

一串变形液泡在管中的流动

陈晋南^① 查尔斯 马德瑞里^②

(吴望一推荐, 1996 年 5 月 27 日收到)

摘 要

我们使用边界积分法求解一串液泡在管中的运动。当液泡在管中运动, 总的正压力不再是常数, 这一力使液泡变形和加长。我们发现变形液泡和球状液滴(具有同样的相当直径)运动的速度是不一样的, 它随着液泡间距的减小而增加。间距 L'/a' 对提高速度的影响大于毛细准数的影响。速度的增长随着液泡直径的减少而变得不明显。

关键词 两相流 变形 周期液泡

中图分类号 O357

§ 1. 引 言

王和 Skalak^[1] 曾研究固体球在管中的运动。Hyman 和 Skalak^[2~3] 曾研究不变形的液滴在管中的运动。他们研究的液滴半径最大到 0.7。Pozrikidis^[4] 研究变形的液滴在管中的运动。在这篇文章中, 我们研究两相流动的区域, 讨论一串间距相等周期性液泡在连续介质液体中的轴对称运动。用边界积分法求变形液滴运动的数值解。这两种液体介质是互不相溶的。这个两相流动将作为发展边界分数值解的模型。我们将扩展这个算法去解决更为复杂的液滴在管中的热变形蠕动。

§ 2. 流体动力方程式和边界条件

为了使边界积分法便于使用, 将问题建立在管壁是静止的参照系。无量纲的方程用符号“'”标注, 无量纲的方程不用符号标注。在这一参照系中, 建立了 z 轴在管中心线上的柱坐标系 (ρ, ω, z) 。假定液泡被浮力驱动沿中心线向 z 轴正向轴对称的运动(见图 1(a))。液泡的密度认为是低于连续介质的液体的密度。液泡的球半径和管子的半径分别是 a' (假定液泡是球状时的半径 $a' = (3V_p'/4\pi)^{1/3}$ V_p' 是液泡的体积) 和 b' 。长度用管子半径 b' 无量纲化。液泡和连续介质的变量分别用(1)和(2)标注。粘度用 $\mu^{(i)}$ 表示, 液泡和连续介质的粘度比用 κ 定义。

如果单个液滴在无界场中蠕动, 球形液滴的运动速度为:

① 北京理工大学化工与材料学院, 北京 100081

② 纽约市立大学纽约市立学院化工系, 美国

$$U'_0 = - \frac{(1 + \kappa)(\rho^{(2)} - \rho^{(1)})g'a'^2}{\mu'^{(2)}(1 + 3\kappa/2)} \tag{2.1}$$

式中, $\rho^{(i)}$ 是相态(i)的密度, g' 重力加速度. 用这一速度去无量纲化运动方程. 在建立运动方程时, 我们假设雷诺数小到流动可看成准定常和蠕动, 控制方程是斯托克斯方程(Happel 和 Brenner^[5]):

$$0 = \nabla' \cdot p^{(i)} + \nabla'^2 u^{(i)} \tag{2.2}$$

式中, $p^{(i)}$ 是压力(包括流体静力的部分 $\rho^{(i)}g'z'$), 以 $\mu'^{(2)}U'_0/b'$ 无量纲化. 流场满足不可压连续性方程:

$$0 = \nabla' \cdot u^{(i)} \tag{2.3}$$

沿管壁和液泡表面建立边界条件. 沿管壁流体的速度为零,

$$u'_z = 0, \quad u'_\rho = 0 \tag{2.4}$$

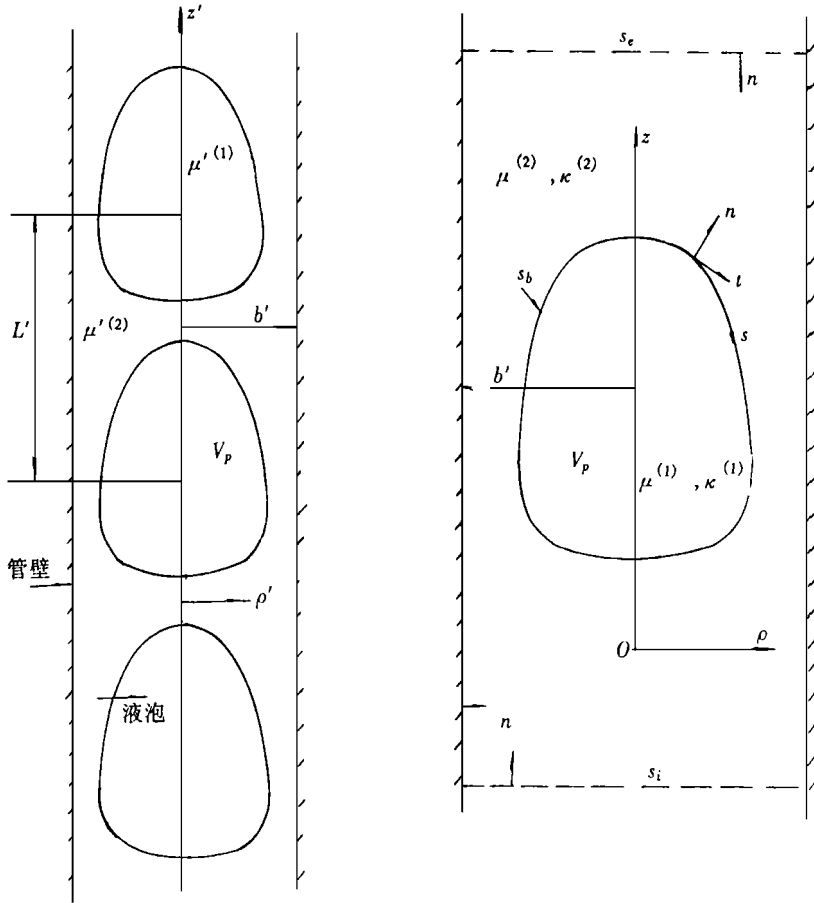


图 1(a) 两相流中周期液泡的流动 图 1(b) 定义用于公式中的边界

用液泡表面参数建立液泡表面的边界条件. 液泡轴对称表面点轨迹用参数($\rho(s), z(s)$)描述, S 是弧长, 从液泡顶端极点测量(见图 1(b)). 定义全弧长为 s_i . 使用这些参量, 得出表面单位法向量($n = n_\rho \delta_\rho + n_z \delta_z$)和单位切向量($t = t_\rho \delta_\rho + t_z \delta_z$)关系式如下:

$$n_\rho = - \frac{z'}{r}, \quad n_z = \frac{\rho'}{r} \text{ 和 } t_\rho = \frac{\rho'}{r}, \quad t_z = \frac{z'}{r}$$

式中, 上标“·”表示对变量 s 求导数。 n 以液泡表面的外法线方向为正, 而 t 指向 s 增加的方向。 表面的平均曲率由下式给出:

$$\therefore \dot{n} = -z \rho + \rho_x \rho_y \quad (2.5)$$

$$\text{液泡表面的速度是连续的, } u^{(1)} = u^{(2)} = u^{(1)} \quad (2.6)$$

在液泡表面正应力、切向应力和运动条件相平衡的应力式是:

$$\kappa(n \cdot \tau^{(1)} - (n \cdot \tau^{(2)})) = F_i \quad (2.7)$$

$$F_i = n_i [(\dot{s} \cdot n / Ca - 3z_x (b'/a')^2 (1 + 1.5\kappa) / (1 + \kappa))] \quad (2.8)$$

式中, $Ca = \mu^{(2)} U' o / \sigma$, 表面张力 σ 是常数, $\tau^{(i)}$ 是相态(i)的应力张量, 用 $\mu^{(2)} U' o / b'$ 无量纲化。 对液泡的变形和运动, (2.8)式提供了驱动力。 无量纲准数 Ca 和 κ 控制了系统。 毛细准数表示了粘性与表面张力之比这一重要关系。

在液泡表面的运动学条件是: $H / \delta t + n \cdot u = 0$

式中液泡自由面方程 $H(\rho, z, t) = 0$, 时间 t 用 $b' / U' o$ 无量纲化。 在稳定状态下, 在管壁固定的参照系中, 液泡表面运动条件为:

$$n \cdot u = n \cdot U \delta_z \quad (2.9)$$

§ 3. 边界积分法求解

(1) 格林函数

为了用边界积分法求数值解, 必须建立周期性的点源格林函数去描述液泡流动(Youngren 和 Acrivos^[6], Pozrikidis^[7])。 因为液泡的形状是轴对称的和流场是周期性的, 我们用一个在管中心线上的点源环去建立基本解。 另外为了简化边界积分法, 我们使这些基本解满足管壁无滑移的边界条件。 为了构成这个解, 我们将其分成两部分。

