应用数学和力学, 第19卷 第9期(1998年9月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

约束力学系统的联络及其运动方程的测地性质*

罗绍凯① 郭永新② 梅凤翔②

(林宗池推荐, 1997年2月17日收到)

摘 要

用现代整体微分几何方法研究非定常约束力学系统运动方程的测地性质, 得到非定常力学系统的动力学流关于1_射丛上的联络具有测地性质的充分必要条件• 非定常情形下的动力学流关于无挠率的联络总具有测地性质, 因此任何非定常约束力学系统在外力作用下的运动总可以表示为关于1_射丛上无挠率的动力学联络的测地运动, 这与定常力学的情形有所区别•

关键词 1_射丛 动力学流 竖直自同态 联络 测地线
中图分类号 O316 O186

§1. 引 言

自Einstein于本世纪初创立广义相对论以来, 微分几何学、尤其是现代微分几何学被广泛应用于物理学的诸多领域• 用现代微分几何学研究完整正则力学系统已有三十余年的历史, 这方面的研究工作日渐完善[1~3]• 进入八十年代, 约束力学系统和奇异力学系统的几何化受到广泛重视, 并取得一些有价值的结果[4,5]• 通常, Lagrange力学及Hamilton力学的几何化为辛几何化, 力学系统的内蕴表示借助于这种辛结构• Cartan[6,7]曾提出另外一种关于经典力学的几何理论, 该理论侧重于力学系统的联络表述, 而且这一联络是非度规联络• 这一颇具启发性的联络理论后来被广泛应用于规范场论, 遗憾的是他的理论并未在力学领域里受到重视• 近些年来, 人们在力学系统及其演化空间的几何化研究中开始注重联络理论的重要作用[8~11], 但是联络的意义不甚明确• 有鉴于此, 我们将在辛几何化的基础上, 确定非定常约束力学系统的联络, 并以此研究该系统的运动方程的测地性质• 结果表明, 对于约束力学系统, 总存在一个约束流形上的动力学联络, 使得力学系统在外力作用下的运动表现为约束流形上的测地运动, 这个测地运动曲线为联络的自平行线; 仅当约束是可积的且动力学流是二阶齐次的, 由联络确定的自平行线亦是由度规确定的短程线•

文中采用了Einstein求和约定, 所涉及的流形和映射皆为光滑的•

---

* 国家自然科学基金资助课题, 高等学校博士点专项基金资助课题
① 河南商丘师专, 商丘 476000
② 北京理工大学应用力学系, 北京 100081

§ 2. 1_射丛 J^1M 上的联络

非定常力学系统的演化空间为接触流形 $R \times TQ$ 或 1_射丛 $\tau: J^1M \to M$, M 为 $n+1$ 维光滑流形, 它对应于事件空间• 用 1_射丛 J^1M 表示非定常力学系统的演化空间更具一般性, 但有时可赋予它接触结构[2]•

J^1M 上的动力学流定义为截面 $Z: J^1M \to TJ^1M$, 且满足 $\tau_* Z(u) = u$, $u \in J^1M$• 若 J^1M 的局部坐标表示为 $\{t, q^i, v^i\}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$Z = \partial/\partial t + v^i\partial/\partial q^i + Z^i(t, q, v)\partial/\partial v^i \tag{2.1}$$

借助 Cartan 1_形式 $\theta^i = dq^i - v^i dt$, J^1M 上的竖直同态 s 可表示为

$$s = \partial/\partial v^i \otimes \theta^i \tag{2.2}$$

假定存在下述矢量丛同态的正合序列

$$0 \to VJ^1M \to TJ^1M \to J^1M \times_M TM \to 0 \tag{2.3}$$

VJ^1M 表示 TJ^1M 关于投影 τ 的竖直子空间, 这样就确定了映射 $H: J^1M \times MTM \to TJ^1M$, 使得 $\tau_* H = Id_{J^1M}$• 在局部坐标下

$$H(\partial/\partial q^i) = \partial/\partial q^i - \Gamma^j_i\partial/\partial v^j = H_i,\ H(\partial/\partial t) = \partial/\partial t - \Gamma^i_0\partial/\partial v^i \tag{2.4}$$

相应地, 对于 $T = \partial/\partial t + v^i\partial/\partial q^i$, 我们有

$$H(T) = T^H = \partial/\partial t + v^i\partial/\partial q^i - (\Gamma^i_0 + v^j\Gamma^i_j)\partial/\partial v^i \tag{2.5}$$

