - P_\lambda(x))/t$$
$$\leqslant \frac{1}{2t}\{[P_\lambda(x + 2ty) - P_\lambda(x)] + [P_\lambda(x + 2tz) - P_\lambda(x)]\},$$

故得

$$[x, y + z]^+_\lambda \leqslant [x, y]^+_\lambda + [x, z]^+_\lambda$$

同理可证$[x, y + z]^-_\lambda \geqslant [x, y]^-_\lambda + [x, z]^-_\lambda$•

(vii) 因

$$[x, y]^+_\lambda = [x, y + z - z]^+_\lambda \leqslant [x, y + z]^+_\lambda + [x, -z]^+_\lambda,$$

由(iv)得知$[x, -z]^+_\lambda = -[x, z]^-_\lambda$, 故得

$$[x, y + z]^+_\lambda \geqslant [x, y]^+_\lambda + [x, z]^-_\lambda$$

(viii) 由(vi)和(vii)分别可得

$$[x, y + \alpha x]^+_\lambda \leqslant [x, y]^+_\lambda + [x, \alpha x]^+_\lambda = [x, y]^+_\lambda + \alpha P_\lambda(x),$$
$$[x, y + \alpha x]^+_\lambda \geqslant [x, y]^+_\lambda + [x, \alpha x]^-_\lambda = [x, y]^+_\lambda + \alpha P_\lambda(x),$$

故得

$$[x, y + \alpha x]^+_\lambda = [x, y]^+_\lambda + \alpha P_\lambda(x)•$$

同理可证$[x, y + \alpha x]^-_\lambda = [x, y]^-_\lambda + \alpha P_\lambda(x)$

(ix) 因

$$
\begin{aligned}
&|D^{+}\varphi_{\lambda}(t)-[x(t),x'(t)]^{+}_{\lambda}|\\
&=\left|\lim_{h\to 0^+}\frac{P_\lambda(x(t+h))-P_\lambda(x(t))}{h}-\lim_{h\to 0^+}\frac{P_\lambda(x(t)+hx'(t))-P_\lambda(x(t))}{h}\right|\\
&=\left|\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}(P_\lambda(x(t+h)-P_\lambda(x(t)+hx'(t)))\right|\\
&\leqslant\lim_{h\to 0^+}\left|\frac{1}{h}(P_\lambda(x(t+h)-x(t)-hx'(t)))\right|\\
&=\lambda\lim_{h\to 0^+}\left|P_\lambda\left(\frac{x(t+h)-x(t)-hx'(t)}{h}\right)\right|=0,
\end{aligned}
$$

故结论(ix)成立•

(x) 令 $x_n\to x, y_n\to y$, 因

$$[x_n,y_n]^{+}_{\lambda}\leqslant\frac{1}{t}(P_\lambda(x_n+ty_n)-P_\lambda(x_n))\qquad(\forall t>0),$$

故有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}[x_n,y_n]^{+}_{\lambda}\leqslant\frac{1}{t}(P_\lambda(x+ty)-P_\lambda(x))$$

令 $t\to 0^+$, 即得 $\overline{\lim_{n\to\infty}}[x_n,y_n]^{+}_{\lambda}\leqslant[x,y]^{+}_{\lambda}$, 这表明 $[x,y]^{+}_{\lambda}$ 是上半连续的•

类似地, 可证 $[x,y]^{-}_{\lambda}$ 是下半连续的, 引理得证

下面我们定义一映象 $j_\lambda: E\to 2^{E^*}$ (E^* 是 E 的对偶空间) 如下:

$$j_\lambda(x)=\left\{f_\lambda\in E^*: f_\lambda(x)=P_\lambda(x),[x,y]^{-}_{\lambda}\leqslant f_\lambda(y)\leqslant[x,y]^{+}_{\lambda}, y\in E\right.$$

现证对任一 $x\in E, j_\lambda(x)\neq\emptyset$• 事实上, 对任一 $y_0\in E$, 定义 $f_\lambda(\alpha y_0)=\alpha[x,y_0]^{+}_{\lambda}\quad(\forall\alpha\in\mathbb{R})$

(a) 如果 $\alpha\geqslant 0$, 则 $f_\lambda(\alpha y_0)=[x,\alpha y_0]^{+}_{\lambda}$;

(b) 如果 $\alpha<0$, 则

$$
\begin{aligned}
\alpha[x,y_0]^{+}_{\lambda}&=-|\alpha|[x,y_0]^{+}_{\lambda}=-[x,|\alpha|y_0]^{+}_{\lambda}\\
&=[x,-|\alpha|y_0]^{-}_{\lambda}=[x,\alpha y_0]^{-}_{\lambda}\\
&\leqslant[x,\alpha y_0]^{+}_{\lambda}
\end{aligned}
$$

故有 $f_\lambda(\alpha y_0)\leqslant[x,\alpha y_0]^{+}_{\lambda}(\forall\alpha\in\mathbb{R})$• 由引理 2.1 的(v) 和(vi) 知 $[x,y]^{+}_{\lambda}$ 关于 $y\in E$ 是次加性的, 由 Hahn_Banach 定理([15]), 存在线性泛函 $f_\lambda: E\to\mathbb{R}$ 使得 $f_\lambda(\alpha y_0)=f_\lambda(\alpha y_0)$ 而且 $-[x,-y]^{+}_{\lambda}\leqslant f_\lambda(y)\leqslant[x,y]^{+}_{\lambda}(\forall y\in E)$, 即有

$$[x,y]^{-}_{\lambda}\leqslant f_\lambda(y)\leqslant[x,y]^{+}_{\lambda}$$

特别有 $f_\lambda(x)=[x,x]^{+}_{\lambda}=P_\lambda(x)$

f_λ 的连续性, 由 $|f_\lambda(x)|\leqslant|[x,y]^{+}_{\lambda}|\leqslant P_\lambda(y)$ 直接可得• 从而得知 $f_\lambda\in j_\lambda(x)$, 结论得证•

另外, 我们还可证明 $j_\lambda(x)$ 是凸的, 故由 Banach_Alaoglu 定理有下面的

命题 2.2 对每一 $x\in E$, $\lambda\in(0,1]$, $j_\lambda(x)$ 是 E^* 中的非空凸的弱* 紧子集•

由上面的讨论及命题 2.2, 可得下面的

命题 2.3 $[x,y]^{+}_{\lambda}=\max\left\{f_\lambda(y),f_\lambda\in j_\lambda(x)\right\}$ 且 度

$$[x,y]^{-}_{\lambda}=\min\left\{f_\lambda(y):f_\lambda\in j_\lambda(x)\right\}$$

定义 2.1 (i) 称 $(x, y)_\lambda^+ = P_\lambda(x)\cdot[x, y]_\lambda^+$ 为关于 $\lambda \in (0, 1]$ 的上半内积;

(ii) 称 $(x, y)_\lambda^- = P_\lambda(x)\cdot[x, y]_\lambda^-$ 为关于 $\lambda \in (0, 1]$ 的下半内积.

