应用数学和力学, 第 19 卷 第 9 期(1998 年 9 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

对没有凸值和连续性的集值映象的最佳逼近定理*

丁协平① 何诣然①

(1997 年 1 月 30 日收到)

摘 要

本文引入和研究了一类具有弱凸图的集值映象• 对这类映象证明了某些新的重合定理, 最佳逼近和不动点定理•

关键词 最佳逼近 重合 不动点 拓扑向量空间
中图分类号 O177

§1. 引 言

1969 年 Ky Fan[1] 证明了下面熟知的最佳逼近结果•

定理 1.1 设 X 是局部凸拓扑向量空间 E 的非空紧凸子集和 $f: X \to E$ 是连续映象• 则或者 f 在 X 内有不动点, 或者存在 $y_0 \in X$ 和 E 上的连续半范数 p 使得

$$0 < p(y_0 - f(y_0)) = \min\{p(x - f(y_0)): x \in X\}$$

其后, 许多作者推广了上述结果到具有紧凸值的集值映象, 见[2~8]

1987 年 Ha[6] 推广 Fan 的结果到集值映象, 得到如下结果•

定理 1.2 设 X 是局部凸拓扑向量空间 E 的非空紧凸子集和 $T: X \to 2^E$ 是上半连续集值映象使得对每一 $x \in X$, $T(x)$ 是紧和凸集• 则或 T 有不动点, 或存在 $x_0 \in X$, $u_0 \in T(x_0)$ 和 E 上的连续半范数 p 使得

$$0 < p(x_0 - u_0) \leqslant p(x - u_0) \quad (\forall x \in X)$$

最近 Ding_Tan[2] 和 Ding_Tarafdar[3] 在更弱的假设下推广了 Ha[6] 的结果到非紧设置和映象对•

在本文中, 我们对拓扑向量空间内的集值映象引入了弱凸图的新概念• 由使用此概念和不同的论证方法, 在拓扑向量空间内对没有紧凸值和连续性的集值映象证明了一些新的重合定理, 最佳逼近和不动点定理•

---

* 四川省教委重点科研项目
① 四川师范大学数学系, 成都 610066

§2. 预备知识

设 X 是拓扑向量空间 E 的非空凸子集和 Y 是 E 的非空子集. 2^Y 表 Y 的一切子集的族和 $\mathscr{P}$ 表 E 上一切连续半范数的族. 对 E 的子集 A, $\mathrm{co}(A)$ 表 A 的凸包. 设 $T: X \to 2^Y$ 是集值映象, T 的图是集合 $G_r(T) = \{(x, y) \in X \times Y: y \in T(x)\}$. 称 T 有紧图如果 $G_r(T)$ 是 $X \times Y$ 的紧子集. 称 T 有弱凸图如果对每一有限集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$, 存在 $y_i \in T(x_i)$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 使得

$$\mathrm{co}(\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}) \subset G_r(T) \tag{2.1}$$

令 $\sigma = \left\{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n: \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n\right\}$ 是 $(n-1)$-维单形. 则关系式 (2.1) 等价于

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \in T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \quad (\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \sigma) \tag{2.2}$$

显然如果 T 的图 $G_r(T)$ 或是凸集, 或 $\bigcap\{T(x): x \in X\} \neq \varnothing$, 则 T 有弱凸图.

引理2.1 设 $T: X \to 2^Y$ 是具有弱凸图的集值映象. X_0 是 X 的凸子集. 则 T 在 X_0 上的限制 $T|_{X_0}: X_0 \to 2^Y$ 也有弱凸图.

证明 对每一有限集 $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset X_0 \subset X$. 由 $G_r(T)$ 的弱凸性, 存在 $y_i \in T(x_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 使得

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \in T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \quad (\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \sigma)$$

因 X_0 是凸集, 有 $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in X_0$ 且因此有 $T\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = T|_{X_0}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)$. 由此推得

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \in T|_{X_0}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \quad (\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \sigma)$$

这就证明了 $T|_{X_0}$ 有弱凸图.

下面例子说明了具有弱凸图的映象 $T: X \to 2^Y$ 可以不是上半连续和凸值的.

