

# 弹塑性有限变形的广义 Prandtl-Reuss 本构方程和应力共旋率研究

沈利君<sup>①</sup> 潘立宙<sup>②</sup> 何福保<sup>②</sup>

(1997 年 10 月 17 日收到, 1998 年 5 月 11 日收到修改稿)

## 摘 要

本文通过一种新的途径研究弹塑性有限变形的广义 Prandtl-Reuss 本构方程。研究表明对于广义 Prandtl-Reuss 本构方程, 变形率弹塑性和分解的假设并非必须。研究了采用物质共旋率的广义 Prandtl-Reuss 本构方程, 从理论上分析了简单剪切应力振荡的原因。提出一种用于构造广义 Prandtl-Reuss 本构方程中应力和背应力共旋率的修正相对旋率。最后, 对简单剪切变形进行应力计算。

**关键词** 弹塑性有限变形 广义 Prandtl-Reuss 本构方程 应力共旋率 剪切应力振荡

**中图分类号** O344

## § 1. 引 言

近年来, 弹塑性有限变形的本构理论有了一定进展。但是, 在具体的本构关系中广义 Prandtl-Reuss 本构方程(简称 P\_R 方程)被普遍使用, 并得到广泛讨论和研究。以前, 在推导广义 P\_R 方程时往往把变形率(速度梯度的对称部分)分解成弹性变形率和塑性变形率之和, 与小变形情况一样, 塑性部分服从正交流动法则; 为使有限变形的本构方程满足客观性原理, 把应力和背应力(或背应力偏量)的时间物质导数换成客观导数。但是, 有两个问题没有得到很好解决: (a) 对于变形率分解成弹性和塑性两部分之和的合理解释, 根据 Lee 的变形梯度弹塑性分解<sup>[1]</sup>, 这种变形率分解仅当小弹性变形时才近似成立, 所以普遍认为变形率弹塑性和分解假设可能是广义 P\_R 方程错误来源的一个方面<sup>[2]</sup>; (b) 广义 P\_R 方程中张量客观率的选择。从 Nagtegaal 和 de Jong 的文章<sup>[3]</sup>发表后, 这问题受到普遍重视。该文中的数值分析表明采用物质共旋率(Jaumann 率)的广义 P\_R 方程会产生所谓的“剪切应力振荡”现象。许多作者对这问题进行了研究。Lee 等<sup>[4]</sup>, Dafalias<sup>[5]</sup>, Dienes<sup>[6, 7]</sup>等认为广义 P\_R 方程中采用物质共旋率是不合适的, 但是没有给出理论上的证明。他们同时提出各种不会产生“剪切应力振荡”的客观导数。但是, 不管广义 P\_R 方程采用何种张量客观导数, 一般认为广义 P\_R 方程包含变形率和分解这一假设。

本文将对以上两个问题进行研究, 提出一种分析广义 P\_R 方程的新途径, 证明变形率弹

① 宁波大学材料科学与力学研究中心, 浙江宁波 315211

② 上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072

塑性和分解假设是不必要的,从而排除这种假设会导致方程错误的可能性。并分析研究采用物质共旋率的广义 P\_R 方程,从物理意义上分析“剪切应力振荡”的原因。提出一种构造广义 P\_R 方程中客观导数的修正相对旋率。本文中的应力指 Cauchy 应力。

## § 2. 采用物质共旋率的 Prandtl-Reuss 方程

以往,分析广义 P\_R 方程,先将变形率  $D$  分解成弹性的  $D^e$  的塑性的  $D^p$  两部分之和

$$D = D^e + D^p \quad (2.1)$$

但是,普遍认为(2.1)式存在重大缺陷。根据变形梯度弹塑性分解<sup>[1]</sup>  $F = F^e \cdot F^p$ , 如果速度梯度  $L$ 、弹性速度梯度  $L^e$  和塑性速度梯度  $L^p$  定义为

$$L = \dot{F} \cdot F^{-1}, \quad L^e = \dot{F}^e \cdot (F^e)^{-1}, \quad L^p = \dot{F}^p \cdot (F^p)^{-1} \quad (2.2)$$

