

# 厚板振动的三维弹性力学解<sup>\*</sup>

徐 旭<sup>①</sup> 何福保<sup>①</sup>

(1996 年 12 月 26 日收到, 1998 年 3 月 5 日收到修改稿)

## 摘 要

本文以弹性动力学的基本方程为基础, 推导出厚板的控制方程, 给出了在横向强迫力作用下, 厚板的应力、位移的动力响应, 得出厚板的振动特征是由对称振动、反对称振动和剪切振动的三种模式组成, 最后, 将简支厚方板作为实例导出自振频率的特征方程, 数值计算结果与经典理论、中厚板理论的结果作了比较。

关键词 厚板 自由振动 强迫振动

中图分类号 O342

## § 1. 引 言

板振动的经典理论是建立在 Kirchhoff 假设的基础上的, 并且忽略了转动惯量的影响。文 [1] 分析求解了薄板在各种边界条件下的自振频率。对于中厚板的振动问题, 相继利用 Reissner, Mindlin 或 Henky 理论, 根据横向剪切力、挤压应力和转动惯量的大小加以取舍, 解决了一批工程中厚板的动力学问题<sup>[2]</sup>。

无论是经典理论或是中厚板理论, 它们是在假设的基础上, 是一种近似的处理。近年来, 国内外学者从三维弹性理论出发, 研究厚板的静、动力学问题, 并取得一系列的成果<sup>[3][4]</sup>。

本文从三维弹性理论出发, 建立状态方程。通过横向强迫力的分解, 得到厚板的振动特征是由对称振动、反对称振动和剪切振动的三种模式组成。最后, 将简支厚方板作为实例导出自振频率的特征方程, 并进行了数值计算。

## § 2. 状态方程的推导

三维弹性力学的运动方程是

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \text{a} \quad (2.1)$$

\* 国家教委固体力学开放研究实验室资助

① 上海大学建筑工程学院, 上海 200072

物理方程为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{1-2\mu} \left[ (1-\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \quad \text{特征} = \frac{2G}{1-2\mu} \left[ (1-\mu) \frac{\partial v}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \\ \sigma_z &= \frac{2G}{1-2\mu} \left[ (1-\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \quad \text{通过} = \tau_{yx} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &= G \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

式中,  $G$  是剪切弹性模量,  $\mu$  是泊松比,  $\rho$  是材料密度. 若以位移和横向应力作为基本未知量, 便可将三维弹性力学方程(2.1)和(2.2)写成状态方程

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ Z \\ X \\ Y \\ W \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi^2 - \beta^2 - \frac{2}{1-\mu} \alpha^2 & -\frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha\beta & -\frac{\mu}{1-\mu} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha\beta & \xi^2 - \alpha^2 - \frac{2}{1-\mu} \beta^2 & -\frac{\mu}{1-\mu} \beta & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{1-\mu} \alpha & -\frac{\mu}{1-\mu} \beta & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ Z \\ X \\ Y \\ W \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} U &= Gu, \quad V = Gv, \quad W = Gw \\ X &= \tau_{xz}, \quad Y = \tau_{yz}, \quad Z = \sigma_z \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \alpha, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \beta, \quad \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{1}{C_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \xi^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中,  $C_s$  为剪切波的波速.

由(2.2)式并利用(2.3)式, 可得

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{1-\mu} \alpha & \frac{2\mu}{1-\mu} \beta & \frac{\mu}{1-\mu} \\ \frac{2\mu}{1-\mu} \alpha & \frac{2}{1-\mu} \beta & \frac{\mu}{1-\mu} \\ \beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ V \\ Z \end{Bmatrix} \quad \text{n i} \quad (2.5)$$

### § 3. 状态方程的求解

状态方程(2.3)可以写成另一形式

$$\mathcal{Y} \{ T_1 \} = [A] \{ T_2 \} \quad \text{y ei} \quad (3.1)$$

式中

$$\mathcal{Y} = \frac{\partial}{\partial z} \quad \{ T_1 \} = [U \quad V \quad Z]^T \quad \{ T_2 \} = [X \quad Y \quad W]^T \quad \text{th}$$

$$[A] \text{ 是 } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 & -\beta \\ -\alpha & -\beta & \xi^2 \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} \xi^2 - \beta^2 & \frac{2}{1-\mu}\alpha^2 & -\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\beta & -\frac{\mu\alpha}{1-\mu} \\ -\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\beta & \xi^2 - \alpha^2 - \frac{2}{1-\mu}\beta^2 & -\frac{\mu\beta}{1-\mu} \\ -\frac{\mu}{1-\mu}\alpha & -\frac{\mu\beta}{1-\mu} & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