例2.1 设 $Y = E = \mathbb{R}^2$ 和 $X = \{(x, 0): x \in \mathbb{R}\}$. 定义 $T: X \to 2^Y$ 如下:

$$T((x, 0)) = \{(x, y): y \in \mathbb{R}\} \quad (\forall (x, 0) \in X)$$

容易看出 T 不是上半连续的. 事实上, 集 $N = \left\{(x, y): |y| < \frac{1}{x}\right\}$ 是 $T((0, 0))$ 的开邻域, 但对任何 $x \neq 0$, $T((x, 0))$ 不能被包含在 N 内. 现在证明 T 有弱凸图. 的确, 对每一有限集 $\{(x_1, 0), \cdots, (x_n, 0)\} \subset X$, 令 $y \in \mathbb{R}$ 是任一点, 则有 $(x_i, y) \in T((x_i, y))$ $(i = 1, \cdots, n)$ 且 $\mathrm{co}(\{(x, 0), \cdots, (x_n, 0)\}) \subset G_r(T)$. 所以 $G_r(T)$ 是弱凸的.

例2.2 设 $E = \mathbb{R}$, $X = [0, 2]$, $Y = [4, 6]$, 定义 $T: X \to 2^Y$ 如下:

$$T(x) = \left[4, \frac{9}{2}\right] \cup \left[\frac{11}{2}, 6\right] \quad (\text{如果 } x = 1)$$

$$T(x) = \left[4, 6 - \frac{1}{2}x\right] \quad (\text{如果 } x \in [0, 2] \setminus \{1\})$$

由 $\bigcap\{T(x): x \in X\} = \{4\} \neq \varnothing$ 知 T 有弱凸图, $T(1)$ 不是凸集且因此 $G_r(T)$ 也不是凸集. 容

易看出 T 也不是上半连续的•

§3. 主 要 结 果

定理 3.1 设 K 是拓扑向量空间 E 的非空子集和 Z 是 $(n-1)$_维单型• 设 $s: K \to Z$ 是连续映象和 $T: Z \to 2^K$ 是具有弱凸图的集值映象• 则存在点 $x^* \in Z$, 使得 $x^* \in s \circ T(x^*)$•

证明 设 $a_1, \cdots, a_n$ 是 Z 的 n 个顶点• 因 $G_r(T)$ 是弱凸的, 存在 $b_i \in T(a_i)$, $(i = 1, \cdots, n)$ 使得对一切 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \sigma$,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \tag{3.1}$$

定义映象 $q: Z \to K$ 如下:

$$q(a_i) = b_i \quad (i = 1, \cdots, n) \text{ 和}$$

$$q\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \quad (\forall (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \sigma) \tag{3.2}$$

我们证明 $q: Z \to K$ 是连续的• 事实上, 因 Z 是具有顶点 $a_1, \cdots, a_n$ 的 $(n-1)$_维单型, 存在唯一连续线性函数 $\lambda_i: Z \to \boldsymbol{R}$, $i = 1, \cdots, n$, 使得对每一 $z \in Z$ 有

$$(\lambda_1(z), \cdots, \lambda_n(z)) \in \sigma \text{ 和 } z = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(z) a_i$$

令 $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ 是收敛于 $z_0 \in Z$ 的序列其中 $z_m = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(z_m) a_i$ 和 $z_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(z_0) a_i$• 由 λ_i 的连续性推得 $\lambda_i(z_m) \to \lambda_i(z_0)$, $m \to \infty$• 因此必有 $q(z_m) \to q(z_0)$, $m \to \infty$• 即 q 是连续的• 注意到 $s: K \to Z$ 是连续的, 我们得到 $s \circ q: Z \to Z$ 是连续的• 由 Brouwer 不动点定理知存在 $z^* \in Z$ 使得 $z^* = s \circ q(z^*)$• 由(3.2) 有 $z^* \in s \circ T(z^*)$•

注 3.1 定理 3.1 在下列方面不同于 Ha[5] 的引理 2: (1) E 不必是 Hausdorff 的; (2) K 不必是紧凸的; (3) T 可以没有任何连续性和紧凸值假设•