通常称 H 为关于投影 τ 的水平提升, 与之相应的水平投影算符与竖直投影算符可表示为

$$P_n = dt \otimes T^H + \theta^i \otimes H_i,\ P_v = \eta^i \otimes V_i \tag{2.6}$$

其中, $V_i = \partial/\partial v^i$, $\eta^i = dv^i + \Gamma^i_k dq^k + \Gamma^i_0 dt$; $\{T^H, H_i, V_i\}$ 为 J^1M 的切空间的基, $\{dt, \theta^i, \eta^i\}$ 为其对偶基• 由 P_H, P_V 可得到 J^1M 上的水平分布 h 和竖直分布 v, 且

$$TJ^1M = h \oplus v \tag{2.7}$$

借助下述关系

$$\left.\begin{aligned} P_H &= \frac{1}{2}(Id_{J^1M} + \quad + dt \otimes T^H) \\ P_V &= \frac{1}{2}(Id_{J^1M} - \quad - dt \otimes T^H) \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

可将联络表示为另一个 J^1M 上的(1, 1) 型张量场 Γ

$$\Gamma = \theta^i \otimes H_i - \eta^i \otimes V_i \tag{2.9}$$

§ 3. 动力学流的测地性质

类似于对切丛的讨论, 我们同样可根据联络来定义 M 上的曲线的水平提升, M 上矢量场沿某曲线的平行移动, 从而定义协变微分 ∇, 最后可得到联络 Γ 的测地线方程

$$\nabla T = 0 \text{ 或 } \ddot{q} + \Gamma^i_0 + \dot{q}^j\Gamma^i_j = 0 \tag{3.1}$$

它的解即水平矢量的积分曲线•

定义 1 如果动力学流 Z 对于联络 Γ 是水平的, 则称 Z 具有测地性质•

引理 1 设 $\Lambda(\tau)$ 为沿 $\tau: J^1M \to M$ 的标量形式的分次代数, $V(\tau)$ 为沿 τ 的矢值形式的

模, d^H、d^V 分别为 τ 上的水平和竖直外微分, 则 d^H、d^V 的反对易子 $[d^H, d^V]$ 在 $\Lambda(\tau)$ 上为算子 d_*^V, 即存在一矢值 2_形式 $t \in V^2(\tau)$, 使得在 $\Lambda(\tau)$ 上有

$$[d^H, d^V] = d_t^V \tag{3.2}$$

t 称为联络 Γ 的挠率, 其坐标表示为

$$t = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial \Gamma_k^i}{\partial v^j} - \frac{\partial \Gamma_j^i}{\partial v^k}\right)\theta^k \wedge \theta^j \otimes \frac{\partial}{\partial q^i} + \left(v^j \frac{\partial \Gamma_j^i}{\partial v^k} - \Gamma_k^i + \frac{\partial \Gamma_0^i}{\partial v^k}\right) dt \wedge \theta^k \otimes \frac{\partial}{\partial q^i}\right) \tag{3.3}$$

命题 1　J^1M 上的动力学流 Z 的积分曲线是联络 Γ 的测地线的充分必要条件为

$$\Gamma(Z) = 0 \tag{3.4}$$

证　如果 J^1M 上的动力学流的积分曲线是联络 Γ 的测地线, 则

$$Z = T^H,\ Z^i = -\Gamma_0^i - v^j\Gamma_j^i \tag{3.5}$$

由(2.9)式得: $\Gamma(Z) = -(Z^i + \Gamma_0^i + v^j\Gamma_j^i)V_i = 0$• 反之, 如果 $\Gamma(Z) = 0$, 则有 $Z^i + \Gamma_0^i + v^j\Gamma_j^i = 0$• 从而 $Z = T^H$ 即为水平的, 其积分曲线为 Γ 的测地线•

条件(3.4)并未唯一确定联络 Γ• 为使动力学流对动力学联络具有测地性, 有下述命题:

命题 2　J^1M 上的动力学流 Z 关于动力学联络 $\Gamma = -\mathscr{L}_Z S$ 为水平的充分必要条件是 Γ 的挠率为零•

证　如果 Z 关于联络 $\Gamma = -\mathscr{L}_Z S$ 是水平的, 则

$$Z^i = -\Gamma_0^i - v^j\Gamma_j^i,\ \Gamma_j^i = -\frac{1}{2}\frac{\partial Z^i}{\partial v^j} \tag{3.6}$$