则存在

$$L = L^e + F^e \cdot L^p \cdot (F^e)^{-1} \quad (2.3)$$

显然,速度梯度不等于弹性和塑性速度梯度两部分之和,即  $L \neq L^e + L^p$ 。变形率是速度梯度的对称部分( $D = (L + L^T)/2$ ,  $T$  表示转置),可以发现(2.1)式仅当小弹性变形时,才近似地成立。如果假设(2.1)式成立,  $D^p$  与  $D^e$  (或  $L^p$  与  $L^e$ ) 的定义不会相同。变形率的弹塑性和分解是现在激烈争论的问题<sup>[8]</sup>。一般认为(2.1)式的假设可能是率型本构方程错误的一种来源。同时塑性应变度量也被认为是弹塑性有限变形理论中的一个难点,认为是构造本构方程所必须的基础。这里,我们研究广义 P\_R 本构方程无需单独研究塑性应变度量,不需要进行有限变形情况下的变形率弹塑性和分解假设。注意到在弹塑性变形过程中,弹性变形和塑性变形是同时发生的,把有限变形过程看成许多段小变形子过程的组合,考虑其中的某段小变形子过程,如从  $t_1$  时刻到  $t_2$  时刻,如果以  $t_1$  时刻的构形为参考构形,则存在变形率  $D^1$  的弹塑性和分解  $D^1 = D^{1e} + D^{1p}$  (上标“1”表示以  $t_1$  时刻构形为参考构形)。由于变形率与参考构形的选取无关,故  $D^1$  等于以整个变形过程的初始构形为参考构形的变形率  $D$ 。如果材料是符合 Mises 型屈服准则的等向强化材料,对于这段小变形子过程,根据 Drucker 公设和虎克定律,得

$$D = \frac{1}{h} \left[ \sigma_0 T \frac{s}{\sqrt{s:s}} \right] \frac{s}{\sqrt{s:s}} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_0 - \frac{\nu}{E} I \text{tr} \sigma_0 \quad (2.4)$$

这里,  $\sigma_0$  指该小变形子过程新增加的应力,  $s/\sqrt{s:s}$  是指  $t_1$  时刻的 Mises 型后继屈服面的外法线单位矢量(看成 6 维矢量),  $s$  是整个变形过程的应力偏量。上方圆点表示关于时间的物质导数,“:”指张量的双点积,  $I$  是二阶度量张量,  $\text{tr}(\dots)$  表示张量迹。  $E$ ,  $\nu$  分别是杨氏模量和泊松系数,  $h$  是材料系数,是等效应力的标量函数。(2.4)式第一项反映塑性正交流动法则,如果弹性卸载这部分为零,如果刚塑性,则后两项为零。

如果已知  $t_1$  时的应力  $\sigma_1$ , 经过变形  $F^1 = R^1 \cdot U^1$  (上标 1 表示以  $t_1$  时刻构形为参考构形,  $R$  表示正交转动张量,  $U$  表示右伸长张量)后,这段小变形子过程新增加的应力  $\sigma_0$ , 按小变形理论,变形后  $t_2$  时刻的应力  $\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_0$ 。但是,对于有限变形过程,必须考虑变形  $F^1$  对  $\sigma_1$  的影响。如果  $\sigma_1$  产生转动  $R^1$ , 那么

$$\sigma_2 = R^1 \cdot \sigma_1 \cdot R^{1T} + \sigma_0 \quad (2.5)$$

上标“ $T$ ”表示张量转置。

将(2.5)式对时间求导,再让  $t_2$  趋近于  $t_1$ , 则  $R^{1 \rightarrow} I, R^{1 \rightarrow} w^1$ , 物质旋率  $w$  (速度梯度的反对称部分)与参考构形选取无关,故  $w^1 = w$ ,  $\sigma_2$  趋向于  $\sigma_1$ , 并将它们都写成  $\sigma$ , 这样有

$$\dot{\sigma}_0 = \dot{\sigma} - w \cdot \sigma + \sigma \cdot w \tag{2.6}$$

把上式代入(2.4)式,得

$$D = \frac{1}{h} \frac{1}{s : s} (\dot{\sigma} : s) s + \frac{1 + \nu}{E} \dot{\sigma} - \frac{\nu}{E} I \text{tr} \dot{\sigma} \tag{2.7}$$

其中  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma} - w \cdot \sigma + \sigma \cdot w$   $h$  在(2.4)式已经提到是材料系数,它可通过比例加载或单向拉伸材料试验确定.至此我们推导了 Mises 型屈服准则等向强化材料的,采用物质旋率的广义 P\_R 方程.  $\dot{\sigma}$  是应力的物质共旋率.

