

# CML 模型和湍流的非线性

刘兆存

(刘宇陆推荐, 1996 年 6 月 9 日收到, 1997 年 5 月 20 日收到修改稿)

## 摘 要

本文在现有耦合映射格点(CML)动力系统模型的基础上, 提出了能够同时模拟对流项和扩散项的强弱耦合系统的 CML 模型, 分析了这类模型的特点和结构。数值试验表明, 这类 CML 模型能够有效地研究时空复杂性, 利用数值模拟的结果对湍流的物理机制作了初步的阐释。

**关键词** CML 模型 时空混沌 湍流

**中图分类号** O242, O357

## 1 引 言

当前非线性科学研究的主战场之一就是湍流问题, 对于复杂系统动力学的研究也是一个重要课题(湍流的数学描述就是无穷维的动力系统)。耗散结构理论和协同学都体现了约化思想。近年来法国学者 T. M. 应用这一思想将无穷维动力系统投影到有限维中研究并提出了惯性流形的概念。他从理论上证明了象湍流这样无穷维耗散系统的长期动力学行为可用有限维空间近似描述<sup>[1]</sup>。从物理上看, 惯性流形体现了湍流中大小涡之间的相互作用。惯性流形的存在标志着奇怪吸引子的存在。奇怪吸引子是刻划无穷维耗散系统(湍流)的性态的一个重要指标。然而对于象湍流这样的系统而言, 它的动力学行为一方面具有时间演化的不可逆的耗散性。另一方面由于系统内部诸元素的耦合相互作用产生了演化过程中随时间而变的空间展布的复杂的 Pattern 图形。因数学理论上解析分析的困难, 目前主要用一些简单模型的计算机模拟分析得到的结果运用到高维动力系统上去进而阐明其随时空演化的混沌机理。

## 2 CML 模型

目前研究较多的 CML 模型为:

$$x_{n+1}(i) = (1 - \alpha)f(x_n(i)) + \frac{\alpha}{2} [f(x_n(i-1)) + f(x_n(i+1))] \quad (2.1)$$

其中,  $n$  是时间,  $i$  是格点( $i = 1, 2, \dots, N$ ;  $N$  是系统的大小),  $\alpha$  是耦合强度, 取周期边界条件, 并令  $f(x) = 1 - \alpha x^2$ , 即为 Logistic 映射。然而文[2]的研究表明, 模型(2.1) 当为强耦合时( $\alpha > 1$ ) 表现出不合理的现象, 进而提出了改进的 CML 模型, 使之保留弱耦合时模型(2.1) 的非常

丰富的 Pattern 行为, 而且在强耦合时反映出更为合理的时空 Pattern 行为

受文[2]的启发, 考虑微分方程  $\frac{u}{t} + w \frac{u}{x} = \frac{2u}{x^2}$  的迎风差分格式:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{t} + w_i^n \frac{\text{CIE} u_i^{n+1} + \text{CIP} u_i^{n+1} - \text{CIW} u_{i-1}^{n+1}}{x} = \frac{u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1}}{(x)^2} \quad (2.2)$$

上式中

$$\left. \begin{aligned} \text{CIE} &= \left[ \left[ \text{sgn}(-w_i^n), 0 \right] \right] \\ \text{CIP} &= \text{sgn}(w_i^n) \\ \text{CIW} &= \left[ \left[ \text{sgn}(w_i^n), 0 \right] \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

[[ ]] 示取括号中项的最大者, 相当于 FORTRAN 语言中的 AMAX1 函数, sgn 是符号函数, 若数为正, 零, 负则  $\text{sgn}(x)$  分别取 +1, 0, -1

令  $\frac{t}{x} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{t}{(x)^2} = \frac{1}{2}$ , 整理(2.2)式可知:

$$\begin{aligned} & - \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{CIW} w_i^n u_{i-1}^{n+1} + \left[ 1 + \frac{1}{2} w_i^n \text{CIP} \right] u_i^{n+1} \right. \\ & \left. - \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} w_i^n \text{CIE} u_{i+1}^{n+1} = u_i^n \right] \right. \end{aligned} \quad (2.4)$$