由(3.1)式可以得到下列关系式

$$\begin{cases} T_2 = [A]^{-1} [B] T_1 \\ T_1 = [B]^{-1} [A] T_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

状态方程(2.3)的解,可以在z轴方向上写成Maclaurin级数的形式,简记为

$$\{T\} = \left[ 1 + z\gamma + \frac{z^2}{2!}\gamma^2 + \frac{z^3}{3!}\gamma^3 + \dots \right] \{T\} \Big|_{z=0} \quad (3.4)$$

其中,  $\{T\} = [T_1^T \ T_2^T]^T$ . 为了求出上式中的各阶导数,可以多次利用关系式(3.1)、(3.3),经整理得

$$\begin{cases} T_1 \\ T_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} I + \frac{z^2}{2!}E + \frac{z^4}{4!}E^2 + \dots & A \left[ zI + \frac{z^3}{3!}F + \frac{z^5}{5!}F^2 + \dots \right] \\ B \left[ zI + \frac{z^3}{3!}E + \frac{z^5}{5!}E^2 + \dots \right] & I + \frac{z^2}{2!}F + \frac{z^4}{4!}F^2 + \dots \end{bmatrix} \begin{cases} T_1 \\ T_2 \end{cases} \Big|_{z=0} \quad (3.5)$$

式中,  $[I]$  为三阶单位矩阵,  $\{T\}_{z=0} = [T_1^T \ T_2^T]^T_{z=0}$  是  $z=0$  平面上的未知初始函数. 利用 Sylvester 定理<sup>[5]</sup> 上式可以作进一步的简化. 根据这一定理,矩阵  $[E]$ 、 $[F]$  的  $n$  次幂的函数则为

$$[E]^n = [E_1] \lambda_1^n + [E_2] \lambda_3^n, [F]^n = [F_1] \lambda_1^n + [F_2] \lambda_3^n \quad (3.6)$$

式中

$$\begin{cases} [E_1] = \frac{[E] - \lambda_3[I]}{\lambda_1 - \lambda_3}, & [E_2] = \frac{[E] - \lambda_1[I]}{\lambda_3 - \lambda_1} \\ [F_1] = \frac{[F] - \lambda_3[I]}{\lambda_1 - \lambda_3}, & [F_2] = \frac{[F] - \lambda_1[I]}{\lambda_3 - \lambda_1} \end{cases} \quad (3.7)$$

且  $\lambda_1$  和  $\lambda_3$  是矩阵  $[E]$  和  $[F]$  的特征根,它们是

$$\lambda_1 = \xi^2 - \dots^2, \quad \lambda_3 = \Omega^2 - \dots^2 \quad (3.8)$$

式中,  $\Omega = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}$ ,  $\dots^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . 将(3.5)式代入(3.4)式,结合双曲函数的级数展开表达式,可以整理成

$$\begin{cases} T_1 \\ T_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} E_1 \text{ch}(z\gamma_1) + E_2 \text{ch}(z\gamma_2) & AF_1 \frac{\text{sh}(z\gamma_1)}{\gamma_1} + AF_2 \frac{\text{sh}(z\gamma_2)}{\gamma_2} \\ BE_1 \frac{\text{sh}(z\gamma_1)}{\gamma_1} + BE_2 \frac{\text{sh}(z\gamma_2)}{\gamma_2} & F_1 \text{ch}(z\gamma_1) + F_2 \text{ch}(z\gamma_2) \end{bmatrix} \begin{cases} T_1 \\ T_2 \end{cases} \Big|_{z=0} \quad (3.9)$$

式中,  $\gamma_1 = \lambda_1^{1/2} = (\xi^2 - \dots^2)^{1/2}$ ,  $\gamma_2 = \lambda_3^{1/2} = (\Omega^2 - \dots^2)^{1/2}$ .