半内积的某些基本性质请见[14].

定义 2.2 由下式定义的映象 $\mathscr{J}_\lambda: E \to 2^{E^*}$:

$$\mathscr{J}_\lambda(x) = \left\{P_\lambda(x): f_\lambda \cdot f_\lambda \in j_\lambda(x)\right\} \quad (\forall x \in E)$$

称为关于 $\lambda \in (0, 1]$ 的对偶映象.

由引理2.1知下面的推论成立:

推论 2.1 (i) $(x, y)_\lambda^- \leqslant (x, y)_\lambda^+$;

(ii) $|(x, y)_\lambda^\pm| \leqslant P_\lambda(x)\cdot P_\lambda(y)$ 且 $(x, \alpha x)_\lambda^\pm \leqslant \alpha P_\lambda^2(x) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$;

(iii) $|(x, y)_\lambda^\pm - (x, z)_\lambda^\pm| \leqslant P_\lambda(x)\cdot P_\lambda(y - z)$;

(iv) $(x, y)_\lambda^+ = (-x, -y)_\lambda^- = -(-x, y)_\lambda^-$;

(v) $(sx, ry)_\lambda^\pm = s\cdot r\cdot(x, y)_\lambda^\pm \quad (\forall r, s \geqslant 0)$;

(vi) $(x, y + z)_\lambda^+ \leqslant (x, y)_\lambda^+ + (x, z)_\lambda^+$ 且

$(x, y + z)_\lambda^- \geqslant (x, y)_\lambda^- + (x, z)_\lambda^-$;

(vii) $(x, y + z)_\lambda^+ \geqslant (x, y)_\lambda^+ + (x, z)_\lambda^-$ 而且

$(x, y + z)_\lambda^- \leqslant (x, y)_\lambda^- + (x, z)_\lambda^+$;

(viii) $(x, y + \alpha x)_\lambda^\pm = (x, y)_\lambda^\pm + \alpha P_\lambda^2(x) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$;

(ix) 如果 $x(t): [a, b] \to E$ 关于 $t \in (a, b)$ 可微且 $\varphi_\lambda(t) = P_\lambda^2(x(t))$, 则 $D^+\varphi_\lambda(t) = 2(x(t), x'(t))_\lambda^+$ 且 $D^-\varphi_\lambda(t) = 2(x(t), x'(t))_\lambda^-$;

(x) $(x, y)_\lambda^+$ 是上半连续的, 而 $(x, y)_\lambda^-$ 是下半连续的.

§3. PN_空间中的增生映象和非线性半群

本节中, 我们总假定 $(E, \mathscr{F}, \Delta)$ 是一完备的 Menger PN_空间且 $\Delta(t, t) \geqslant t \quad \forall t \in [0, 1]$.

引理 3.1 设 $A: D(A) \subset E \to 2^E$ 是一映象, 则下列结论等价:

(i) A 是增生的;

(ii) $P_\lambda(x - y) \leqslant P_\lambda(x - y + \varepsilon(u - v))(\forall x, y \in D(A), u \in Ax, v \in Ay$ 而且对一切 $\varepsilon > 0, \lambda \in (0, 1])$;

(iii) $[x - y, u - v]_\lambda^+ \geqslant 0\ (\forall x, y \in D(A), u \in Ax, v \in Ay$ 且 $\lambda \in (0, 1])$.

证 (i)$\Leftrightarrow$(ii), 如果 A 是增生的, 则

$$F_{x-y}(t) \geqslant F_{x-y+\varepsilon(u-v)}(t) \ (\forall x, y \in D(A), u \in Ax, v \in Ay \text{ 且 } \varepsilon > 0)$$

此外, 对给定的 $x, y \in D(A), u \in Ax, v \in Ay$ 及 $\varepsilon > 0$ 令

$$P_\lambda(x - y + \varepsilon(u - v)) = \inf\left\{t: F_{x-y+\varepsilon(u-v)}(t) > 1 - \lambda\right\}$$

另

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{t_n: F_{x-y+\varepsilon(u-v)}(t_n) > 1 - \lambda\right\}$$

则有 $F_{x-y}(t_n) > 1 - \lambda\ (\forall n \geqslant 1)$, 从而有

$$P_\lambda(x - y) = \inf\left\{t: F_{x-y}(t) > 1 - \lambda\right\} \leqslant \lim_{n\to\infty} t_n .$$

上式表明结论(ii)成立.

反之, 设(ii)成立, 而(i)不成立, 于是存在 $x_0, y_0 \in D(A)$, $\varepsilon_0 > 0$, $u_0 \in Ax_0$, $v_0 \in Ay_0$ 及

$t_0 > 0$ 使得

$$F_{x_0-y_0}(t_0) < F_{x_0-y_0+\varepsilon_0(u_0-v_0)}(t_0)$$

故存在 $\lambda_0 \in (0,1]$ 使得 $F_{x_0-y_0}(t_0) = 1-\lambda_0$, 这就得出

$$P_{\lambda_0}(x_0-y_0) = \inf\{t: F_{x_0-y_0}(t) > 1-\lambda_0\} \geqslant t_0$$

因 $F_{x_0-y_0+\varepsilon_0(u_0-v_0)}(t_0) > 1-\lambda_0$ 而且 $F_{x_0-y_0+\varepsilon_0(u_0-v_0)}(t)$ 是左连续的, 故存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$F_{x_0-y_0+\varepsilon_0(u_0-v_0)}(t_0-\delta_0) > 1-\lambda_0$$