结合 CML 模型对非线性的模拟解释<sup>[3]</sup>可得我们提出的 CML 模型如下

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{1}{2} \text{CIP} f(x_{n-1}(1)) + x_n(1) - \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{CIE} f(x_{n-1}(1)) \right] x_n(2) \right. \\ & = f(x_{n-1}(1)) + \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{CIW} f(x_{n-1}(1)) \right] f(x_{n-1}(N)) \\ & - \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{CIW} f(x_{n-1}(i)) \right] x_n(i-1) + \left[ 1 + \frac{1}{2} \text{CIP} f(x_{n-1}(i)) + x_n(i) \right. \\ & - \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{CIE} f(x_{n-1}(i)) x_n(i+1) = f(x_{n-1}(i)) \right. \\ & \qquad \qquad \qquad (i = 2, 3, \dots, N-1) \\ & - \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{CIW} f(x_{n-1}(N)) x_n(N-1) + \left[ 1 + \frac{1}{2} \text{CIP} f(x_{n-1}(N)) + \right] x_n(N) \right. \\ & = f(x_{n-1}(N)) + \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{CIE} f(x_{n-1}(N)) f(x_{n-1}(1)) \right. \end{aligned} \quad (2.5)$$

上式中:

$$\left. \begin{aligned} \text{CIW} &= \left[ \left[ \text{sgn}(x_{n-1}(i)), 0 \right] \right] \\ \text{CIE} &= \left[ \left[ \text{sgn}(-x_{n-1}(i)), 0 \right] \right] \\ \text{CIP} &= \text{sgn}(x_{n-1}(i)) \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$f(x) = 1 - \alpha x^2$ ,  $a \in [0, 2]$ , 其余符号同前

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + \frac{1}{2} \text{CIP} f(x_{n-1}(1)) + x_n(1) - \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{CIE} f(x_{n-1}(1)) \right] x_n(2) \right. \\ & = f(x_{n-1}(1)) + \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{CIW} f(x_{n-1}(1)) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{CIE} f(x_{n-1}(i)) \right] x_n(i+1) = f(x_{n-1}(i)) + g \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_{n-1}(j)) \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad (i = 2, 3, \dots, N-1) \\
 & - \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{CIW} f(x_{n-1}(N)) \right] x_n(N-1) + \left[ 1 + \frac{1}{2} \text{CIP} f(x_{n-1}(N)) + x_n(N) \right. \\
 & = f(x_{n-1}(N)) \left. + \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{CIE} f(x_{n-1}(N)) f(x_{n-1}(1)) + g \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_{n-1}(j)) \right] \right] \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

在模型(2.7)中若令  $g(x) = 0$ , 则模型(2.7)和模型(2.5)相同。模型(2.7)中的  $g(x)$  相当于系统的反馈项, 为防止计算过程中溢出而取适当的形式, 一般而言,  $g(x)$  的取值范围介于  $[-1, 1]$  之间。其它符号均同模型(2.5)。

在模型(2.7)的基础上, 经过分析得如下模型:

$$\begin{aligned}
 & \left[ 1 + \frac{1}{2} \text{CIP} y_{n-1}(1) + \right] x_n(1) - \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{CIE} y_{n-1}(1) \right] x_n(2) \\
 & = f(x_{n-1}(1)) + \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{CIW} y_{n-1}(1) \right] f(x_{n-1}(N)) + g \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_{n-1}(j)) \right] \\
 & - \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{CIW} y_{n-1}(i) \right] x_n(i-1) + \left[ 1 + \frac{1}{2} \text{CIP} y_{n-1}(i) \right] x_n(i) \\
 & - \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{CIE} y_{n-1}(i) \right] x_n(i+1) = f(x_{n-1}(i)) + g \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_{n-1}(j)) \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad (i = 2, 3, \dots, N-1) \\
 & - \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{CIW} y_{n-1}(N) \right] x_n(N-1) + \left[ 1 + \frac{1}{2} \text{CIP} y_{n-1}(N) + x_n(N) \right. \\
 & = f(x_{n-1}(N)) + \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{CIE} y_{n-1}(N) \right] f(x_{n-1}(1)) + g \left[ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_{n-1}(j)) \right]
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