公式(3.9)或可写成  $\{T\} = [L_{ij}] \{T\}_{z=0}$ , 式中  $L_j(i, j = 1, 2, \dots, 6)$  是算符矩阵,它的具体表达式见附录.

## § 4. 厚板振动问题的控制方程

为了求出厚板在任意横向载荷作用下的振动控制方程, 将作用于厚板的上下表面载荷  $P_1(x, y, t)$ ,  $P_2(x, y, t)$  进行分解, 使之分解成对称载荷  $P_a(x, y, t)$  和反对称载荷  $P_b(x, y, t)$ , 如图 1 所示。这里取

$$P_a = (P_1 + P_2)/2, \quad P_b = (P_1 - P_2)/2 \quad (4.1)$$

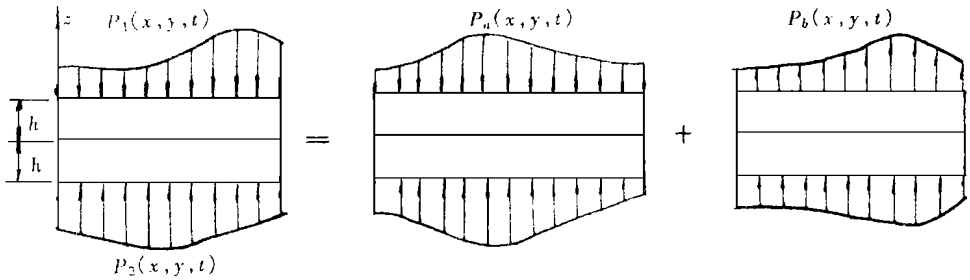


图 1

### (A) 对称受载时厚板的振动控制方程

厚板在对称受载时, 在中面  $z = 0$  上有

$$X_0 = Y_0 = W_0 = 0 \quad (4.2)$$

考虑到厚板上下表面的边界条件,  $z = \pm h$  处有

$$X = Y = 0, \quad Z = -P_a(x, y, t) \quad (4.3)$$

此时, 代入状态方程(3.9)可以得到

$$\begin{bmatrix} L_{31} & L_{32} & L_{33} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} \end{bmatrix}_{z=\pm h} \begin{cases} U_0 \\ V_0 \\ Z_0 \end{cases} = \begin{cases} -P_a \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

取辅助函数  $\phi(x, y, t)$ , 且有

$$\left. \begin{aligned} U_0 &= (L_{52}L_{43} - L_{42}L_{53})_{z=\pm h} \phi(x, y, t) \\ V_0 &= (L_{53}L_{41} - L_{51}L_{43})_{z=\pm h} \phi(x, y, t) \\ Z_0 &= (L_{42}L_{51} - L_{41}L_{52})_{z=\pm h} \phi(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

将上式代入(4.4)式, 并利用附录中的公式, 得到厚板受有对称载荷时的振动控制方程

$$\frac{\text{sh}(h\gamma_1)}{\xi^2} [(2\xi^2 - \xi^2)^2 \text{sh}(h\gamma_1) \text{ch}(h\gamma_2) + 4\xi^2 \gamma_1 \gamma_2 \text{sh}(h\gamma_2) \text{ch}(h\gamma_1)] \cdot \phi(x, y, t) = P_a(x, y, t) \quad (4.6)$$

辅助函数  $\phi(x, y, t)$  求出后, 由(4.5)式可以求得  $U_0, V_0, Z_0$ , 再由(3.9)式得到  $U, V, W$  和  $X, Y, Z$ , 通过公式(2.5)可以求得  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 。于是, 所有动力响应可以全部得到。

### (B) 反对称受载时厚板的振动控制方程

反对称受载时, 其中面  $z = 0$  上有

$$U_0 = V_0 = Z_0 = 0 \quad (4.7)$$

考虑到厚板上下表面的力边界条件  $z = \pm h$  处有

$$X = Y = 0 \quad Z = \pm P_b(x, y, t) \tag{4.8}$$

此时, 代入状态方程(3.9)可以得到

$$\begin{matrix} L_{34} & L_{35} & L_{36} \\ L_{44} & L_{45} & L_{46} \\ L_{54} & L_{55} & L_{56} \end{matrix} \begin{matrix} X_0 \\ Y_0 \\ W_0 \end{matrix} = \begin{matrix} \pm P_b \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \tag{4.9}$$

