应用数学和力学，第19卷 第9期(1998年9月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

关于非线性两点边界值问题 $u''+g(t,u)=f(t), u(0)=u(2\pi)=0$ 的解的存在性和唯一性

黄文华[①]　曹菊生[①]　沈祖和[②]

(刘曾荣推荐，1997年5月26日收到，1998年5月10日收到修改稿)

摘　要

本文给出了max_min原理的一个非变分形式，证明了非线性两点边界值问题 $u''+g(t,u)=f(t), u(0)=u(2\pi)=0$ 的解的一个存在性和唯一性定理•

关键词　Hilbert空间　微分同胚　非线性两点边界值问题　唯一解

中图分类号　O177, O175

§1. 引　　言

设 H 是实Hilbert空间，X 和 Y 是 H 的两个闭子空间且 $H=X\oplus Y$, $T:H\to H$ 是 C^n 映照，$n\geqslant 1$•　假定存在两个正常数 m_1 和 m_2 使得对 $\forall u\in H$, $\forall x\in X$, $\forall y\in Y$,

$$\langle T'(u)x,x\rangle\leqslant -m_1\|x\|^2 \tag{1.1}$$

$$\langle T'(u)y,y\rangle\geqslant m_2\|y\|^2 \tag{1.2}$$

且

$$\langle T'(u)x,y\rangle=\langle x,T'(u)y\rangle \tag{1.3}$$

Manasevich在条件(1.1)、(1.2)和(1.3)下证明了 T 是一个从 H 到 H 上的 C^n 微分同胚[1]•

本文的目的是改进上述Manasevich的同胚定理，并利用改进了的同胚定理证明非线性两点边值问题

$$u''+g(t,u)=f(t),\qquad u(0)=u(2\pi)=0 \tag{1.4}$$

的解的一个存在性和唯一性定理•

§2. max_min原理的一个非变分形式

为了改进Manasevich的同胚定理，需要下述引理，该引理见[2, p. 928, Corollary 3.2]:

---

① 无锡轻工大学数理学科部，无锡 214036

② 南京大学数学系，南京 210008

引理 2.1 设 H 是实 Hilbert 空间, $f \in C^1(H, H)$, $f'(u) \in \mathrm{Isom}(H, H)$, $\forall u \in H$. 如果存在一个连续映照 $\omega: R_+ \to R_+ \setminus \{0\}$ 满足 $\int_0^{+\infty} \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty$, $\|[f'(u)]^{-1}\| \leqslant \omega(\|u\|)$, 那么, f 是一从 H 到 H 上的微分同胚.

定理 2.1 设 H 是实 Hilbert 空间, X 和 Y 是 H 的两个闭子空间且 $H = X \oplus Y$, $T: H \to H$ 是 C^1 映照, 假定存在两个连续函数

$$\alpha: [0, +\infty) \to (0, +\infty), \quad \beta: [0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

使得对 $\forall u \in H$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$,

$$\int_0^{+\infty} \min\{\alpha(s), \beta(s)\} ds = +\infty \tag{2.1}$$

$$\langle T'(u)x, x\rangle \leqslant -\alpha(\|u\|)\|x\|^2 \tag{2.2}$$

$$\langle T'(u)y, y\rangle \geqslant \beta(\|u\|)\|y\|^2 \tag{2.3}$$

且

$$\langle T'(u)x, y\rangle = \langle x, T'(u)y\rangle \tag{2.4}$$

那么, T 是一个从 H 到 H 上的微分同胚.