上式中

$$\left. \begin{aligned}
 \text{CIE} &= \left[ \left[ \text{sgn}(-y_{n-1}(i)), 0 \right] \right] \\
 \text{CIP} &= \text{sgn}(y_{n-1}(i)) \\
 \text{CIW} &= \left[ \left[ \text{sgn}(y_n(i)), 0 \right] \right]
 \end{aligned} \right\}
 \tag{2.9}$$

$y_n(i)$  是随机选取的介于  $[-1, 1]$  中的随机数,  $f(x)$  的取值同模型(2.5)。且模型(2.7)和(2.8)中, 如果在数值模拟过程中  $x_n(i)$  值不介于  $[-1, 1]$  中时将采用重整化方法即采用变换将其变为  $[-1, 1]$  中的值。

其实在上面的模型中, 对于函数  $f(x)$  也可选用更为复杂的形式, 如下面的  $(x)$  形式:

$$(x) = 2 \left[ \frac{e+1}{e} \right]^2 \left[ (1 - ) \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \right] - \frac{e+f}{e}
 \tag{2.10}$$

其中, 为参数数且  $[0, 1]$ 。应用求函数极值的方法易知, 当  $x \in [-1, 1]$  中时,  $(x) \in [-1, 1]$ 。有关这方面的情形将结合模拟结果进行讨论。

静态熵值的计算公式采用(去暂态 1000 次, 对 1001 至 6000 时间步统计)下式:

$$S_p = - \sum_j Q(j) \log Q(j)
 \tag{2.11}$$

其中,  $Q(j)$  为空间点进入长为  $j$  的域的概率。

### 3 数值模拟结果

数值试验结果指出, 模型(2.5)、(2.7)、(2.8)不仅适用于弱耦合情形而且也适用于强耦合情形

初始条件的取值采用赋于区间 $[-1, 1]$ 中伪随机数的方法, 伪随机数在计算机上生成. 模型(2.7)、(2.8)由于采用了重整化技术可如模型(2.5)其迭代过程中对于特定的时间步 $n$ , 可采用TDMA方法直接求解

分析模型(2.5)、(2.7)、(2.8)所对应的微分方程的特性和数值模拟的结果, 反映了扩散的强弱, 由扩散物理过程的特点, 随着 $\alpha$ 值的增大, 状态趋向于规则均匀, 系数 $a$ 值的增加使系统状态提前变得更混乱, 这和一维的映射 $x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2$ 情形相一致. 对流项的影响随着 $\alpha$ 值的增加系统提早进入混沌状态. 模型(2.7)、(2.8)中的函数 $g(x)$ 相当于在系统中加入了反馈机制, 对系统状态有调控作用. 所计算的熵值对于同一模型是度量复杂性的一个指标, 但仅有相对的意义.

数值模拟结果表明模型(2.5)随着参数的变化而发生的演化具有很好的统计意义上的有序性. 模型(2.7)、(2.8)较适宜模拟开放系统中非线性体系的演化过程. 模型(2.7)、(2.8)中函数 $g(x)$ 的选取在保证迭代不发散的情形下其具体形式和最后结果的本质意义关联程度不密切,  $g(x)$ 在模型中的作用从模型所代表的现实物理意义而言对应于系统对演化历史的记忆功能, 是通过系统历史诸态的统计平均而影响系统的存在和将来的演化情形的.  $g(x)$ 对模型结构的作用有点类似于函数 $f(x)$ , 但从模型所对应的物理实在及模型的结构看 $g(x)$ 和函数 $f(x)$ 的功能有本质的差别. 由于Logistic映射 $f(x) = 1 - \alpha x^2$ 是研究得相对较多的一类映射, 当用 $g(x)$ 代替 $f(x)$ 而令 $g(x)$ 中的系数 $\alpha$ 取 $[0, 1]$ 中的随机数在经过大约10000次迭代后模型(2.7)也产生了类似于用 $f(x)$ 迭代的一些性态但二者仍有明显的差别, 反映出非线性产生的性态和随机性二者之间的不同, 随机性仅是非线性产生的混沌性态的一个方面. 有序和随机统一于混沌之中.

模型(2.7)和模型(2.8)的结构相近, 差别仅在于模型(2.8)中更充分反映了开放系统中随机性的影响.

结合我们的研究目的, 这里给出模型(2.7)和(2.8)的一些数值模拟的结果.