取辅助函数  $\phi(x, y, t)$ , 且有

$$\left. \begin{matrix} X_0 = (L_{46}L_{55} - L_{45}L_{56})_{z=\pm h}\phi(x, y, t) \\ Y_0 = (L_{44}L_{56} - L_{46}L_{54})_{z=\pm h}\phi(x, y, t) \\ W_0 = (L_{45}L_{54} - L_{44}L_{55})_{z=\pm h}\phi(x, y, t) \end{matrix} \right\} \tag{4.10}$$

将上式代入(4.9)式, 并利用附录中的公式, 得到厚板受有反对称载荷时的振动控制方程

$$\frac{\text{ch}(h\gamma_1)}{\xi^2} \left[ (2\xi^2 - \xi^2)^2 \text{ch}(h\gamma_1) \frac{\text{sh}(h\gamma_2)}{\gamma_2} + 4\xi^2 \gamma_1 \text{sh}(h\gamma_1) \text{ch}(h\gamma_2) \right] \cdot \phi(x, y, t) = -P_b(x, y, t) \tag{4.11}$$

辅助函数  $\phi(x, y, t)$  求得后, 由(4.10)式可以求得  $X_0, Y_0, W_0$ , 再由(3.9)式得到  $U, V, W$  和  $X, Y, Z$ , 通过公式(2.5)可以求得  $\alpha_x, \alpha_y, \tau_{xy}$ . 于是, 所有动力响应可以全部得到.

叠加以上两类载荷作用下的所有结果, 就可以得到厚板在上下表面载荷  $P_1(x, y, t), P_2(x, y, t)$  作用下的动力响应.

### § 5. 算 例

现以四边简支厚板为例(图2), 来分析它的振动响应. 边界条件是

$$\left. \begin{matrix} x = 0, a; & V = W = \alpha_x = 0 \\ y = 0, b; & U = W = \alpha_y = 0 \end{matrix} \right\} \tag{5.1}$$

#### (A) 对称受载时的振动

厚板上下表面作用的对称载荷可以展开成 Fourier 级数

$$P_a(x, y, t) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} P_{amn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp[i\omega t] \tag{5.2}$$

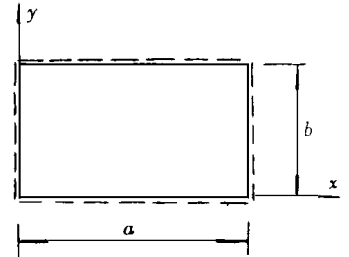


图 2

式中,  $\omega$  为对称载荷的圆频率.

选择辅助函数

$$\phi(x, y, t) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp[i\omega t] \tag{5.3}$$

由上节所述可知, 它满足简支边界条件(5.1)式. 对于平稳振动阶段, 将(5.2)、(5.3)式代入(4.6)式, 可以得到厚板受有对称载荷时振动控制方程的特解. 辅助函数  $\phi(x, y, t)$  的 Fourier 系数

$$\phi_{mn} = \frac{-(\omega^2/C_s^2)P_{amn}}{D^2 \text{sh}^2(h\sqrt{A}) \text{ch}(h\sqrt{B}) + 4C\sqrt{AB} \text{sh}(h\sqrt{A}) \text{sh}(h\sqrt{B}) \text{ch}(h\sqrt{A})} \tag{5.4}$$

式中, 实系数  $A, B, C, D$  的表达式为

$$A = \frac{m\pi}{a} \left[ \frac{m\pi}{a} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 - \frac{\omega^2}{C_s^2} \right], \quad B = \left[ \frac{m\pi}{a} + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 - \Omega \frac{\omega^2}{C_s^2} \right] \\ C = - \left[ \frac{m\pi}{a} + \frac{n\pi}{b} \right], \quad D = \pm \frac{\omega^2}{C_s^2} - 2 \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (5.5)$$

对于自由振动, 它的特征方程为

$$\text{sh}(h\sqrt{A}) [D^2 \text{sh}(h\sqrt{A}) \text{ch}(h\sqrt{B}) + 4C\sqrt{AB} \text{sh}(h\sqrt{B}) \text{ch}(h\sqrt{A})] = 0 \quad (5.6)$$

式中的实系数  $A, B, C, D$  的表达式, 只要将(5.5)式中的  $\omega$  改成  $\omega$  即可.  $\omega$  为自振频率.