从而有

$$P_{\lambda_0}(x_0-y_0+\varepsilon_0(u_0-v_0)) \leqslant t_0-\delta_0 < t_0 \leqslant P_{\lambda_0}(x_0-y_0)$$

矛盾! 故结论成立•

(ii) ⇔ (iii), 由命题 2.1(iii) 及 $[\cdot,\cdot]^+_\lambda$ 的定义, 结论显然成立• 证毕

引理 3.2 设 $A: D(A) \subset E \to 2^E$ 是一增生映象, $J_\varepsilon = (I+\varepsilon A)^{-1}(\forall \varepsilon > 0)$, 则

(i) $P_\lambda(J_\varepsilon x - J_\varepsilon y) \leqslant P_\lambda(x-y)$ 且 $F_{J_\varepsilon x - J_\varepsilon y}(t) \geqslant F_{x-y}(t)$ $\forall t > 0$, $\lambda \in (0,1]$, $x, y \in R(I+\varepsilon A)$ ($(I+\varepsilon A)$ 的值域);

(ii) $P_\lambda(J_\varepsilon^n x - x) \leqslant n \cdot P_\lambda(J_\varepsilon x - x)$ $\forall \lambda \in (0,1]$, $n > 0$ (n 为正整数), $x \in R((I+\varepsilon A)^n)$, 且

$$F_{J_\varepsilon^n x - x}(t) \geqslant F_{J_\varepsilon x - x}\left(\frac{t}{n}\right) \qquad (\forall t > 0, x \in R((I+\varepsilon A)^n));$$

(iii) 如果 $x_j \in R(I+\varepsilon A)$ 且 $x_j \to x_0 \in D(A) \cap R(I+\varepsilon A)$, 则

$$\varlimsup_{j\to\infty} P_\lambda(J_\varepsilon x_j - x_j) \leqslant \varepsilon \cdot \inf_{u \in Ax_0} P_\lambda(u) \quad (\forall \lambda \in (0,1]) \text{ 且}$$

$$\in \quad \varliminf_{j\to\infty} F_{J_\varepsilon x_j - x_j}(t) \geqslant \sup_{u \in Ax_0} F_u\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \quad (\forall t > 0)$$

证 (i) 是引理 3.1 和 A 的增生性的直接推论•

(ii) 可由 (i) 直接得之•

下证结论 (iii), 对任给的 $u \in Ax$, 令 $w = x_0 + \varepsilon u$, 于是有

$$x_0 = (I+\varepsilon A)^{-1} w = J_\varepsilon w$$

而且

$$P_\lambda(J_\varepsilon x_j - x_j) \leqslant P_\lambda(J_\varepsilon x_j - J_\varepsilon w) + P_\lambda(J_\varepsilon w - x_j)$$

故得

$$\begin{aligned}\varlimsup_{j\to\infty} P_\lambda(J_\varepsilon x_j - x_j) &\leqslant \varlimsup_{j\to\infty}(P_\lambda(x_j - w) + P_\lambda(x_0 - x_j)) \\ &\leqslant \varlimsup_{j\to\infty} P_\lambda(x_j - w) \\ &\leqslant \varlimsup_{j\to\infty}(P_\lambda(x_j - x_0) + P_\lambda(x_0 - w)) \\ &\leqslant P_\lambda(-\varepsilon u) = \varepsilon P_\lambda(u)\end{aligned}$$

由 $u \in Ax_0$ 的任意性, 故有

$$\varlimsup_{j\to\infty} P_\lambda(J_\varepsilon x_j - x_j) \leqslant \varepsilon \cdot \inf_{u \in Ax_0} P_\lambda(u)$$

另一方面, 因

$$F_{J_\varepsilon x_j - x_j}(t) \geqslant \Delta\left(F_{J_\varepsilon x_j - J_\varepsilon w}\left(t - \frac{\eta}{2}\right), F_{J_\varepsilon w - x_j}\left(\frac{\eta}{2}\right)\right) \qquad ($$

$$\geqslant \Delta\left(F_{x_j-w}\left(t-\frac{\eta}{2}\right), F_{x_0-x_j}\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)$$

而且

$$F_{x_j-w}\left(t-\frac{\eta}{2}\right) \geqslant \Delta\left(F_{x_j-x_0}\left(\frac{\eta}{2}\right), F_{\varepsilon u}(t-\eta)\right) \quad (\forall \eta < t)$$

故有

$$F_{J_\varepsilon x_j - x_j}(t) \geqslant \Delta\left(F_{\varepsilon u}(t-\eta), F_{x_0-x_j}\left(\frac{\eta}{2}\right)\right)$$

从而得知

$$\varliminf_{j\to\infty} F_{J_\varepsilon x_j - x_j}(t) \geqslant F_u\left(\frac{t-\eta}{\varepsilon}\right)$$

又因 $F_u(t)$ 是左连续的, 令 $\eta \to 0^+$, 即得

$$\varliminf_{j\to\infty} F_{J_\varepsilon x_j - x_j}(t) \geqslant F_u\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

因而推出

$$\varliminf_{j\to\infty} F_{J_\varepsilon x_j - x_j}(t) \geqslant \sup_{u\in Ax_0} F_u\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

引理证毕

现在我们可以研究下面的具增生映象 A 的微分包含的 Cauchy 问题:

$$\left.\begin{aligned} &u'(t) \in -Au(t) \qquad (t>0) \\ &u(0) = u_0 \in D(A) \end{aligned}\right\} \tag{E3.1}$$

定义 3.1 函数 $u(\cdot) \in C(\mathbb{R}^+, E)$ 称为(E3.1) 的强解, 如果其满足下面的条件:

(i) $u(0) = u_0$;

(ii) 存在 $y \in E$ 使得

$$F_{u(t)-u(s)}(k) \geqslant F_{(t-s)y}(k) \quad (\forall k>0, t, s \in \mathbb{R}^+)$$

(此时, 我们也称 $u(\cdot)$ 是 Lipschitz 连续的);