同样,我们可以推导出 Mises 型屈服准则的随动强化材料的 P\_R 方程.随动强化的 Mises 型屈服面方程为

$$f = (1/2)s : s - (1/3) \alpha_0^2 = 0 \tag{2.8}$$

其中  $s = s - \alpha$ ,  $\alpha$  是偏背应力,  $\alpha_0$  为初始屈服等效应力.如果采用 Prager-Ziegler 的加载面中心移动模型,小变形的 P\_R 方程

$$D = \frac{1}{h} \frac{1}{s : s} (\dot{\sigma} : s) s + \frac{1 + \nu}{E} \dot{\sigma} - \frac{\nu}{E} I \text{tr} \dot{\sigma} \tag{2.9}$$

$$\dot{\sigma} = (\dot{\sigma} : s) s / s : s \tag{2.10}$$

与等向强化的情况一样,把整个有限变形过程分成许多段小变形过程的组合.其中的某段小变形子过程的本构方程

$$D = \frac{1}{h} \frac{1}{s : s} (\dot{\sigma}_0 : s) s + \frac{1 + \nu}{E} \dot{\sigma}_0 - \frac{\nu}{E} I \text{tr} \dot{\sigma}_0 \tag{2.11}$$

$$\dot{\sigma}_0 = (\dot{\sigma}_0 : s) s / s : s \tag{2.12}$$

以上  $\sigma_0, \alpha_0$  指该小变形子过程新增加的应力和偏背应力,  $s / \sqrt{s : s}$  是指此刻的后继屈服面的单位法线矢量.小变形过程的应力增量和偏背应力增量按(2.5)式的方式分别叠加到该小变形前的应力和偏背应力上,得 Mises 型屈服准则的随动强化材料的有限变形 P\_R 方程

$$D = \frac{1}{h} \frac{1}{s : s} (\dot{\sigma} : s) s + \frac{1 + \nu}{E} \dot{\sigma} - \frac{\nu}{E} I \text{tr} \dot{\sigma} \tag{2.13}$$

$$\dot{\sigma} = (\dot{\sigma} : s) s / s : s \tag{2.14}$$

其中  $\dot{\sigma}, \dot{\sigma}$  分别称为应力和偏背应力的物质共旋率.(2.14)式称为  $\alpha$  的演化方程.

本节推出的采用物质共旋率的广义 P\_R 方程早期曾被 Hutchinson<sup>[9]</sup> 和 Tvergaard<sup>[10]</sup> 等提出过.以前推导方法是把小变形 P\_R 方程中的时间物质导数直接改成物质共旋率使之成为有限变形的广义 P\_R 方程,一般通过数值计算分析这类方程,并且认为必须作有限变形的变形率弹塑性和分解( $D = D^e + D^p$ )假设.现在,通过一种新的途径重新推导了这种本构关系,使得它们的物理意义更清楚.推导中不作有限变形的变形率弹塑性和分解假设.

### § 3. 简单剪切应力振荡原因分析

上节研究了采用应力物质共旋率的广义 P\_R 方程.这类本构关系会产生所谓的简单剪切应力振荡,大多作者认为这种不合理现象是由于采用了物质共旋率,但是都没有作出理论上的解释.这里,通过上节提出的研究率型本构方程新途径的分析,从物理意义上找出应力振荡的原因.图 1 是简单剪切变形情况,  $k$  表示整个变形过程的剪切位移,  $e$  表示某段小变形过程

的剪切位移,这种变形过程可作为二维考虑.从  $OABC$  到  $OA'B'C$ ,其变形梯度  $F^1$ ,转动张量  $R^1$ ,变形率  $D$  在笛卡尔基下的矩阵表示为

$$F^1 = \begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$$D = \frac{e}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (3.1a, b, c)$$

其中  $\text{tg}\theta = -e/2$ .

将随动强化刚塑性有限变形作为研究对象,由(2.8)式、(2.13)式的刚塑性简化式及(3.1c)式得

$$s_{11} = \alpha_{11}, s_{22} = \alpha_{22}, s_{12} = \alpha_0/\sqrt{3} + \alpha_{12} \quad (3.2a, b, c)$$

这里,  $s_{ij}, \alpha_{ij}$  分别是  $s, \alpha$  在笛卡尔坐标基下的分量.