证明 设 $v_1 \in H$, $v_2 \in H$, $v_1 \neq v_2$, 记 $v = v_1 - v_2 \in H$. 显然, $v \neq 0$ 且 v 可分解为 $v = x + y$, $x \in X$, $y \in Y$. 对任意固定的 $u \in H$, 假定对 $v_1 \neq v_2$ 有 $T'(u)v_1 = T'(u)v_2$. 由(2.2)、(2.3) 和(2.4)), 我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T'(u)v_1 - T'(u)v_2, y - x\rangle \\ &= \langle T'(u)v, y - x\rangle = \langle T'(u)x, y\rangle - \langle T'(u)x, x\rangle + \langle T'(u)y, y\rangle \\ &\quad - \langle T'(u)y, x\rangle \\ &\geqslant \alpha(\|u\|)\|x\|^2 + \beta(\|u\|)\|y\|^2, \end{aligned}$$

这就出现了矛盾. 因此对 $v_1 \neq v_2$ 必有 $T'(u)v_1 \neq T'(u)v_2$, 从而 $T'(u)$ 是 1—1 的.

记 $C(\|u\|) = \min\{\alpha(\|u\|), \beta(\|u\|)\}$, 注意到

$$\langle T'(u)v, y - x\rangle \geqslant \alpha(\|u\|)\|x\|^2 + \beta(\|u\|)\|y\|^2,$$

我们有

$$\|T'(u)v\| \, \|y - x\| \geqslant C(\|u\|)(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{2.5}$$

对(2.5)式两边平方

$$\begin{aligned} [C(\|u\|)]^2(\|x\|^2 + \|y\|^2)^2 &\leqslant \|T'(u)v\|^2\|y - x\|^2 \\ &\leqslant 2\|T'(u)v\|^2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \end{aligned}$$

可得

$$C(\|u\|)\|v\| \leqslant 2\|T'(u)v\| \tag{2.6}$$

以下要证 $T'(u)H$ 是 H 的闭集. 事实上, 对任意固定的 $v \in \overline{T'(u)H}$, 存在序列 $\{v_n\}$ 使得

$$v_n \in T'(u)H$$

且

$$v_n \to v.$$

设元素 y_n 满足

$$y_n \in H$$

且

$$T'(u)y_n=v_n.$$

那么对任意整数 m 和 n, 我们有

$$\begin{aligned}\|v_n-v_m\|&=\|T'(u)y_n-T'(u)y_m\|\\&=\|T'(u)(y_n-y_m)\|\\&\geqslant\frac{C(\|u\|)}{2}\|y_n-y_m\|.\end{aligned}$$

这蕴含$\{y_n\}$ 是 Canchy 序列从而在 H 中收敛.

令 y 是H 中的元素满足

$$y_n\to y.$$

由 $T'(u)$ 的连续性, 我们有

$$T'(u)y_n\to T'(u)y,$$

因此 $v=T'(u)y\in T'(u)H$.

最后, 我们要证明 $T'(u)H=H$.

假设存在一个 $z\in[T'(u)H]^{\perp}$, $z\neq 0$. 那么, $\langle T'(u)v,z\rangle=0$, $\forall v\in H$, 且 z 可分解为 $z=h+k$, $h\in X$, $k\in Y$. 取 $v=k-h$, 那么, 由(2.2)、(2.3) 和(2.4), 我们有

$$\begin{aligned}0&=\langle T'(u)v,z\rangle=\langle T'(u)(k-h),k+h\rangle\\&=\langle T'(u)k,k\rangle+\langle T'(u)k,h\rangle-\langle T'(u)h,k\rangle-\langle T'(u)h,h\rangle\\&\geqslant\alpha(\|u\|)\|h\|^2+\beta(\|u\|)\|k\|^2,\end{aligned}$$

这就出现了矛盾, 因此 $[T'(u)H]^{\perp}=\{0\}$.

概言之, 我们证明了 $T'(u)$ 是一个映H 到H 上的线性算子, 由(2.6), 这线性算子满足

$$\|T'(u)^{-1}\|\leqslant\frac{2}{C(\|u\|)}.$$

由引理2.1 可知, T 是一个从H 到H 上的微分同胚. 证毕.