注 3.2 设 X, Y 和 T 与例 2.2 中相同• 定义 $s(y) = 4 - \frac{y}{2}$, 则它是连续的• 容易验证 $T: X \to 2^Y$ 和 $s: Y \to X$ 满足定理 3.1 的一切假设, 存在 $x^* \in X$ 使得 $x^* \in s \circ T(x^*)$• 事实上 $x^* = 2$ 满足要求• 但是 T 不是上半连续和凸值的• Ha[5] 的引理 2 不能被应用•

定理 3.2 设 X 是拓扑向量空间 E 的非空闭凸子集, E 的拓扑对偶空间 E^* 分离 E 的点• 设 $T: X \to 2^E$ 是具有紧和弱凸图的集值映象• 则或

(i) T 有一不动点 $x^* \in X$, 或

(ii) 存在 $x_0 \in \partial X$, $u_0 \in T(x_0)$ 和 $p \in \mathscr{P}$ 使得

$$0 < p(x_0 - u_0) \leqslant p(x - u_0) \quad (\forall\ \overline{I_X}(x_0))$$

其中, ∂X 是 X 的边界, $\overline{I_X}(x_0)$ 是 $I_X(x_0)$ 的闭包和 $I_X(x_0) = \{x_0 + r(y - x_0): y \in X \text{ 和 } r \geqslant 0\}$•

证明 假设结论(ii)不真• 则或者对一切 $x \in \partial X$, $u \in T(x)$ 和 $p \in \mathscr{P}$, $p(x - u) = 0$, 或者对每一 $x \in \partial X$, $u \in T(x)$ 和 $p \in \mathscr{P}$, 存在 $x^* \in \overline{I_X}(x_0)$ 使得

$$p(x^* - u) < p(x - u) \tag{3.3}$$

如果第一种情形成立, 则结论(i)是真的• 现在假设第二种情形成立• 对每一 $p \in \mathscr{P}$, 令

是

$$F(p)=\{(x,u)\in G_r(T):p(x-u)=0\}$$

由 p 的连续性和 $G_r(T)$ 的紧性推得对每一 $p\in\mathscr{P}$, $F(p)$ 是 $G_r(T)$ 的紧子集. 因为 E^* 分离 E 的点, 所以 T 在 X 内有不动点当且仅当 $\bigcap\{F(p):p\in\mathscr{P}\}\neq\emptyset$. 因此为证明结论(i)成立, 仅需证明 $\{F(p):p\in\mathscr{P}\}$ 有有限交性质, 即需证明对每一有限集 $\{p_1,\cdots,p_n\}\subset\mathscr{P}$, $\bigcap\{F(p_i):i=1,\cdots,n\}\neq\emptyset$. 因为 $\mathscr{P}$ 是 E 上一切连续半范数的族, 所以 $\sum_{i=1}^n p_i\in\mathscr{P}$, 和对一切 $(x,u)\in G_r(T)$, $\sum_{i=1}^n p_i(x-u)=0$ 当且仅当 $p_i(x-u)=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 即 $\bigcap\{F(p_i):i=1,\cdots,n\}\neq\emptyset$. 因此为了证明 $\{F(p):p\in\mathscr{P}\}$ 有有限交性质仅需证明对每一 $p\in\mathscr{P}$, $F(p)\neq\emptyset$. 对每一固定的 $p\in\mathscr{P}$, 定义映象 $A:X\to 2^{G_r(T)}$ 如下:

$$A(y)=\{(x,u)\in G_r(T):p(x-u)-p(y-u)\leqslant 0\}\quad(\forall y\in X)$$

注意到对每一 $y\in X$, 存在 $z\in E$ 使 $(y,z)\in G_r(T)$ 且由 $A(y)$ 的定义有 $(y,z)\in A(y)$. 因此对每一 $y\in X$, $A(y)\neq\emptyset$. 由 p 的连续性和 $G_r(T)$ 的紧性知 $A(y)$ 是 $G_r(T)$ 的非空紧子集. 现在证明族 $\{A(y):y\in X\}$ 有有限交性质. 如果不真, 则存在有限集 $\{y_1,\cdots,y_n\}\subset X$ 使得 $\bigcap\{A(y_i):i=1,\cdots,n\}=\emptyset$. 于是有 $G_r(T)=\bigcup_{i=1}^n[G_r(T)\setminus A(y_i)]$, 即 $\{G_r(T)\setminus A(y_i):i=1,\cdots,n\}$ 是 $G_r(T)$ 的相对开覆盖. 令 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 是从属于此开覆盖的单位分解, 则 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 $G_r(T)$ 上的非负实值函数使得 β_i 在 $A(y_i)$ 上为0的对一切 $(x,u)\in G_r(T)$, $\sum_{i=1}^n\beta_i((x,u))=1$. 不失一般性我们能假设 $Z=\mathrm{co}(y_1,\cdots,y_n)$ 是 $(n-1)$_维单形, 定义 $s:G_r(T)\to Z$ 如下:

$$s((x,u))=\sum_{i=1}^n\beta_i((x,u))y_i\quad(\forall(x,u)\in G_r(T))\tag{3.4}$$

则 s 在 $G_r(T)$ 上连续. 我们主张 $A:X\to 2^{G_r(T)}$ 有弱凸图. 事实上因 $G_r(T)$ 是弱凸的, 对每一有限集 $\{x_1,\cdots,x_n\}\subset X$. 存在 $u_i\in T(x_i)(i=1,\cdots,n)$ 使得

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i u_i\in T\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)\quad(\forall(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma)$$

由 $A(x_i)$ 的定义有

$$(x_i,u_i)\in A(x_i)\ (i=1,\cdots,n)\ 和\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i,\ \sum_{i=1}^n\lambda_i u_i\right)\in A\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)$$

即是

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i(x_i,u_i)\in A\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i x_i\right)\quad(\forall(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\sigma)$$

因此 A 有弱凸图. 由引理2.1, $A|_Z:Z\to 2^{G_r(T)}$ 也有弱凸图. 因此 s 和 $A|_Z$ 满足定理3.1的一切条件. 所以存在 $(x^*,u^*)\in A|_Z(z^*)=A(z^*)$ 使得 $z^*=s((x^*,u^*))$. 由 s 的定义, 得到 $z^*=\sum_{i=1}^n\beta_i((x^*,u^*))y_i$. 令 $I=\{i\in\{1,\cdots,n\}:(x^*,u^*)\in G_r(T)\setminus A(y_i)\}$, 则

$$z^*=\sum_{i=1}^n\beta_i((x^*,u^*))y_i\ 和\ p(x^*-u^*)-p(y_i-u^*)>0\quad(\forall i\in I)$$

由此推得

$$p(z^* - u^*) = p\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i((x^*, u^*))y_i - u^*\right)$$
$$\leqslant \sum_{i\in I}\beta_i((x^*, u^*))p(y_i - u^*)$$
$$< p(x^* - u^*) \tag{3.5}$$

另一方面从$(x^*, u^*) \in A(z^*)$推得

$$p(x^* - u^*) - p(z^* - u^*) \leqslant 0$$

这,与(3.5) 式矛盾• 因此$\left\{A(y): y \in X\right\}$必有有限交性质 • 由 $G_r(T)$ 的紧性知 $\cap\left\{A(y): y \in X\right\} \neq \emptyset$• 任取$(x_0, u_0) \in \cap\left\{A(y): y \in X\right\}$, 则 –

$$(x_0, u_0) \in G_r(T) \text{ 和 } p(x_0 - u_0) \leqslant p(y - u_0) \quad (\forall y \in X) \tag{3.6}$$

现在对任一$w \in I_X(x_0) \setminus X$, 必存在$y \in X$ 和$r > 1$ 使得$w = x_0 + r(y - x_0)$, 因X 是凸集•
因此$y = \left(1 - \frac{1}{r}\right)x_0 + \frac{1}{r}w$, 如果$p(w - u_0) < p(x_0 - u_0)$, 则有

一 (的非

$$p(y - u_0) = p\left(\left(1 - \frac{1}{r}\right)(x_0 - u_0) + \frac{1}{r}(w - u_0)\right)$$
$$\leqslant \left(1 - \frac{1}{r}\right)p(x_0 - u_0) + \frac{1}{r}p(w - u_0)$$
$$< p(x_0 - u_0)$$