由(5.6)式可以看出, 对称自由振动可以分为二种模式:

(1) 厚度剪切振动

$$\text{sh}(h\sqrt{A}) = 0 \text{ 即 } h\sqrt{A} = p\pi \quad (p = 1, 2, 3, \dots, \infty)$$

通过整理可得到特征方程的解

$$\frac{\omega^2 h^2}{C_s^2} = h^2 \left[ \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + p^2 \pi^2 \right] \quad (5.7)$$

由上式可以看出, 该式与作者<sup>[6]</sup>通过引入位移函数的方法得出的结果是一致的. 该式也和 Mindlin<sup>[7]</sup>得出的结果是吻合的. 这种振动模式, Mindlin 称之为厚度剪切振动. 此时, 板的体积应变为零.

(2) 横向对称振动

$$D^2 \text{sh}(h\sqrt{A}) \text{ch}(h\sqrt{B}) + 4C\sqrt{AB} \text{sh}(h\sqrt{B}) \text{ch}(h\sqrt{A}) = 0 \quad (5.8)$$

采用一维搜索和二分法, 可以得到以下结果, 如表 1 所列.

表 1

对称自由振动的频率

( $a/b = 1, \omega^* = \omega a / C_s, h^* = h/a, \mu = 0.3$ )

$\omega^*$ ( $m, n$ )	(5, 1)	(6, 1)	(7, 1)	(8, 1)	(9, 1)	(10, 1)
0.05 ~ 0.10	0	0	0	0	0	0
0.15	0	0	0	0	0	29.9103
0.20	0	0	0	23.8686	26.6344	29.4480
0.25	0	0	20.8215	23.6220	26.4631	29.3290
0.30	0	17.8852	20.6907	23.5384	26.4099	29.2953
0.35	0	17.7974	20.6391	23.5082	26.3923	29.2852
0.40	14.9349	17.7578	20.6178	23.4968	26.3864	29.2822
0.45	14.8979	17.7384	20.6088	23.4925	26.3844	29.2813
0.50	14.8786	17.7306	20.6049	23.4909	26.3837	29.2810

(B) 反对称受载时的振动

厚板上下表面作用的反对称载荷可以展开成 Fourier 级数

$$P_b(x, y, t) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} P_{bmn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp[i\omega t] \quad (5.9)$$

选择辅助函数

$$\phi(x, y, t) = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \phi_{amn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \exp[i\omega t] \quad (5.10)$$

同样, 它满足简支边界条件。对于平稳振动阶段, 将(5.9)、(5.10)式代入(4.11)式, 可以得到厚板受有反对称载荷时振动控制方程的特解。辅助函数  $\phi(x, y, t)$  的 Fourier 系数

$$\phi_{mn} = \frac{(\omega^2 / C_s^2) P_{bmn}}{D^2 \frac{\text{sh}(h\sqrt{B})}{\sqrt{B}} \text{ch}^2(h\sqrt{A}) + 4C\sqrt{A}\text{sh}(h\sqrt{A})\text{ch}(h\sqrt{A})\text{ch}(h\sqrt{B})} \quad (5.11)$$

式中的实系数  $A, B, C, D$  和(5.5)式相同。

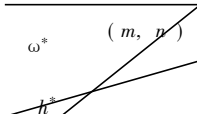
以于自由振动, 它的特征方程为

$$D^2 \text{sh}(h\sqrt{B}) \text{ch}(h\sqrt{A}) + 4C\sqrt{AB}\text{sh}(h\sqrt{A})\text{ch}(h\sqrt{B}) = 0 \quad (5.12)$$

同样, 式中的实系数  $A, B, C, D$  的表达式, 只要将  $\omega$  改成  $\omega$  即可。采用一维搜索和二分法, 可得厚板反对称自由振动的频率, 见表 2。

表 2 反对称自由振动的频率

( $a/b = 1, \omega^* = \omega a / C_s, h^* = h/a, \mu = 0.3$ )

$\omega^*$  ( $m, n$ )	(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(1, 3)	(3, 2)
0.05	0.9315	2.2260	3.4207	4.1714	5.2391
0.10	1.7104	3.7555	5.4443	6.4406	7.7946
0.15	2.2964	4.6819	6.5225	7.5701	8.9718