§3. 一个存在性和唯一性定理

设 $g(t,u)$ 是连续的且对于 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 和 $-\infty<u<+\infty$ 具有关于 u 的连续导数, 假设对某一整数 n 和所有 $u\in H$, $t\in[0,2\pi]$,

$$n^2<g_u(t,u)<(n+1)^2 \tag{3.1}$$

记

$$\alpha(s)=\min_{\|u\|\leqslant s}\ \min_{t\in[0,2\pi]}(g_u(t,u)-n^2) \tag{3.2}$$

$$\beta(s)=\min_{\|u\|\leqslant s}\ \min_{t\in[0,2\pi]}((n+1)^2-g_u(t,u)) \tag{3.3}$$

和

$$C(s)=\min\{\alpha(s),\beta(s)\} \tag{3.4}$$

利用定理 2.1, 可证明下述的

定理 3.1 设$f(t)\in C[0,2\pi]$, $g(t,u)$ 是连续的且对于 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 和 $-\infty<u<+\infty$ 具有关于 u 的连续导数并且满足(3.1), 假定

$$\int_0^{+\infty} \alpha(s)\,ds = +\infty, \qquad \int_0^{+\infty} \beta(s)\,ds = +\infty \tag{3.5}$$

那么,非线性两点边界值问题(1.4)存在定义在$[0, 2\pi]$上的一个唯一解•

证明　定义

$$V = \left\{ v \mid v(t) \in C^2[0, 2\pi], v(o) = v(2\pi) = 0, v(t) \text{ 绝对连续且满足} \int_0^{2\pi} v^2(t)dt < +\infty \right\} \cdot$$

显然, V 是$L^2[0, 2\pi]$ 的一个子空间, 并且 V 关于下述内积是一实 Hilbert 空间

$$\langle u, v \rangle = \int_0^{2\pi} [u'(t)v'(t) + u(t)v(t)]\,dt \cdot$$

由这一内积$\langle , \rangle$诱导的范数记为 $\|\cdot\|_v$ •

定义 V 的子空间X 和Y 如下:

$$X = \left\{ x \mid x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), t \in [0, 2\pi], \right.$$
$$\left. a_0 \in R,\ a_k \in R,\ b_k \in R,\ k = 1, 2, \cdots, n \right\} \tag{3.6}$$

$$Y = \left\{ y \mid y(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), t \in [0, 2\pi], \right.$$
$$\left. a_k \in R,\ b_k \in R,\ k = n+1, n+2, \cdots \right\} \tag{3.7}$$

这里 n 与(3.1) 式中的 n 一致,(3.7) 中的级数 $y(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$ 以及对这一级数逐项微分以后得到的级数在 R 上一致收敛• 显然, X 和 Y 是 V 的两个闭子空间且有 $V = X \oplus Y$, 而且对 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 下述不等式成立

$$\int_0^{2x} [x'(t)]^2 dt \leqslant n^2 \int_0^{2x} [x(t)]^2 dt \tag{3.8}$$

$$\int_0^{2x} [y'(t)]^2 dt \geqslant (n+1)^2 \int_0^{2x} [y(t)]^2 dt \tag{3.9}$$

利用 Riesz 表现定理, 定义映照 $T: V \to V$

$$\langle T(u), v \rangle = \int_0^{2x} [u'(t)v'(t) - g(t, u)v(t)]\,dt$$
$$(\text{对一切 } u \in v,\ \forall v \in V) \tag{3.10}$$

(3.10)式中的 T 是由隐式定义的, 由(3.10) 和 g 对于$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$关于$u$ 是C^1 的事实, 可以证明 T 是C^1 的并且对一切$u \in V$, $\forall w \in V$, $\forall v \in V$,

$$\langle T'(u)w, v \rangle = \int_0^{2x} [w'(t)v'(t) - g_u(t, u)w(t)v(t)]\,dt \tag{3.11}$$

再一次利用Riesz 表现定理, 令 d 是V 中唯一的元素使得

$$\langle d, v \rangle = -\int_0^{2x} f(t)v(t)dt \qquad (\forall v \in V) \tag{3.12}$$