根据第2节的研究,把整个简单剪切变形过程

分成  $n$  段小变形子过程,每段小变形子过程的剪切位移都是  $e = k/n$ .某段小变形子过程新增的偏背应力为  $\alpha_0$ ,由(2.11)式刚塑性简化式、(2.12)式和(3.1c)式得

$$\alpha_0 = \begin{bmatrix} 0 & p \\ p & 0 \end{bmatrix}, p = h \frac{e}{2} \quad (3.3)$$

如果  $h$  为常数,那么每段小变形子过程新增的偏背应力  $\alpha_0$  都一样,它们的转动张量  $R^1$  也都一样.按第2节的方法,把各段小变形过程的  $\alpha_0$  叠加起来,得到总的偏背应力

$$\alpha = \underbrace{R^1 \left( \dots R^1 \left[ R^1 \alpha_0 R^{1T} + \alpha_0 \right] R^{1T} + \dots + \alpha_0 \right)}_{n-1} R^{1T} + \alpha_0 \quad (3.4)$$

可以看出,对于第一段小变形过程的偏背应力  $\alpha_0$  进行转动为

$$(R^1) \text{变形} = \begin{bmatrix} \cos(n-1)\theta & -\sin(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta & \cos(n-1)\theta \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

当  $n$  趋向无穷大时,其转角为  $k/2 (= -\lim_{n \rightarrow \infty} (n-1)\theta)$ ,为顺时针方向,它随  $k$  增大而增大,可以没有上限,但从图1看出任何一条物质线的转动都不会超过  $\pi$ ,那么对第一段小变形过程的  $\alpha_0$  的转动角度不应超过  $\pi/2$ .如果以整个大变形过程考虑,按变形梯度极分解作出的从初始到最后的转动

$$R = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

显然  $-\beta (\text{tg}\beta = -k/2)$  永远小于  $\pi/2$ ,从这角度看,转动角度不应超过  $\pi/2$ .经过以上分析可知,按(3.4)式的这种对偏背应力的叠加方式是不合理的,对偏背应力  $\alpha$  进行的转动过大.也就是说用物质旋率  $w$  构造偏背应力  $\alpha$  的客观导数不合理,物质旋率对偏背应力来说太快了.

顺便指出, Voyiadjis 和 Kattan<sup>[11]</sup> 提出用物质旋率乘以一个小于1的标量作为构造客观率的旋率,即  $w_1 = pw (p < 1)$ ,并认为  $w_1$  是比  $w$  速度小的旋率.但是除了简单剪切变形等特殊情况下,一般来说  $w_1$  不能构造客观率,  $w_1 \cdot \sigma + \sigma \cdot w_1$  不一定是应力的客观率.

### § 4. 采用修正相对共旋率的 Prandtl-Reuss 方程

绝大多数实际物质是 Noll 简单物质,对于简单物质,变形后的 Cauchy 应力是变形梯度历史的泛函,由客观性原理,可得简单物质本构方程的一种化简形式<sup>[12]</sup>

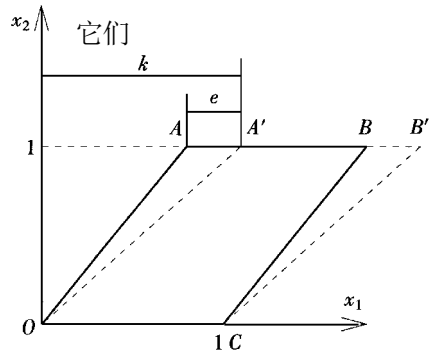


图1 简单剪切变形

$$\sigma(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{g} \left[ \mathbf{U} \left( t - \overset{\infty}{s}_0 \right) \right] \cdot \mathbf{R}^T(t) \quad (4.1)$$

式中  $\mathbf{g}$  是右伸长张量的全部历史  $\mathbf{U}(t - \overset{\infty}{s}_0)$  的泛函,  $t - \overset{\infty}{s}_0$  表示  $t$  时刻以前的所有时刻. 如果变形梯度等于右伸长张量  $\mathbf{U}(t - \overset{\infty}{s}_0)$  的一个变形过程的应力为  $\tau(t)$ , 其偏量为  $\zeta(t)$ , 那么变形梯度为  $\mathbf{R}(t - \overset{\infty}{s}_0) \cdot \mathbf{U}(t - \overset{\infty}{s}_0)$  变形过程的应力  $\sigma(t)$  为

$$\sigma(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \tau(t) \cdot \mathbf{R}^T(t) \quad (4.2)$$