(iii) $u(\cdot)$ 的导数 $u'(t)$ 存在且满足

$$u'(t) \in -Au(t) \text{ 对几乎所有的 } t \in (0, +\infty)$$

我们有下面的

定理 3.1 设 $(E, \mathscr{F}, \Delta)$ 是一完备的Menger PN_空间, $\Delta(t,t) \geqslant t$ $(\forall t \in [0,1])$, 设 $A: D(A) \subset E \to 2^E$ 是一增生映象, 则(E3.1) 至多有一强解•

证 设 $u(\cdot), v(\cdot)$ 是(E3.1) 的二强解, 记 $\varphi_\lambda(t) = P_\lambda(u(t)-v(t))$ $(\forall \lambda \in (0,1])$, 于是由引理 2.1(ix) 有

$$D^- \varphi_\lambda(t) = [u(t)-v(t), u'(t)-v'(t)]^-_\lambda$$

故存在 $w(t) \in Au(t), z(t) \in Av(t)$, 使得

$$u'(t) = -w(t), v'(t) = -z(t) \text{ 对几乎所有的 } t \in (0, +\infty)$$

因而有

$$\begin{aligned} D^- \varphi_\lambda(t) &= [u(t)-v(t), (w(t)-z(t))]^-_\lambda \\ &= -[u(t)-v(t), w(t)-z(t)]^+_\lambda \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

故有

$$P_\lambda(u(t)-v(t)) \leqslant P_\lambda(u(0)-v(0)) = 0 \qquad (\forall \lambda \in (0,1])$$

如果对某一 $t_0 \in \mathbb{R}^+$, $u(t_0) - v(t_0) \neq 0$, 则存在 $k_0 > 0$ 使得

$$F_{u(t_0)-v(t_0)}(k_0) < 1$$

令 $F_{u(t_0)-v(t_0)}(k_0) = 1 - \lambda_0$, 则 $\lambda_0 \in (0, 1]$, 从而

$$P_{\lambda_0}(u(t_0) - v(t_0)) = \inf\left\{k: F_{u(t_0)-v(t_0)}(k) > 1 - \lambda_0\right\} \geqslant k_0 > 0$$

这与 $P_{\lambda_0}(u(t_0) - v(t_0)) = 0$ 相矛盾, 从而得证 $u(t) = v(t)$ $(\forall t \in \mathbb{R}^+)$, 定理证毕•

定义 3.2 设 $(E, \mathscr{F}, \Delta)$ 是一完备 Menger PN_空间, C 是 E 之一闭子集, 算子族 $\left\{T(t): C \to E, t \geqslant 0\right\}$ 称为一非线性压缩算子半群, 如果其满足下面的条件:

(i) $T(0)x = x \quad (\forall x \in C)$;

(ii) $T(t)T(s) = T(t+s) \quad (\forall t, s \geqslant 0)$;

(iii) 映象 $t \mapsto T(t)x$ 对任意的 $x \in C$ 是连续的;

(iv) $F_{T(t)x-T(t)y}(k) \geqslant F_{x-y}(k) \quad (\forall x, y \in C, t \geqslant 0$ 且 $k > 0)$

定理 3.2 设 $A: D(A) \subset E \to 2^E$ 是一增生映象且满足下面的条件:

$$(I + \varepsilon A)(D(A)) \supset \overline{D(A)}(D(A) \text{ 的闭包}) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

则对任意的 $x \in \overline{D(A)}$, 下面的极限存在

$$T(t)x = \lim_{\varepsilon \to 0^+} (I + \varepsilon A)^{-\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]} x \quad (\forall t \geqslant 0)$$

其中, $\left[\dfrac{t}{\varepsilon}\right]$ 是不超过 $\dfrac{t}{\varepsilon}$ 的最大整数, 而且 $\left\{T(t): t \geqslant 0\right\}$ 是一非线性压缩半群•

为了证明定理 3.4, 我们需用到下面的

引理 3.3 设 $A: D(A) \subset E \to 2^E$ 是一增生映象, 且 $\overline{D(A)} \subset (I + \varepsilon A)(D(A))$ $\forall \varepsilon > 0$, 则

$$F_{J_\varepsilon^m x - J_\mu^n x}(t) \geqslant \sup_{u \in Ax} F_u\left(t \cdot ((m\varepsilon - n\mu)^2 + m\varepsilon^2 + n\mu^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$\forall x \in D(A)$, $\varepsilon, \mu > 0$ 且 n, m 是非负整数

证 首先证明: 对任意的 $x \in D(A)$, $\varepsilon, \mu > 0$, $\lambda \in (0, 1]$

$$P_\lambda(J_\varepsilon^m x - J_\mu^n x) \leqslant \left\{(m\varepsilon - n\mu)^2 + m\varepsilon^2 + n\mu^2\right\}^{1/2} \cdot \inf_{u \in Ax} P_\lambda(u) \tag{3.1}$$

其中, m, n 是非负整数•

对每一 $x \in D(A)$, $\varepsilon, \mu > 0$, $\lambda \in (0, 1]$, 令

$$P_{m,n} = P_\lambda(J_\varepsilon^m x - J_\mu^n x) \quad (m, n = 0, 1, 2, \cdots)$$

由引理 3.2 的(ii)和(iii), 有

$$P_{m,0} \leqslant m\varepsilon \cdot \inf_{u \in Ax} P_\lambda(u) \qquad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$P_{0,n} \leqslant n\mu \cdot \inf_{u \in Ax} P_\lambda(u) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

上二式表明当 $n = 0$ 或 $m = 0$ 时(3.1) 成立

现设(3.1)对一对整数 $(m-1, n)$, $(m, n-1)$ 成立, 对 $x \in D(J_\varepsilon)$, $y \in D(J_\mu)$, 令 $\delta = \dfrac{\varepsilon\mu}{\varepsilon + \mu}$, 易于验证

$$J_\delta\left(\frac{\mu}{\varepsilon + \mu}x + \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \mu}J_\varepsilon x\right) = J_\varepsilon x$$

$$J_\delta\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + \mu}y + \frac{\mu}{\varepsilon + \mu}J_\mu y\right) = J_\mu y \qquad)$$

于是有

$$P_{m,n} = P_\lambda(J_\varepsilon \cdot J_\varepsilon^{m-1}x - J_\mu \cdot J_\mu^{n-1}x)$$