对应于模型(2.7), 当 $g(x)$ 仅连同其原来的符号取其小数部分(保证 $g(x) \in [-1, 1]$ ), 函数 $f(x)$ 取为Logistic映射,  $x(i)$ 的重整化按同一比例变化于 $[-1, 1]$ , 模拟了两组结果: ( )  $\alpha = 1.60$ ,  $\beta = 0.24$ ,  $a = 1.40$ 时  $S_p = 1.592$ ; ( )  $\alpha = 1.60$ ,  $\beta = 0.24$ ,  $a = 1.36$ 时,  $S_p = 1.567$ , 图1给出了第2组时的图型.

图2给出了模型(2.7)中当 $f(x)$ 取为(2.10)式中的 $f(x)$ 时,  $\alpha$ 取 $[0, 1]$ 中的伪随机数,  $g(x)$ 函数形式同图1,  $x(i)$ 连同其原来的符号仅取 $[-1, 1]$ 中部分时的图型. 其中  $\alpha = 2.60$ ,  $\beta = 0.44$ ,  $a = 0.72$ ,  $S_p = 1.326$ .

图3给出了模型(2.7)中当 $f(x) = 1 - \alpha x^2$ 时,  $g(x) = \sin(x)$ ,  $x(i)$ 的重整化同图1时的图型, 其中  $\alpha = 1.60$ ,  $\beta = 0.24$ ,  $a = 1.30$ 时  $S_p = 1.288$ .

对应于模型(2.8), 取 $f(x) = 1 - \alpha x^2$ ,  $g(x)$ 的函数形式同图1,  $x(i)$ 的重整化技术同图2,  $y(i)$ 取 $[-1, 1]$ 中的伪随机数时模拟了两组结果, ( )  $\alpha = 3.0$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $a = 1.07$ ,  $S_p =$

0.862,  $\beta = 3.0$ ,  $\gamma = 0.12$ ,  $a = 1.07$ ,  $S_p = 0.853$  图4给出了第2组结果

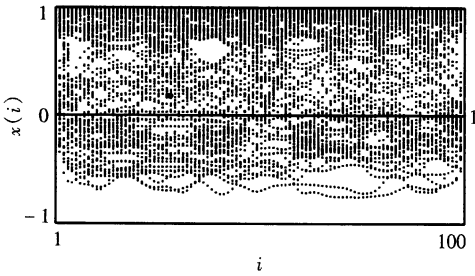


图1  $\beta = 1.60$ ,  $\gamma = 0.24$ ,  $a = 1.36$

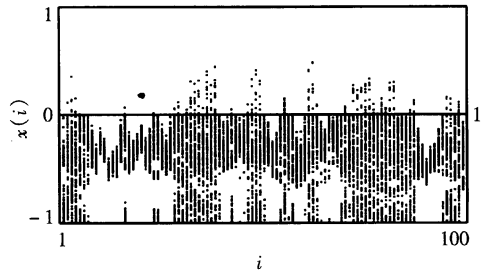


图2  $\beta = 2.60$ ,  $\gamma = 0.44$ ,  $a = 0.72$

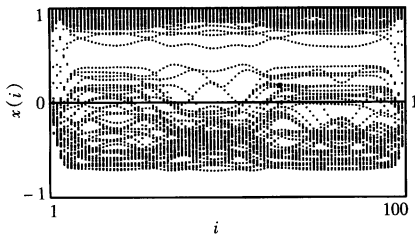


图3  $\beta = 1.60$ ,  $\gamma = 0.24$ ,  $a = 1.30$

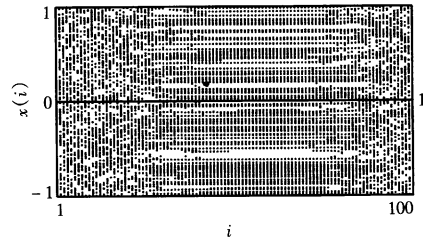


图4  $\beta = 3.0$ ,  $\gamma = 0.12$ ,  $a = 1.07$

### 4 讨论和结论

实际的湍流运动无一例外地都是三维运动,如[4]指出,从严格的意义上来说科学家们对于真正充分发展的湍流运动的研究还刚刚开始。混沌理论的发展毕竟为解决湍流问题带来了新的希望,即使目前希望还相当遥远。人们发现在开放系统中,层流通过GRT或Feigenbaum或阵发性间隙道路(或其组合)都可导致湍流。层流到湍流的转捩及湍流的发展其实是湍流态被逐渐激发的熵增过程。