同样, 可以认为偏背应力(或背应力)是变形梯度历史的泛函, 且满足客观性原理, 那么变形梯度为  $\mathbf{R}(t - \overset{\infty}{s}_0) \cdot \mathbf{U}(t - \overset{\infty}{s}_0)$  的变形过程的偏背应力  $\alpha(t)$

$$\alpha(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \eta(t) \cdot \mathbf{R}^T(t) \quad (4.3)$$

其中  $\eta(t)$  是变形梯度为  $\mathbf{U}(t - \overset{\infty}{s}_0)$  的变形过程的偏背应力. 这样由(4.2)式和(4.3)式得(时间  $t$  有时略去不写)

$$\tau = \mathbf{R}^T \cdot \sigma \cdot \mathbf{R}, \quad \zeta = \mathbf{R}^T \cdot s \cdot \mathbf{R}, \quad \eta = \mathbf{R}^T \cdot \alpha \cdot \mathbf{R}, \quad \zeta = \mathbf{R}^T \cdot s \cdot \mathbf{R} \quad (4.4a, b, c, d)$$

其中,  $\zeta = \zeta - \eta, s = s - \alpha$

根据以上分析, 只要知道变形梯度为  $\mathbf{U}(t - \overset{\infty}{s}_0)$  的变形过程的应力、偏背应力, 就能求出变形梯度为  $\mathbf{R}(t - \overset{\infty}{s}_0) \cdot \mathbf{U}(t - \overset{\infty}{s}_0)$  的变形过程的应力和偏背应力.

#### (a) Mises 型屈服准则的随动强化的有限变形广义 P-R 方程

考虑这样一个变形过程, 它的变形梯度  $\mathbf{F}$  就是右伸长张量  $\mathbf{U}$  (自变量时间略去不写), 即转动张量  $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , 它的变形率  $D_U = (\mathfrak{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathfrak{U}) / 2$  (下标  $\mathbf{U}$  指该过程的变形梯度是  $\mathbf{U}$ ). 已经知道变形率不能分解成弹性变形率和塑性变形率之和. 为了避免这种有争议的变形率弹塑性分解假设, 仍然这样考虑, 把有限变形过程分成许多段小变形子过程, 其中的某段小变形子过程是  $t_1$  时刻到  $t_2$  时刻,  $\mathbf{U}(t_1) = \mathbf{U}_1, \mathbf{U}(t_2) = \mathbf{U}_2, t_1$  时的应力为  $\tau_1$ , 偏背应力为  $\eta_1$ , 该过程的应力增量为  $\tau_0$ , 偏背应力增量为  $\eta_0$ . 对于这段小变形过程有类似于(2.11)、(2.12)式的本构关系

$$\frac{1}{2} (\mathfrak{U} \cdot \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathfrak{U}) = \frac{1}{h} \frac{1}{\zeta_0 : \zeta} (\mathfrak{U}_0 : \zeta) \zeta + \frac{1 + \nu}{E} \mathfrak{U}_0 - \frac{\nu}{E} \text{tr} \mathfrak{U}_0 \quad (4.5)$$

$$\mathfrak{U}_0 = (\mathfrak{U}_0 : \zeta) \zeta / \zeta : \zeta \quad (4.6)$$

一般来说,  $t_2$  时刻的应力(偏背应力)不一定等于  $t_1$  时刻的应力(偏背应力)与该小变形过程的应力(偏背应力)增量直接相加, 即  $\tau_2 \neq \tau_1 + \tau_0, \eta_2 \neq \eta_1 + \eta_0$ . 实际上, 应力(偏背应力)增量直接叠加仅适合于  $\mathbf{U}_1$  和  $\mathbf{U}_2$  主向一致的情况, 如果  $\mathbf{U}_1$  和  $\mathbf{U}_2$  主向不一致, 情况就非常复杂. 假如上述一段小变形过程会对  $\tau_1$  和  $\eta_1$  产生某种转动影响, 作者认为对  $\tau_1, \eta_1$  进行  $\mathbf{U}_1$  主向到  $\mathbf{U}_2$  主向转动方向的某种程度转动(转动张量为  $\mathbf{B}$ )是比较合理的. 如果  $\mathbf{U}_1$  主向到  $\mathbf{U}_2$  主向转动张量为  $\mathbf{A}$ , 当  $\mathbf{B}, \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{I}$  时, 有  $\mathbf{B} = m\mathbf{A} (0 \leq m \leq 1)$ .