这

$$= P_\lambda\left\{ J_{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon+\mu}}\left(\frac{\mu}{\varepsilon+\mu}J_\varepsilon^{m-1}x + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\mu}J_\varepsilon^m x\right) - J_{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon+\mu}}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\mu}J_\mu^{n-1}x + \frac{\mu}{\varepsilon+\mu}J_\mu^n x\right)\right\}$$

$$\leqslant P_\lambda\left(\frac{\mu}{\varepsilon+\mu}J_\varepsilon^{m-1}x + \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\mu}J_\varepsilon^m x - \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\mu}J_\mu^{n-1}x - \frac{\mu}{\varepsilon+\mu}J_\mu^n x\right)$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\mu}P_\lambda(J_\varepsilon^m x - J_\mu^{n-1}x) + \frac{\mu}{\varepsilon+\mu}P_\lambda(J_\varepsilon^{m-1}x - J_\mu^n x)$$

即

$$P_{m,n} \leqslant \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\mu}P_{m,n-1} + \frac{\mu}{\varepsilon+\mu}P_{m-1,n}$$

从而有

$$P_{m,n} \leqslant \frac{\varepsilon}{\varepsilon+\mu}\left\{(m\varepsilon - n\mu)^2 + 2\mu(m\varepsilon - n\mu) + m\varepsilon^2 + n\mu^2\right\}^{1/2} \cdot \inf_{u\in Ax}P_\lambda(u)$$

$$+ \frac{\mu}{\varepsilon+\mu}\left\{(m\varepsilon - n\mu)^2 - 2\varepsilon(m\varepsilon - n\mu) + m\varepsilon^2 + n\mu^2\right\}^{1/2} \cdot \inf_{u\in Ax}P_\lambda(u)$$

$$\leqslant \left\{\frac{\varepsilon}{\varepsilon+\mu}[(m\varepsilon - n\mu)^2 + 2\mu(m\varepsilon - n\mu) + m\varepsilon^2 + n\mu^2]\right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{\varepsilon+\mu}[(m\varepsilon - n\mu)^2 - 2\varepsilon(m\varepsilon - n\mu) + m\varepsilon^2 + n\mu^2]\right\}^{1/2} \cdot \inf_{u\in Ax}P_\lambda(u)$$

$$= \left\{(m\varepsilon - n\mu)^2 + m\varepsilon^2 + n\mu^2\right\}^{1/2} \cdot \inf_{u\in Ax}P_\lambda(u)$$

故(3.1)的结论被证明

现设引理 3.3 的结论不成立, 则存在 $x_0, m_0, n_0, \varepsilon_0, \mu_0$ 及 $t_0 > 0$ 使得

$$F_{J_{\varepsilon_0}^{m_0}x_0 - J_{\mu_0}^{n_0}x_0}(t_0) < \sup_{u\in Ax_0}F_u\left(t_0\left\{(m_0\varepsilon_0 - n_0\mu_0)^2 + m_0\varepsilon_0^2 + n_0\mu_0^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

故存在 $u_0 \in Ax_0$ 使得

$$F_{J_{\varepsilon_0}^{m_0}x_0 - J_{\mu_0}^{n_0}x_0}(t_0) < F_{u_0}\left(t_0\left\{(m_0\varepsilon_0 - n_0\mu_0)^2 + m_0\varepsilon_0^2 + n_0\mu_0^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

令 $F_{J_{\varepsilon_0}^{m_0}x_0 - J_{\mu_0}^{n_0}x_0}(t_0) = 1 - \lambda_0$, 则 $\lambda_0 \in (0, 1]$, 显然

$$P_{\lambda_0}(J_{\varepsilon_0}^{m_0}x_0 - J_{\mu_0}^{n_0}x_0) = \inf\{t: F_{J_{\varepsilon_0}^{m_0}x_0 - J_{\mu_0}^{n_0}x_0}(t) > 1 - \lambda_0\} \geqslant t_0$$

且

$$P_{\lambda_0}(u_0) = \inf\left\{t: F_{u_0}(t) > 1 - \lambda_0\right\} < t_0\left\{(m_0\varepsilon_0 - n_0\mu_0)^2 + m_0\varepsilon_0^2 + n_0\mu_0^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

故有

$$P_{\lambda_0}(J_{\varepsilon_0}^{m_0}x_0 - J_{\mu_0}^{n_0}x_0) > \left\{(m_0\varepsilon_0 - n_0\mu_0)^2 + m_0\varepsilon_0^2 + n_0\mu_0^2\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \inf_{u\in Ax}P_{\lambda_0}(u)$$

这与(3.1)相矛盾, 证毕

定理 3.2 的证明, 对每一 $x \in D(A)$, 由引理 3.3 有

$$F_{J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x - J_\mu^{[\frac{t}{\mu}]}x}(k) \geqslant \sup_{u\in Ax}F_u\left(k\left\{\left(\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon - \left[\frac{t}{\mu}\right]\cdot\mu\right)^2 + \left[\frac{t}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon^2 + \left[\frac{t}{\mu}\right]\cdot\mu^2\right\}^{-1/2}\right) \tag{8}$$

因为

$$\left\{\left(\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon - \left[\frac{t}{\mu}\right]\cdot\mu\right)^2 + \left[\frac{t}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon^2 + \left[\frac{t}{\mu}\right]\cdot\mu^2\right\}^{1/2} \leqslant \left\{(\varepsilon+\mu)^2 + (\varepsilon+\mu)t\right\}^{1/2} \tag{9}$$

故得

$$F_{J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x-J_\mu^{[\frac{t}{\mu}]}x}(k)\geqslant\sup_{u\in Ax}F_u\left(k\cdot\left\{(\varepsilon+\mu)^2+(\varepsilon+\mu)t\right\}^{-1/2}\right)$$

令 $\varepsilon,\mu\to0^+$，即得

$$\lim_{\varepsilon,\mu\to0^+}F_{J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x-J_\mu^{[\frac{t}{\mu}]}x}(k)=1\quad(\forall k>0)$$