流体力学的许多方程均具有如下的形式:

$$\frac{d(\quad)}{dt} + \text{div}(\mathbf{u} \quad) = \text{div}[J \text{grad}(\quad)] + S \tag{4.1}$$

事实上,除源汇项外,任何一个量的当地变化率,迁移变化率和梯度的散度项三者之间满足普遍的宏观守恒定律。虽然湍流从整体上看是一个耗散系统,但微观地细部来看则局部地属于保守系统。耗散性是大量自由度相互作用的结果。流体运动细部考察时的近保守系统特性和整体耗散性是湍流演化过程造成的。湍流整体演化的系统决定性规律和统计意义上的整体稳定性及同时对外部扰动的敏感性并具有历史记忆特性所形成的演化不可预报的随机性构成有序和无序共存的特征从而形成表观上的混沌。无穷嵌套和自相似性的对称破缺构成湍流有序和随机的双重特征,就其实质而言是湍流非线性非平衡态非均匀各向异性的原因。这和所构造的模型随模型参数的变化的演化过程中所激发的各态在演化过程中竞争的结果一方面使演化对初始条件很敏感具有高度不稳定性从而使演化表现出一定的随机性而造成不可逆,另一方面使最后结果又表现出一定程度的整体稳定性而形成一定(至少在统计意义上)的空间 Pat-

tem 图形的特性在定性上相当吻合。均说明非线性是造成湍流演化复杂多变的原因。虽然壁湍流中拟序运动生成机制和自由切变湍流中拟序运动生成机制有本质性的不同,湍流斑能量逆转等其实质在于湍流中的非线性作用。

湍流是一种宏观的自然现象,按照宏观客体的运动规律它们随时间在空间中的运动展布情形应完全由其自身运动规律所决定。随机性和决定性呈互补态存在于湍流现象中。随机性是耗散结构系统的一个重要特性,产生这种特性的根源在于系统内部。[5]指出,湍流的不封闭性并不在于非线性而在于缺乏适当的描述随机性的几率函数。随机性尤其是认识论上的随机性和决定性之间已经开始了新的对话,寻找切合湍流实际的统计分布律(这种分布律所给出的结果应能反映出目前已知的湍流特性,当然适合于非线性而不仅仅是线性统计律),在能够精确预言的地方给出决定论结果(概率为1),在具有随机性的地方给出统计预言的结果,无疑是封闭和认识湍流的一条可行途径。

如何应用现代数学理论定量研究所提出的数学模型的特性有待进一步探索,但上述工作至少在概念上对于理解湍流是有帮助的。

**致谢** 作者衷心感谢在河海大学学习时金忠青、肖勇先生的指导,衷心感谢中国水科院李忠义、万兆惠教授对本文工作的帮助。

### 参 考 文 献

- 1 P. Constantin, et al., Integral Manifolds and Inertial Manifolds for Dissipative Partial Differential Equation, Springer-Verlag (1989).
- 2 黄欣等,时空 Chaos 研究中的 CML 模型,应用数学和力学,14(10) (1993), 919-928.
- 3 J. Brindley, et al., Spatio-temporal chaos in closed and open systems, Chaos, Solitons and Fractals, 4(7) (1994), 1193-1209.
- 4 杨培才,湍流运动与非线性理论,力学进展,24(2) (1994), 205-219.
- 5 蔡树棠等,关于湍流理论中的不封闭性的讨论,应用数学和力学,16(3) (1995), 211-215.

## CML Models and the Nonlinearity of Turbulence

Liu Zhaojun

(Department of Sediment, China Institute of Water Resources and Hydropower Research,  
Beijing 100044, P. R. China)

### Abstract

Some new coupled map lattice (CML) models are developed for simulating both convection, diffusion terms and weakly or strongly coupled terms. The structure and features of model are analysed. Numerical results show that the new models are effective for studying spatiotemporal chaos. Finally, the of mechanism turbulence is analysed via the numerical results.

**Key words** CML model, spatiotemporal chaos, turbulence