$\mathbf{U}$  的主向为一组互相正交的单位矢量, 设  $\mathbf{U}_1$  的主向为  $\{N_1^1, N_1^2, N_1^3\}$ ,  $\mathbf{U}_2$  主向为  $\{N_2^1, N_2^2, N_2^3\}$ , 一组固定的互相正交的单位矢量  $\{e^1, e^2, e^3\}$ , 那么存在正常正交张量  $\mathbf{R}_1^l$  和  $\mathbf{R}_2^l$ , 使得

$$N_r^1 = \mathbf{R}_1^l \cdot e^r \quad (r = 1, 2, 3), \quad N_r^2 = \mathbf{R}_2^l \cdot e^r \quad (r = 1, 2, 3) \quad (4.7a, b)$$

于是,  $U_1$  主向到  $U_2$  主向转动张量为  $A = R_2^L \cdot R_1^{LT}$ .

$t_2$  时刻的应力和偏背应力分别为

$$\tau_2 = B \cdot \tau_1 \cdot B^T + \tau_0, \quad \eta_2 = B \cdot \eta_1 \cdot B^T + \eta_0 \quad (4.8a, b)$$

将以上二式对时间求导, 得到

$$\dot{\tau}_0 = \dot{\tau}_2 - B \cdot \dot{\tau}_1 \cdot B^T - B \cdot \tau_1 \cdot \dot{B}^T, \quad \dot{\eta}_0 = \dot{\eta}_2 - B \cdot \dot{\eta}_1 \cdot B^T - B \cdot \eta_1 \cdot \dot{B}^T \quad (4.9a, b)$$

当  $t_2 \rightarrow t_1$  时,  $A, B \rightarrow I, R_2^L$  趋向于  $R_1^L$ , 都写成  $R^L, B = m A = m R^L \cdot R^{LT}, \tau_2$  趋向于  $\tau_1 (= \tau), \eta_2$  趋向于  $\eta_1 (= \eta)$ , 这样以上二式成为

$$\dot{\tau}_0 = \dot{\tau} - m \Omega^L \cdot \tau + \tau \cdot m \Omega^L, \quad \dot{\eta}_0 = \dot{\eta} - m \Omega^L \cdot \eta + \eta \cdot m \Omega^L \quad (4.10a, b)$$

其中,  $\Omega^L = R^L \cdot R^{LT}$ .

对于一般的有限变形过程, 变形梯度  $F = R \cdot U$ , 其变形率为

$$D = 0.5 R \cdot (\dot{U} \cdot U^{-1} + U^{-1} \cdot \dot{U}) \cdot R^T \quad (4.11)$$

由(4.4a, c, d)、(4.10a, b)、(4.11)、(4.5)和(4.6)式得

$$D = \frac{1}{h} \frac{1}{s: s} (\dot{\sigma}: s) s + \frac{1 + \nu}{E} \dot{\sigma} - \frac{\nu}{E} I \text{tr} \dot{\sigma} \quad (4.12)$$

$$\alpha = (\dot{\sigma}: s) s / s: s \quad (4.13)$$

其中,  $\dot{\sigma} = \dot{\sigma} - \Omega_m \cdot \dot{\sigma} + \dot{\sigma} \cdot \Omega_m, \alpha = \alpha - \Omega_m \cdot \alpha + \alpha \cdot \Omega_m, \Omega_m = R \cdot R^T + m R \cdot \Omega^L \cdot R^T, \Omega_m$  称之为修正相对旋率.

$\dot{\sigma}$  和  $\alpha$  分别是应力和偏背应力的修正相对共旋率(客观导数). (4.12)和(4.13)式就是 Mises 型屈服准则随动强化材料的广义 P\_R 方程.

(b) Mises 型屈服准则的等向强化的有限变形广义 P\_R 方程

类似于(a), 可求得这类材料的广义 P\_R 方程

$$D = \frac{1}{h} \frac{1}{s: s} (\dot{\sigma}: s) s + \frac{1 + \nu}{E} \dot{\sigma} - \frac{\nu}{E} I \text{tr} \dot{\sigma} \quad (4.14)$$

其中, 应力客观率  $\dot{\sigma}$  仍是应力的修正相对共旋率. 关于(4.12)和(4.14)式, 当弹性卸载时, 第一项为零, 如果是刚塑性变形则后两项为零. 与第2节的方程一样,  $h$  是等效应力的标量函数, 可由单向拉伸或比例加载确定.