这表明 $\left\{J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x\right\}$ 是 E 中之一 Canchy 列，故极限

$$T(t)x=\lim_{\varepsilon\to0^+}J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x\tag{3.2}$$

存在，因 $J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}$ 是压缩的，故对每一 $x\in\overline{D(A)}$，(3.2) 中的极限仍存在，而且 $T(t)$ 在 $\overline{D(A)}$ 上是压缩的 $\forall t\geqslant0$。

其次，令 $t,s\geqslant0$，$x\in D(A)$，于是由引理 3.3 有

$$F_{J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x-J_\varepsilon^{[\frac{s}{\varepsilon}]}x}(k)\geqslant\sup_{u\in Ax}F_u\left(k\cdot\left\{\left(\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon-\left[\frac{s}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon\right)^2+\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon^2+\left[\frac{s}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon^2\right\}^{-1/2}\right)$$

而对任意的 $u\in Ax$ 和 $k>0$ 有

$$\left(\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon-\left[\frac{s}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon\right)^2+\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon^2+\left[\frac{s}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon^2\leqslant(|t-s|+\varepsilon)^2+(t+s)\cdot\varepsilon$$

故有

$$\begin{aligned}F_{J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x-J_\varepsilon^{[\frac{s}{\varepsilon}]}x}(k)&\geqslant\sup_{u\in Ax}F_u\left(k\cdot\left\{(|t-s|+\varepsilon)^2+(t+s)\varepsilon\right\}^{-\frac{1}{2}}\right)\\&\geqslant F_u\left(k\cdot\left\{(|t-s|+\varepsilon)^2+(t+s)\cdot\varepsilon\right\}^{-\frac{1}{2}}\right)\end{aligned}\tag{3.3}$$

而且

$$\begin{aligned}F_{T(t)x-T(s)x}(k)&\geqslant\Delta\left(F_{T(t)x-J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x}\left(\frac{\eta}{3}\right),F_{J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x-T(s)x}\left(k-\frac{\eta}{3}\right)\right)\\&\geqslant\Delta\left(F_{T(t)x-J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x}\left(\frac{\eta}{3}\right),\Delta\left(F_{J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x-J_\varepsilon^{[\frac{s}{\varepsilon}]}x}\left(k-\frac{2\eta}{3}\right),F_{J_\varepsilon^{[\frac{s}{\varepsilon}]}x-T(s)x}\left(\frac{\eta}{3}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

其中，$0<\eta<k$。因

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}F_{T(t)x-J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x}\left(\frac{\eta}{3}\right)=1,\text{ 且}\lim_{\varepsilon\to0^+}F_{J_\varepsilon^{[\frac{s}{\varepsilon}]}x-T(s)x}\left(\frac{\eta}{3}\right)=1$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 即得

$$F_{T(t)x-T(s)x}(k)\geqslant\varliminf_{\varepsilon\to0^+}F_{J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x-J_\varepsilon^{[\frac{s}{\varepsilon}]}x}\left(k-\frac{2\eta}{3}\right)\tag{3.4}$$

$\forall0<\eta<k$，及 $k>0$，由 (3.3) 及 $F_u(\cdot)$ 的左连续性得

$$\varliminf_{\varepsilon\to0^+}F_{J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x-J_\varepsilon^{[\frac{s}{\varepsilon}]}x}\left(k-\frac{2\eta}{3}\right)\geqslant F_u\left(\left(k-\frac{2\eta}{3}\right)\cdot|t-s|^{-1}\right)\tag{3.5}$$

$\forall\eta\in(0,k)$，$u\in Ax$。由 (3.4) 和 (3.5) 有

$$F_{T(t)x-T(s)x}(k)\geqslant F_u\left(\left(k-\frac{2\eta}{3}\right)\cdot|t-s|^{-1}\right)$$

$\forall\eta\in(0,k)$，$u\in Ax$。令 $\eta\to0^+$，由 $F_u(\cdot)$ 的左连续性得知

$$F_{T(t)x-T(s)x}(k)\geqslant F_u\left(\frac{k}{|t-s|}\right)\quad(\forall u\in Ax)$$

上式表明对任意的 $x\in D(A)$，$T(t)x$ 关于 t 是 Lipschitz 的连续函数。因为 $T(t)$ 是压缩的，故对任一 $x\in\overline{D(A)}$ $T(t)x$ 关于 t 是一连续函数。

最后，设 $x\in D(A)$ 且 $t,s\geqslant0$，于是对一切 $k>0$ 有

$$F_{J_{\varepsilon}^{[\frac{t+s}{\varepsilon}]}x-J_{\varepsilon}^{[\frac{t}{\varepsilon}]}J_{\varepsilon}^{[\frac{s}{\varepsilon}]}x}(k)\geqslant\sup_{u\in Ax}F_u\left(k\Big/\left\{\left(\left[\frac{t+s}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon-\left(\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]+\left[\frac{s}{\varepsilon}\right]\right)\cdot\varepsilon\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\frac{t+s}{\varepsilon}\right]\cdot\varepsilon^2+\left(\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]+\left[\frac{s}{\varepsilon}\right]\right)\varepsilon^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\geqslant\sup_{u\in Ax}F_u\left(k\Big/\left\{(3\varepsilon)^2+2(t+s)\varepsilon\right\}^{-\frac{1}{2}}\right)$$

令 $\varepsilon\to 0^+$，即得

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}F_{J_{\varepsilon}^{[\frac{t+s}{\varepsilon}]}x-J_{\varepsilon}^{[\frac{t}{\varepsilon}]}J_{\varepsilon}^{[\frac{s}{\varepsilon}]}x}(k)=1\qquad(\forall k>0)$$

上式表明 $T(t+s)x=T(t)T(s)x$ ($\forall t,s\geqslant 0$, $x\in D(A)$)，于是由 $T(t)$ 的压缩性即得

$$T(t+s)x=T(t)\cdot T(s)x\qquad(\forall x\in\overline{D(A)},\ t,s\geqslant 0)$$

证毕•

注 定理 3.2 是 Banach 空间中某些类型的增生映象的 Crandall_Liggett 指数公式在概率赋范空间中的推广•

定理 3.3 设 $A:E\to 2^E$ 是满足下述条件的增生映象：

(i) $\overline{D(A)}\subset R(I+\varepsilon A)$ ($\forall\varepsilon>0$)；

(ii) 如果 $x_n\in D(A)$, $y_n\in Ax_n$, $x_n\to x$ 且 $y_n\to y$ ($n\to\infty$)，则 $x\in D(A)$, $y\in Ax$•