由此可得

$$\frac{\partial \Gamma_k^i}{\partial v^j} = \frac{\partial \Gamma_j^i}{\partial v^k},\ v^j\frac{\partial \Gamma_j^i}{\partial v^k} - \Gamma_k^i + \frac{\partial \Gamma_0^i}{\partial v^k} = 0 \tag{3.7}$$

由(3.3)式知 $t = 0$•

如果 $t = 0$, 即有(3.7)式成立, 则一定存在某函数 $f^i \in C^\infty(J^1M)$, 使得 $\Gamma_k^i = -\frac{1}{2}\frac{\partial f^i}{\partial v^k}$, 由(3.7)式第二式知, 存在某一函数 $F^i \in C^\infty(M)$, 使得 $v^jF_j^i + f^i + \Gamma_0^i = F^i$, 令 $f^i - F^i = Z^i$, 则 $\Gamma_0^i = -Z^i + \frac{1}{2}v^j\frac{\partial Z^i}{\partial v^j}$, 由(3.5)式可知 $\Gamma = -\mathscr{L}_Z S$, 它显然满足(3.6)式, 因此 $Z = Z^H = T^H$, 即 Z 关于 $\Gamma = -\mathscr{L}_Z S$ 是水平的•　证毕•

由命题 1 和命题 2 可看出, 任意一动力学流 Z 为联络 Γ 的测地线的切矢量的充分必要条件为关系式(3.3)•　联络 $\Gamma = -\mathscr{L}_Z S$ 只是 $Z = Z^H$ 的充分条件, 而非必要条件•　另外, 任意动力学流对所谓的强水平分布 $H = \theta^i \otimes H_i$ 不表现测地性质•

§4. 非定常约束力学系统运动方程的测地性质

前面已指出, 非定常力学系统的演化空间为射流形 J^1M, $M = R \times Q$ 为 $n+1$ 维事件空间•　设 $L: J^1M \to R$ 为 J^1M 上的动力学函数, 且是正则的•　系统受到的外力表示为 J^1M 上关于 $\tau: J^1M \to M$ 的半基 1_形式•　由 L 确定了 J^1M 上微分 2_形式

$$\omega_L = d(S^* dL) + dL \wedge dt \tag{4.1}$$

由 ω_L 及 J^1M 上的接触结构可确定 VJ^1M 上的纤维度规 g [8]•

设该非定常力学系统受到的约束为 J^1M 上的余分布

$$C = \mathrm{Lin}\{C^\alpha = T^\alpha dt + Q_i^\alpha dq^i + A_i^\alpha d\dot{q}^i\}$$

$$(\alpha = 1, 2, \cdots, g < n;\ i = 1, 2, \cdots, n) \tag{4.2}$$

$T^\alpha, Q_i^\alpha, A_i^\alpha$ 分别为$t, q, \dot{q}$的函数, 且$\mathrm{rank}(S^* C) = g$, 即约束具有最大秩• 由这个约束可以确定 J^1M 上的竖直空间的直和分解

$$VJ^1M = R \oplus \Delta \tag{4.3}$$

其中 R 是$R = \mathrm{Lin}\{R^\alpha = S^*(C^\alpha), \alpha = 1, 2, \cdots, g < n\}$的对偶•

定义 2　如果约束(4.2)式确定的约束力 $r \in R$, 则称约束是理想的• 如果分布 C 是动力学流 Z 的零化子, 则称约束与动力学流相容•

命题 3　如果约束力学系统$\{M, L, \omega_L, F, C\}$满足下述条件, 即 $\mathrm{Rank}(S^* C) = g$, $det(g) > 0$, 约束 C 是理想的并与动力学流相容, 则下面 D′Alembert 方程

$$i_z\omega_L = F + R,\ i_z dt = 1 \tag{4.4}$$

关于动力学联络 $\Gamma = -\mathscr{L}_z s$ 具有测地性质

证　由命题的条件可确定唯一的满足(4.4)动力学流

$$Z = \partial/\partial t + v^i\partial/\partial q^i + Z^i\partial/\partial v^i,\ Z^i = Z^i_{L+F} - g_{\alpha\beta}C^\beta(Z_{L+F})A_i^\alpha g^{ij}\partial/\partial v^j \tag{4.5}$$

应该指出, 尽管约束力学系统的动力学流仍表示为 J^1M 上的二阶微分方程矢量场, 但是约束力学系统的运动限制在 J^1M 的子流形上•

由命题 2 可知, 在约束子流形上存在唯一的动力学联络 $\Gamma = -\mathscr{L}_z s$, 使得 Z 的积分曲线为 Γ 的测地线• 由于在命题的条件下, D’Alembert 方程等价于动力学流(4.5)式, 故 D’Alembert 方程关于动力学联络亦具有测地性质• 证毕•