为了将本文结果与经典板理论、中厚板理论作一比较, 现将两种经典自振频率列在表 3 和表 4 中。

表 3 按经典板理论得到的自振频率

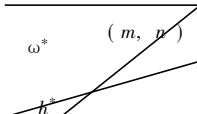
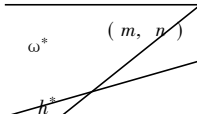
$\omega^*$  ( $m, n$ )	(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(1, 3)	(3, 2)
0.05	0.9632	2.4079	3.8527	4.8159	6.2606
0.10	1.9263	4.8159	7.7054	9.6317	12.5213
0.15	2.8895	7.2238	11.5581	14.4476	18.7819

表 4 按中厚板理论得到的自振频率

$\omega^*$  ( $m, n$ )	(1, 1)	(1, 2)	(2, 2)	(1, 3)	(3, 2)
0.05	0.9613	2.4056	3.8489	4.8112	6.2555
0.10	1.9225	4.8112	7.6979	9.6224	12.5110
0.15	2.8838	7.2168	11.5469	14.4336	18.7665

## § 6. 分析与结论

从表 1 可以看出,板的对称振型在厚跨比  $2h/a < 1/5$  时几乎不出现。随着厚跨比的增大,对称振动频率逐渐减小,且趋于一常数。

对于板的反对称振动,从表 2 可以看出,无论是基频还是高频都有解。因此,板的反对称自由振动是主要的振动模式。

对照表 2、表 3 和表 4 还可以看出,当厚跨比较大时或  $(m, n)$  取高频时,三种理论结果的差别增大。本文从三维弹性力学的基本方程出发,在推导过程中并未引入任何假设,本文提出的方法适合于求解任意厚跨比、任意阶振型的频率。

### 附 录

$$L_{11} = L_{44} = \frac{2\alpha^3}{\xi^2} [\operatorname{ch}(zY_2) - \operatorname{ch}(zY_1)] + \operatorname{ch}(zY_1)$$

$$L_{12} = L_{21} = L_{45} = L_{54} = \frac{2\alpha\beta}{\xi^2} [\operatorname{ch}(zY_2) - \operatorname{ch}(zY_1)]$$

$$L_{13} = L_{64} = \frac{\alpha}{\xi^2} [\operatorname{ch}(zY_2) - \operatorname{ch}(zY_1)]$$

$$L_{22} = L_{55} = \frac{2\beta^2}{\xi^2} [\operatorname{ch}(zY_2) - \operatorname{ch}(zY_1)] + \operatorname{ch}(zY_1)$$

$$L_{23} = L_{65} = \frac{\beta}{\xi^2} [\operatorname{ch}(zY_2) - \operatorname{ch}(zY_1)]$$

$$L_{31} = L_{46} = \frac{2\alpha}{\xi^2} (2\cdot\cdot^2 - \xi^2) [\operatorname{ch}(zY_1) - \operatorname{ch}(zY_2)]$$

$$L_{32} = L_{56} = \frac{2\beta}{\xi^2} (2\cdot\cdot^2 - \xi^2) [\operatorname{ch}(zY_1) - \operatorname{ch}(zY_2)]$$

$$L_{33} = L_{66} = \frac{2\cdot\cdot^2}{\xi^2} [\operatorname{ch}(zY_1) - \operatorname{ch}(zY_2)] + \operatorname{ch}(zY_2)$$

$$L_{14} = \frac{\alpha^2}{\xi^2} \left[ \frac{\operatorname{sh}(zY_2)}{Y_2} - \frac{\operatorname{sh}(zY_1)}{Y_1} \right] + \frac{\operatorname{sh}(zY_1)}{Y_1}$$

$$\omega \quad L_{15} = L_{24} = \frac{\alpha\beta}{\xi^2} \left[ \frac{\operatorname{sh}(zY_2)}{Y_2} - \frac{\operatorname{sh}(zY_1)}{Y_1} \right]$$

$$L_{16} = L_{34} = -\frac{2\alpha}{\xi^2} Y_1 \operatorname{sh}(zY_1) - \frac{\alpha}{\xi^2} (2\cdot\cdot^2 - \xi^2) \frac{\operatorname{sh}(zY_2)}{Y_2}$$

$$L_{25} = \frac{\beta^2}{\xi^2} \left[ \frac{\operatorname{sh}(zY_2)}{Y_2} - \frac{\operatorname{sh}(zY_1)}{Y_1} + \frac{\operatorname{sh}(zY_1)}{Y_1} \right]$$