由  $\Omega_m$  的表达式可以看出, 当  $m = 0$  时,  $\Omega_m$  就是相对共旋率  $\Omega = R \cdot R^T$ , 当  $m = 1$  时,  $\Omega_m = \Omega_E = R^E \cdot R^{ET}, R^E = R \cdot R^L$ . 用相对旋率构造广义 P\_R 方程中的张量客观导数曾为一些作者所提出和讨论<sup>[5], [6]</sup>. 用  $\Omega_E$  构造应力客观导数曾为 Sowerby 和 Chu<sup>[13]</sup> 所提出. 但都没有对这些广义 P\_R 方程中的变形率弹塑性和分解假设作出明确的解释. 作者提出的修正的相对旋率  $\Omega_m (0 \leq m \leq 1)$ , 相对旋率  $\Omega$  和旋率  $\Omega_E$  的角速度矢量在同一平面内. 同样, 推导广义 P\_R 方程时不作变形率弹塑性和分解假设.

## § 5. 算 例

我们就简单剪切变形进行应力计算, 如图 1 所示, 限于篇幅, 考虑随动强化刚塑性材料, 由(4.12)和(4.13)式或(2.13)和(2.14)式得本构关系

$$\hat{\alpha} = h D, \quad \hat{\alpha} = \alpha - w_a \cdot \alpha + \alpha \cdot w_a \quad (5.1)$$

旋率  $w_a$  分别取成  $w$  和  $\Omega_m$ , 它们的矩阵表达式如下

$$w = \frac{k}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Omega_m = \frac{(2-m)k}{k^2 + 4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2a, b)$$

在第3节中已求出  $\alpha$  和  $s$  的关系(3.2)式, 由于变形时体积不变, 可假设应力偏量  $s$  等于应力  $\sigma$  对于铝合金材料, 取  $\sigma_y = 207\text{MPa}$ ,  $h = 207\text{MPa}$ ,  $h$  取成常数, 相当于单向拉伸时线性强化,  $h$  取成常数, 计算得剪应力  $\sigma_{12}$  示于图2, 水平方向正应力  $\sigma_{11}$  示于图3, 垂直方向正应力  $\sigma_{22} = -\sigma_{11}$ .

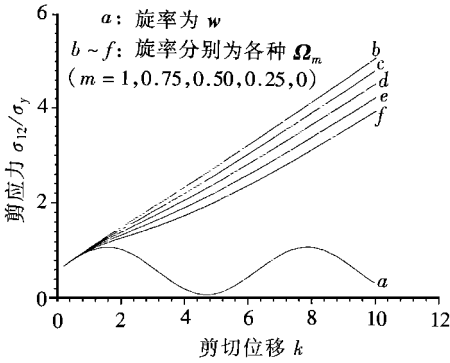


图2 剪应力变化

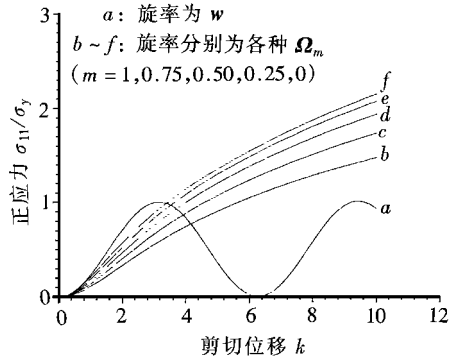


图3 正应力变化

从图2和图3看到, 如果采用物质旋率  $w$  构造  $\alpha$  的客观导数, 剪应力和正应力都振荡变化, 这是预料之中的. 采用各种  $\Omega_m$ , 剪应力和正应力都单调变化, 对于不同的  $m$  值, 各种剪应力比较接近, 当剪切位移  $k$  等于10时, 剪应力的最大值与最小值相对之差为24%, 当  $k < 0.5$  时, 采用  $w$  与各种  $\Omega_m$  应力相差不大.  $m$  的取值对结果影响不是很大. 在简单剪切变形中, 用  $\Omega_m$  代替  $w$ , 意味着构造应力共旋率的旋率速度减小. 在一般变形情况下, 构造张量客观率的旋率用  $\Omega_m$  代替  $w$  不仅仅是旋率速度大小改变, 而且还有方向改变(速度大小、方向都是指旋率的角速度矢量的大小和方向).