§5. 结　　论

在一阶经典场论的现代微分几何表述中运用了射丛 $J^1E \to E \to N$ 的几何结构, N 为四维时空流形, E 为N 上位形纤维丛• 某些动力学量(如 Lagrange 能量密度)依赖于构形丛 $\pi: E \to N$ 上的联络, 即时空流形N 上的水平分布• 若$N = R$, $E = R \times Q$, 则将场论情况过渡到非定常力学情况[10]• 但是, 由于底流形约化成一维的 R, 且$E = R \times Q$ 是平凡的, 所以在R 上的联络自然是平凡的[12]•

本文所定义的联络是平凡的, 它是位形流形的 1_射丛上的水平分布• 动力学流总可以表示为某联络的测地线方程• 对于定常力学情况, 决定动力学流测地性质的联络未必是由动力学矢量场唯一确定的, 除非动力学流是二阶齐次的• 而对于非定常情况, 对应任何动力学流, 总可以确定唯一的联络, 使得动力学方程具有测地性质•

值得指出的是, 约束力学系统的测地线并非由度规确定的短程线• 即使约束是线性齐次的, 如果约束不可积, 联络也非 Levi_civita 型• 只有在约束是可积的, 并且动力学流是二次齐次情况下, 由联络确定的测地线亦是由度规确定的短程线•

本文的结论表明, 力学系统所受的主动力、约束力、甚至惯性力皆可用演化空间上的联络系数来表示, 从而将力学系统在外力作用下的运动表示为 1_射丛上的测地运动• 这是联络理论对 Lagrange 力学几何化的重要意义之一•

参 考 文 献

1 G. Godbillion, Geometrie Differentielle et Mecanique Analytique, Hermann, Paris (1969).
2 V. I. Arnold, Mathematical Method of Classical Mechanics, Springer_Verlag, New York (1978).
3 R. Abraham and J. E. Marsden, Foundations of Mechanics, 2nd ed., The Benjamin/Cumming Publishing Company (1978).
4 梅凤翔、刘端、罗勇,《高等分析力学》, 北京理工大学出版社, 北京 (1991).
5 D. Chinea, M. de leon and J. C. Marrero, The constraint algorithm for time_dependent Lagrangians, J. Math. Phys., **35**(7) (1994), 3410—3438.
6 E. Cartan, Sur les Varietes a connexion affine at la theorie de la relativite generalistee, Annales de L' Ecole Nomale Superieure, **40** (1923), 325—412.
7 E. Cartan, Sur les Varietes a connexion affine at la theorie de la relativite generalistee, Annales de L' Ecole Nomale Superieure, **41** (1924), 1—25.
8 M. de leon and P. R. Rodrigues, Methods of Diferential Geometry in Analytical Mechanics, North Holland, Amsterdam (1989).
9 W. Sarlet, A. Vandecasteele and F. Cantrijn, Derivations of forms along a map: the framework for time_dependent second_order equations, Diff. Geom. Appl., **5** (1995), 171—203.
10 Echeverria_Enriquez, M. C. Munoz_Lecanda and N. Roman_Roy, Non_standard connections in classical mechanics, J. Phys. A: Math Gen., **28** (1995), 5553—5567.
11 G. S. Hall and B. M. Haddow, Geometrical aspects and generalizations of Newton_Cartan mechanics, Int. J. Theor. Phys., **34**(7) (1995), 1093—1112.
12 S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, J. Willey and Sons, New York (1963).

Connections and Geodesic Characteristic of Equations of Motion for Constrained Mechanical Systems

Luo Shaokai

(Shangqiu Teachers College, Shangqiu, Henan 476000, P.R.China)

Guo Yongxin Mei Fengxiang

(Department of Applied Mechanics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P.R.China)

Abstract

The geodesic characteristic of equations of motion for nonautonomous constrained mechanical systems is studied in the modern setting of global differential geometry. A necessary and sufficient condition for the dynamical flow of nonautonomous mechanical system with geodesic characteristic was obtained with respect to a connection on 1_jet bundle. The dynamical flow concerning the non_autonomous case was always of geocesic characteristic with regard to torsionfree connections. Thus the motion of any nonautonomous mechanical system with constraints can be always represented by the motion along the geodesic line of torsion_connection on 1_jet bundle, which is different from the case in an autonomous mechaincal system.

Key words 1_jet bundle, dynamical flow, vertical endomorphism, connection, geodesic