这与(3.6) 式矛盾• 因此必有

$$p(x_0 - u_0) \leqslant p(y - u_0) \quad (\forall I_X(x_0))$$

由p 的连续性, 我们有

$$p(x_0 - u_0) \leqslant p(y - u_0) \quad (\forall \overline{I_X}(x_0)) \tag{3.7}$$

现在假定$p(x_0 - u_0) > 0$, 则$x_0 \neq u_0$• 如果$x_0 \in \mathrm{int}(X)$, 则存在一实数 $\lambda(0 < \lambda < 1)$ 使得$y = \lambda x_0 + (1 - \lambda)u_0 \in X$• 由(3.7) 式有

$$0 < p(x_0 - u_0) \leqslant p(\lambda x_0 + (1 - \lambda)u_0 - u_0) = \lambda p(x_0 - u_0) < p(x_0 - u_0)$$

这是不可能的, 因此$x_0 \in \partial X$, 这就证明了如果$p(x_0 - u_0) > 0$, 则$(x_0, u_0) \in G_r(T)$, $x_0 \in \partial X$ 使得(3.7) 成立, 这与(3.3) 式矛盾• 所以我们必有$p(x_0 - u_0) = 0$和对每一$p \in \mathscr{P}$, $F(p) \neq \emptyset$, 证毕•

注3.3 在定理3.2 中E 不必是局部凸的和T 不必是凸值的• 因此定理3.2 是不同于Ha[6]的定理3, Park[3]的定理3, Reich[8]的定理3.1, Fan[1]的定理1 和Ding_Tan[2]的定理5 的新结果•

定理3.3 设X 是拓扑向量空间E 的非空闭凸子集且其对偶空间E^* 分离E 的点• 设$T: X \to 2^E$ 是具有紧和弱凸图的集值映象• 如果下列条件之一被满足:

(a) 对每一$x \in \partial X$, $u \in T(x)$ 和$p \in \mathscr{P}$, $p(x - u) > 0$, 存在$x^* \in \overline{I_X}(x_0)$ 使得$p(x^* - u) < p(x - u)$,

(b) 对每一$x \in \partial X$, $u \in T(x)$, 存在数λ, $|\lambda| < 1$ 使得$\lambda x + (1 - \lambda)u \in I_X(x)$,

则T 有一不动点$\hat{x} \in X$•

证明 由条件(a)或(b), 容易验证定理3.2 的结论(ii) 不成立• 因此由定理3.2, T 有一不动点$\hat{x} \in X$•

注3.4 定理3.3 是不同于Ha[6]的定理4, Reich[8]的定理3.1, Park[7]的定理4, Fan[1]的定理3 和Ding_Tan[2]的定理6 的一新结果•

参 考 文 献

1 K. Fan, Extension of two fixed point theorems of F. E. Browder, Math. Z., **112** (1969), 234—240.
2 X. P. Ding and K. K. Tan, A set_valued generalization of Fan' s best approximation theorem, Can. J. Math., **44**(4) (1992), 783—796.
3 X. P. Ding and E. Tarafdar, Some further generalizations of Ky Fan' s best approximation theorem, J. Approx. Theory, **81**(3) (1995), 406—420.
4 F. E. Browder, On a sharpened form of the schauder fixed point theorem, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **74** (1977), 4749—4751.
5 C. W. Ha, Minimax and fixed point theorem, Math. Ann., **248**(1) (1980), 73—77.
6 C. W. Ha, On a minimax inequality of Ky Fan, Proc. Amer. Math. Soc., **99**(4) (1987), 680—682.
7 S. Park, Fixed point theorems on compact convex sets in topological vector spaces, Contemp. Math., **72** (1988), 183—191.
8 S. Reich, Approximate selections, best approximations, fixed points and invariant sets, J. Math. Anal. Appl., **62**(1) (1978), 104—113.

Best Approximation Theorem for Set_Valued Mappings without Convex Values and Continuity

Ding Xieping He Yiran
(Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P.R.China)

Abstract

In this paper, a new concept of weakly convex graph for set_valued mappings is introduced and studied. By using the concept, some new coincidence, the best approximation and fixed point theorems are obtained.

Key words best approximation, coincidence, fixed point, topological vector space