## § 6. 结 论

出于物理本质上的考虑, 本文不进行 Lee 的变形梯度弹塑性分解. 实际上, 这种分解在数学上可行, 但在物理上并非可行, 因为弹性和塑性变形同时产生, 不会有先有后. 变形率弹塑性和分解的失败也说明这种分解存在着问题. 当今关于塑性应变度量争论也很激烈, 认为是一个难点. 作者认为既然在加载过程中弹性和塑性耦合在一起, 那么对加载过程中塑性应变度量及塑性应变的本构关系研究就没有必要. 以 Lee 的变形梯度分解为基础的弹塑性理论研究是否有意义值得考虑. 一个有限变形过程是由无限多段小变形子过程组成. 我们研究各段子过程的张量增量叠加方式, 成功地避开了争议很大的变形率弹塑性和分解及 Lee 的变形梯度分解, 从而排除这种假设导致这类本构方程错误的可能性, 这对广义 P-R 方程研究具有较大意义. 对采用物质共旋率的广义 P-R 方程研究, 使简单剪切变形应力振荡的原因更加清楚. 本文提出一种张量的修正相对共旋率, 使张量客观率研究向前推进了一步, 当然修正相对旋率  $\Omega_m$  中系数  $m$  的确定有待进一步的理论和实验研究.

## 参 考 文 献

- 1 E. H. Lee, Elastic-plastic deformations at finite strains, J. Appl. Mech., ASME, 36 (1969), 1-6.
- 2 D. R. Metzger and R. N. Dubey, Corotational rates in constitutive modeling of elastic-plastic deformation, Int. J. Plasticity, 4 (1987), 341-368.

- 3 J. C. Naget al and J. E. de Jong, Some aspects of non\_isotropic work hardening in finite strain plasticity, Proc. of the Workshop on Plasticity of Metals at Finite Strain : Theory , Experiment and Computation , Eds. E. H. Lee and R. L. Mallett, Stanford University (1982), 65—102.
- 4 E. H. Lee, R. L. Mallett and T. B. Wertheimer, Stress analysis for anisotropic hardening in finite deformation plasticity, J. Appl. Mech. , ASME, **50** (1983), 554—560.
- 5 Y. F. Dafalias, Corotational rates for kinematic hardening at large plastic deformations, J. Appl. Mech. , ASME, **50** (1983), 561—565.
- 6 J. K. Dienes, On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies, Acta Mech. , **32** (1979), 217—232.
- 7 J. K. Dienes, A discussion of material rotation and stress rate, Acta Mech. , **65** (1986), 1—11.
- 8 P. M. Naghdi, A critical review of the state of finite plasticity, J. Appl. Math. Phys.(ZAMP) , **41** (1990), 315—393.
- 9 J. W. Hutchinson, Finite strain analysis of elastic\_plastic solids and structures, Numerical Solution of Nonlinear Structural Problem , Ed. R. F. Hartung, ASME (1973), 17—29.
- 10 V. Tvergaard, Effect of kinematic hardening on localized necking in biaxially stretched sheets, Int. J. Mech. Sci. , **20**(9) (1978), 651—658.
- 11 G. Z. Voyiadjis and P. I. Kattan, Finite elastic\_plastic analysis of torsion problems using different spin tensors, Int. J. Plasticity , **8** (1992), 271—314.
- 12 C. Truesdell, The Elements of Continuum Mechanics, New York, Springer\_Verlag (1966), 39—41.
- 13 R. Sowerby and E. Chu, Rotations, stress rates and strain measures in homogeneous deformation processes, Int. J. Solids Structures , **20**(11\_12) (1984), 1037—1048.

## Study on the Generalized Prandtl\_Reuss Constitutive Equation and the Corotational Rates of Stress Tensor

Shen Lijun

(Materials Science and Mechanics Research Center , Ningbo University , Ningbo ,  
Zhejiang 315211, P. R. China)

Pan Lizhou     He Fubao

(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics; Shanghai University ,  
Shanghai 200072, P. R. China)

### Abstract

In this paper, the generalized Prandtl\_Reuss(P\_R) constitutive equations of elastic\_plastic material in the presence of finite deformations through a new approach are studied. It analyzes the generalized P\_R equation based on the material corotational rate and clarifies the puzzling problem of the simple shear stress oscillation mentioned in some literature. The paper proposes a modified relative rotational rate with which to constitute the objective rates of stress in the generalized P\_R equation and concludes that the decomposition of total deformation rate into elastic and plastic parts is not necessary in developing the generalized P\_R equations. Finally, the stresses of simple shear deformation are worked out.

**Key words** finite elastic\_plastic deformations, generalized Prandtl\_Reuss constitutive equations, the corotational rates of stress tensor, simple shear stress oscillation