可以证明 u 是(1.4) 的一个解当且仅当 u 满足算子方程

$$T(u) = d \tag{3.13}$$

由(3.1), 我们有

$$n^2 < \min_{t \in [0, 2\pi]} g_u(t, u) \leqslant g_u(t, u) \leqslant \max_{t \in [0, 2\pi]} g_u(t, u) < (n+1)^2,$$

因此

$$\alpha:[0,+\infty) \to (0,+\infty), \qquad \beta:[0,+\infty) \to (0,+\infty) \tag{3.14}$$

由(3.11)、(3.8)、(3.9)、(3.2)、(3.3)和(3.14), 对一切 $u \in V, x \in X, y \in Y$, 我们有

$$\begin{aligned}
\langle T'(u)x, x\rangle &= \int_0^{2x}[(x'(t))^2 - g_u(t,u)x^2(t)]\,dt \\
&\leqslant \int_0^{2x}[n^2 - g_u(t,u)]\,x^2(t)\,dt \\
&\leqslant -\min_{t\in[0,2\pi]}(g_u(t,u) - n^2)\int_0^{2x}x^2(t)\,dt \\
&\leqslant -\frac{1}{n^2+1}\Big[\min_{\|v\|_V\leqslant\|u\|_V} kco \min_{t\in[0,2\pi]}(g_v(t,v) - n^2)\Big] \\
&\quad \cdot \left(n^2\int_0^{2\pi}x^2(t)\,dt + \int_0^{2\pi}x'^2(t)\,dt\right) \\
&\leqslant -\frac{\alpha(\|u\|_V)}{n^2+1}\|x\|_V^2,
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
\langle T'(u)y, y\rangle &= \int_0^{2x}[(y'(t))^2 - g_u(t,u)y^2(t)]\,dt \\
&\geqslant \int_0^{2\pi}\left[(y'(t))^2 - g_u(t,u)\frac{(y'(t))^2}{(n+1)^2}\right]dt \\
t &\geqslant \frac{1}{(n+1)^2+1}\Big[\min_{\|v\|_V\leqslant\|u\|_V}\min_{t\in[0,2\pi]}((n+1)^2 - g_v(t,v))\Big] \\
&\quad \cdot \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)\int_0^{2\pi}[y'(t)]^2\,dt \\
&\geqslant \frac{\beta(\|u\|_V)}{(n+1)^2+1}\|y\|_V^2,
\end{aligned}$$

显然还有

$$\langle T'(u)x, y\rangle = \langle x, T'(u)y\rangle.$$

由(3.5)及 $\alpha(s)$ 和 $\beta(s)$ 递减并且满足 $0 < \dfrac{\alpha(s)}{n^2+1} \leqslant 2$ 和 $0 < \dfrac{\beta(s)}{(n+1)^2+1} \leqslant 2$ 的事实, 可以证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{C(s)}{(n+1)^2+1}ds = +\infty$. 应用定理2.2, 我们得到 T 是一个从 V 到 V 上的微分同胚, 也就是说, (3.13) 从而(1.4) 有一个定义在 $[0, 2\pi]$ 上的唯一解. 定理证毕.

参 考 文 献

1 R. F. Manasevich, A non variational version of a max_min principle, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, **7**(6) (1983), 565—570.

2 Gaetano Zampieri, Diffeomorphisms with Banach space domains, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, **19**(10) (1992), 923—932.

On the Solution of Nonlinear Two_Point Boundary Value Problem $u'' + g(t, u) = f(t), u(0) = u(2\pi) = 0$

Huang Wenhua Cao Jusheng
(Department of Mathematics and Physics Sciences, Wuxi University of Light Industry, Wuxi 214036, P.R.China)
Shen Zuhe
(Department of Mathematics, Nanjing University, Nanjing 210008, P.R.China)

Abstract

In this paper, a non_variational version of a max_min principle is proposed, and an existence and uniqueness result is obtained for the nonlinear two_point boundary value problem $u'' + g(t, u) = f(t)$, $u(0) = u(2\pi) = 0$.

Key words Hilbert space, diffeomorphism, nonlinear two_point boundary value problem, unique solution