设 $\{T(t):t\geqslant 0\}$ 是由定理 3.2 中给定的算子 A 所生成的半群• 如果 $x\in D(A)$, $u(t)=T(t)x$ 对几乎所有的 $t>0$ 是强可微的，则 $u(t)$ 是 Canchy 问题(E3.1) 唯一的强解•

为了证明定理 3.3，我们需要下面的

引理 3.4 设 $A:D(A)\subset E\to 2^E$ 是满足条件：$D(A)\subset R(I+\varepsilon A)$ $\forall\varepsilon>0$ 的一增生映象• 设 $\{T(t):t>0\}$ 是定理 3.2 中给定的半群• 如果 $x\in D(A)$，则对任意的 $x_0\in D(A)$, $y_0\in Ax_0$, $\lambda\in(0,1]$ 有

$$P_\lambda(T(t)x-x_0)\leqslant P_\lambda(x-x_0)+\int_0^t[T(s)x-x_0,y_0]_\lambda^+ds$$

证 设 $x\in D(A)$, $x_0\in D(A)$, $y_0\in Ax_0$，对任意的 $\varepsilon>0$ 及正整数 N，有

$$\varepsilon^{-1}(J_\varepsilon^Nx-J_\varepsilon^{N-1}x)\in -AJ_\varepsilon^Nx$$

因 A 是增生的，由引理 3.1，即得

$$\left[J_\varepsilon^Nx-x_0,\frac{1}{\varepsilon}(J_\varepsilon^Nx-J_\varepsilon^{N-1}x)+y_0\right]_\lambda^-$$

$$=-\left[J_\varepsilon^Nx-x_0,\frac{1}{\varepsilon}(J_\varepsilon^{N-1}x-J_\varepsilon^Nx)-y_0\right]_\lambda^+\leqslant 0\tag{3.6}$$

由引理 2.1(vi)，有

$$\left[J_\varepsilon^Nx-x_0,\frac{1}{\varepsilon}(J_\varepsilon^Nx-J_\varepsilon^{N-1}x)+y_0\right]_\lambda^-$$

$$\geqslant\left[J_\varepsilon^Nx-x_0,\frac{1}{\varepsilon}(J_\varepsilon^Nx-J_\varepsilon^{N-1}x)\right]_\lambda^-+[J_\varepsilon^Nx-x_0,y_0]_\lambda^-$$

由命题(2.1)(iv) 即得

$$\left[J_\varepsilon^Nx-x_0,\frac{1}{\varepsilon}(J_\varepsilon^Nx-J_\varepsilon^{N-1}x)+y_0\right]_\lambda^-\geqslant\frac{1}{\varepsilon}(P_\lambda(J_\varepsilon^Nx-x_0)$$

$$-P_\lambda(J_\varepsilon^Nx-x_0-(J_\varepsilon^Nx-J_\varepsilon^{N-1}x)))+[J_\varepsilon^Nx-x_0,y_0]_\lambda^-\tag{3.7}$$

由(3.6)和(3.7) 即得

$$P_\lambda(J_\varepsilon^Nx-x_0)\leqslant P_\lambda(J_\varepsilon^{N-1}x-x_0)+\varepsilon[J_\varepsilon^Nx-x_0,-y_0]_\lambda^+\tag{3.8}$$

把(3.8)从 $N=1$ 到 $N=n$ 加起来,即得

$$P_\lambda(J_\varepsilon^n x-x_0)\leqslant P_\lambda(x-x_0)+\sum_{N=1}^{n}\varepsilon[J_\varepsilon^N x-x_0,-y_0]_\lambda^+ \tag{3.9}$$

令 $t\geqslant 0$, $n=\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]$,则(3.9)可改写成下之形式:

$$P_\lambda(J_\varepsilon^{[\frac{t}{\varepsilon}]}x-x_0)\leqslant P_\lambda(x-x_0)+\int_\varepsilon^{([\frac{t}{\varepsilon}]+1)\varepsilon}\left[J_\varepsilon^{[\frac{s}{\varepsilon}]}x-x_0,-y_0\right]_\lambda^+ds \tag{3.10}$$

因为 $\left|\left[J_\varepsilon^{[\frac{s}{\varepsilon}]}x-x_0,-y_0\right]_\lambda^+\right|\leqslant P_\lambda(y_0)$,令 $\varepsilon\to 0^+$,由 Lebesgue 收敛定理和$[\cdot,\cdot]_\lambda^+$ 的上半连续性即得

$$\begin{aligned}P_\lambda(T(t)x-x_0)&\leqslant P_\lambda(x-x_0)+\int_0^t\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left[J_\varepsilon^{[\frac{s}{\varepsilon}]}x-x_0,-y_0\right]_\lambda^+ds\\&\leqslant P_\lambda(x-x_0)+\int_0^t[T(t)x-x_0,-y_0]_\lambda^+ds\end{aligned}$$

引理证毕.

定理3.3的证明,对 $x\in D(A)$,如果 $T(t)x$ 在 $t=t_0>0$ 处有导数 $\frac{d}{dt}T(t)x\Big|_{t=t_0}=y$,由引理3.4得知对一切 $h>0$ 有

$$\begin{aligned}P_\lambda(T(t_0+h)x-x_0)&\leqslant P_\lambda(T(t_0)x-x_0)\\&\quad+\int_0^h[T(t_0+s)x-x_0,-y_0]_\lambda^+ds\end{aligned}$$

上式两端除以 $h>0$,并让 $h\to 0^+$,由引理2.1(ix),有

$$[T(t_0)x-x_0,y]_\lambda^+\leqslant[T(t_0)x-x_0,-y_0]_\lambda^+$$

由引理2.1(vii)即得

$$\begin{aligned}&[T(t_0)x-x_0,y+y_0]_\lambda^-\leqslant[T(t_0)x-x_0,y]_\lambda^++[T(t_0)x-x_0,y_0]_\lambda^-\\&=[T(t_0)x-x_0,y]_\lambda^+-[T(t_0)x-x_0,-y_0]_\lambda^+\leqslant 0\end{aligned} \tag{3.11}$$