14 36

$$L_{26} = L_{35} = -\frac{2\beta}{\xi^2} Y_1 \operatorname{sh}(zY_1) - \frac{\beta}{\xi^2} (2\cdot\cdot^2 - \xi^2) \frac{\operatorname{sh}(zY_2)}{Y_2}$$

$$L_{36} = \frac{1}{\xi^2} (2\cdot\cdot^2 - \xi^2)^2 \frac{\operatorname{sh}(zY_2)}{Y_2} + \frac{4\cdot\cdot^2}{\xi^2} Y_1 \operatorname{sh}(zY_1)$$

$$L_{41} = \frac{4\alpha^2}{\xi^2} [Y_2 \operatorname{sh}(zY_2) - Y_1 \operatorname{sh}(zY_1)] - (\beta^2 - \xi^2) \frac{\operatorname{sh}(zY_1)}{Y_1}$$

$$L_{42} = L_{51} = \frac{\alpha\beta}{\xi^2} (4\cdot\cdot^2 - 3\xi^2) \frac{\operatorname{sh}(zY_1)}{Y_1} + \frac{4\alpha\beta}{\xi^2} Y_2 \operatorname{sh}(zY_2)$$

$$L_{43} = L_{61} = \frac{\alpha}{\xi^2} (2\cdot\cdot^2 - \xi^2) \frac{\operatorname{sh}(zY_1)}{Y_1} + \frac{2\alpha}{\xi^2} Y_2 \operatorname{sh}(zY_2)$$

$$L_{52} = \frac{4\beta^2}{\xi^2} [Y_2 \operatorname{sh}(zY_2) - Y_1 \operatorname{sh}(zY_1)] - (\alpha^2 - \xi^2) \frac{\operatorname{sh}(zY_1)}{Y_1}$$



$$L_{53} = L_{62} = \frac{\beta}{\xi^2} (2\gamma_1^2 - \xi^2) \frac{\text{sh}(z\gamma_1)}{\gamma_1} + \frac{2\beta}{\xi^2} \gamma_2 \text{sh}(z\gamma_2)$$

$$L_{63} = \frac{\gamma_1^2}{\xi^2} \frac{\text{sh}(z\gamma_1)}{\gamma_1} + \frac{\gamma_2}{\xi^2} \text{sh}(z\gamma_2)$$

## 参 考 文 献

- 1 曹国雄,《弹性矩形薄板振动》,中国建筑工业出版社,北京(1983).
- 2 曹志远,《厚板动力学理论及其应用》,科学出版社,北京(1983).
- 3 钱伟长,不用 Kirchhoff 假设的弹性板理论初探,上海工业大学学报,15(1)(1994),1—26.
- 4 曾德顺,厚圆柱壳的非轴对称自由振动,同济大学学报,22(3)(1994),274—278.
- 5 Stephen Barnett, Matrix Methods of Engineers and Scientists, McGraw\_Hill Book Co. (UK) (1979).
- 6 王飞跃、何福保,用弹性力学方法研究横观各向同性四边简支矩形平板的自由振动问题,固体力学学报,6(4)(1985),429—435.
- 7 R. D. Mindlin, Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates, J. Appl. Mech., 18(1)(1951),31—38.

## Three Dimensional Elasticity Solution for Vibration Problem of Thick Plate

Xu Xu      He Fubao

(Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

### Abstract

In this paper, based upon the basic equations of three dimensional theory of elastodynamics, the governing differential equations of thick plate have been formulated. The dynamic response of stress and displacement of thick plate subjected to the transversed forced are obtained. It is shown that the vibrational characters of thick plate consist of three modes: thickness shear mode, symmetric mode and anti\_symmetric mode. The characteristic equations of simply supported thick plate are derived and the comparison of the free vibration frequencies based on the classic theory, middle thickness plate theory and three dimensional elasticity theory are given.

**Key words** thick plate, free vibration, forced vibration