由条件(i),对任一 $\varepsilon\in(0,t_0)$ 存在 $x_\varepsilon\in D(A)$ 及 $y_\varepsilon\in Ax_\varepsilon$ 使得

$$x_\varepsilon+\varepsilon y_\varepsilon=T(t_0-\varepsilon)x$$

在(3.11)中取 $x_0=x_\varepsilon, y_0=y_\varepsilon=\varepsilon^{-1}(T(t_0-\varepsilon)x-x_\varepsilon)$ 即得

$$\begin{aligned}0&\geqslant[T(t_0)x-x_\varepsilon,y+\varepsilon^{-1}(T(t_0)-\varepsilon)x-x_\varepsilon)]_\lambda^-\\&=[T(t_0)x-x_\varepsilon,y+\varepsilon^{-1}(T(t_0-\varepsilon)x-T(t_0)x)+\varepsilon^{-1}(T(t_0)x-x_\varepsilon)]_\lambda^-\\&=\varepsilon^{-1}P_\lambda(T(t_0)x-x_\varepsilon)+[T(t_0)x-x_\varepsilon,y+\varepsilon^{-1}(T(t_0-\varepsilon)x-T(t_0)x)]_\lambda^-\\&\geqslant\varepsilon^{-1}P_\lambda(T(t_0)x-x_\varepsilon)-P_\lambda(y+\varepsilon^{-1}(T(t_0-\varepsilon)x-T(t_0)x))\end{aligned}$$

即

$$P_\lambda(T(t_0)x-x_\varepsilon)\leqslant P_\lambda(\varepsilon y+(T(t_0-\varepsilon)x-T(t_0)x))\ (\forall\lambda\in(0,1])$$

从而必然有

$$F_{T(t_0)x-x_\varepsilon}(k)\geqslant F_{\varepsilon y+(T(t_0-\varepsilon)x-T(t_0)x}(k)\quad(\forall k\geqslant 0) \tag{3.12}$$

故当 $\varepsilon\to 0^+$ 时,$x_\varepsilon\to T(t_0)x$,因为

$$\begin{aligned}F_{y+y_\varepsilon}(k)&=F_{y-\varepsilon^{-1}(T(t_0)-T(t_0-\varepsilon)x)+\varepsilon^{-1}(T(t_0)x-x_\varepsilon)}(k)\\&\geqslant\Delta\ F_{y-\varepsilon^{-1}(T(t_0)x-T(t_0-\varepsilon)x)}\left(\frac{k}{2}\right.\end{aligned}$$

故由(3.12),(3.13)及 $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-1}(T(t_0)x-T(t_0-\varepsilon)x)=y$ 即得

$$F_{y+y_\varepsilon}(k)\geqslant F_{y-\varepsilon^{-1}(T(t_0)x-T(t_0-\varepsilon)x)}\left(\frac{k}{2}\right)\to 1\qquad(\varepsilon\to 0^+)$$

故当 $\varepsilon\to 0^+$ 时, $y_\varepsilon\to -y$, 于是由条件(ii), 有 $T(t_0)x\in D(A)$, 而且 $y\in -AT(t_0)x$• 证毕•

§4. 一个未解决的问题

本文末,我们提出下面的一个未解决的问题•

设$(E,\mathscr{F},\Delta)$是一完备的Menger PN_空间, $A:E\to 2^E$是一连续的增生映象, 问A是一m_增生映象吗?

参 考 文 献

1 V. Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces, Noordhoff International Publishing House (1976).

2 H. Brezis and A. Pazy, Semigroups of nonlinear contractions on convex sets, J. Funct. Anal., **6** (1970), 367—383.

3 F. E. Browder, Nonlinear mappings of nonexpansive and accretive type in Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 875—882.

4 F. E. Browder, Nonlinear operators and nonlinear equations of evolution in Banach spaces, Proc. Symp. Pure. Math., **18**, Part 2 (1976).

5 张石生、陈玉清, 概率赋范空间中具增生映象的方程解的存在性, 应用数学和力学, **11**(9) (1990), 771—778.

6 S. S. Chang, Y. J. Cho and S. M. Kang, Probabilistic Metric Spaces and Nonlinear Operator Theory, Sichuan University Press (1994).

7 M. G. Crandall and T. Liggett, Generations of semi_groups of nonlinear transformations on general Banach spaces, Amer. J. Math., **93** (1971), 265—298.

8 M. G. Crandall and A. Pazy, Semigroups of nonlinear contractions and dissipative sets, J. Funct. Anal., **3** (1969), 376—418.

9 K. S. Ha, K. Y. Shin and Y. J. Cho, Accretive operators in probabilistic normed spaces, Bull. Korean Math. Soc., **31**(1) (1994), 45—54.

10 T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 505—520.

11 T. Kato, Accretive operators and nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proc. Symp. Pure Math., **18** (1970), 138—161.

12 Y. Komura, Nonlinear semigroups in Hibert spaces, J. Math. Soc. Japan, **19** (1967), 493—507.

13 V. Lakshmikantham and S. Leela, Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces, Pergamon Press (1981).

14 G. Lumer, Semi inner product spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **100** (1961), 29—43.

15 W. Rudin, Functional Analysis, McGraw_Hill Book Company (1973).

16 B. Schweizer and A. Sklar, Probabilistic Metric Spaces, North_Holland (1983).

Nonlinear Semigroups and Differential Inclusions in Probabilistic Normed Spaces

Zhang Shisheng Chen Yuqing
(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu, 610064, P. R. China)

Abstract

The purpose of this paper is to introduce and study the semi_groups of nonlinear contractions in probabilistic normed spaces and to establish the Crandall_Liggett's exponential formula for some kind of accretive mappings in probabilistic normed spaces. As applications, these results are utilized to study the Cauchy problem for a kind of differential inclusions with accretive mappings in probabilistic normed spaces.

Key words semigroup of nonlinear contractions, probabilistic normed space, Crandall_Liggett's exponential formula, semi_inner produet, accretive mappings