第一个格林函数是在无界场中的点源环。 这些解由在无界场中环上的点源在 x 处产生的环速度积分而得, 结果是(Tozeren^[8]):

$$\left. \begin{aligned} U_z^z &= -\frac{1}{4} \frac{k}{(\rho_x \rho_y)^{1/2}} \left[F(k) + \frac{z^2}{d^2} E(k) \right] \\ U_{\rho}^z &= -\frac{z}{8\pi} \frac{k}{(\rho_x)^{3/2} (\rho_y)^{1/2}} \left[F(k) + (\rho_x^2 - \rho_y^2 - z^2) \frac{E(k)}{d^2} \right] \\ U_z^{\rho} &= \frac{z}{8\pi} \frac{k}{(\rho_x)^{1/2} (\rho_y)^{3/2}} \left[F(k) - (\rho_x^2 - \rho_y^2 + z^2) \frac{E(k)}{d^2} \right] \\ U_{\rho}^{\rho} &= -\frac{1}{8k} \frac{k}{(\rho_x \rho_y)^{3/2}} \left\{ (\rho_x^2 + \rho_y^2 + 2z^2) F(k) \right. \\ &\quad \left. - [2\pi^4 + 3(\rho_x^2 + \rho_y^2)z^2 + (\rho_x^2 - \rho_y^2)^2 \frac{E(k)}{d^2}] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

式中, $z = z_x - z_y$, $k = [4\rho_x \rho_y / (z^2 + (\rho_x + \rho_y)^2)]^{1/2}$, $d^2 = (z_x - z_y)^2 + (\rho_x - \rho_y)^2$, $F(K)$ 和 $E(K)$ 是一和第二类的完全椭圆积分(Abramowitz 和 Stegun^[9])。 在上中环的 z 坐标是 z_y , 其半径是 ρ_y ; z_x 和 ρ_x 定义了柱坐标的场点。 (3.1)式在对称轴上是无定义的, 下面给出当 $\rho_x \rightarrow 0$ 时速度表示式:

$$U_z^z = -\frac{2z^2 + \rho_y^2}{4(z^2 + \rho_y^2)^{3/2}}, \quad U_z^{\rho} = \frac{z\rho_y}{4(z^2 + \rho_y^2)^{3/2}}, \quad U_z^{\rho} = U_{\rho}^{\rho} = 0$$

为了得到满足管壁无滑移条件的格林函数, 我们构造一个补函数 V_j^i 满足管壁边界条件, 当没有点源时它也满足斯托克斯方程。在柱坐标中斯托克斯方程轴对称的一般解:

$$\left. \begin{aligned} V_z^z(z, \rho) &= \int_0^\infty \{A1(t)tI_0(t\rho) + B1(t)[\rho I_1(t\rho) + 2I_0(t\rho)]\} \cos(tz) dt \\ V_\rho^z(z, \rho) &= \int_0^\infty [A1(t)I_1(t\rho) + B1(t)\rho I_0(t\rho)] t \sin(tz) dt \\ V_z^\rho(z, \rho) &= \int_0^\infty \{A2(t)tI_0(t\rho) + B2(t)[\rho I_1(t\rho) + 2I_0(t\rho)]\} \sin(tz) dt \\ \text{式} \quad V_\rho^\rho(z, \rho) &= - \int_0^\infty [A2(t)I_1(t\rho) + B2(t)\rho I_0(t\rho)] t \cos(tz) dt \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

式中, I_1 和 I_0 是零阶和一阶变形的贝塞尔函数。函数 $A(t)$ 和 $B(t)$ 的选择使补函数在管壁 $\rho_x = \rho_0$ 处满足边界条件 $V_j^i = -U_j^i$ 。为了满足这一条件, 我们首先用傅立叶变换计算 U_j^i 在 $\rho = \rho_0$ 的值。对于函数是 z_x 的偶函数者简化成余弦变换:

$$U_j^i(\rho_0, z; \rho_y, 0) = \int_0^\infty g_j^i(t) \cos zt dt \quad (3.3a)$$

而对于函数是 z_x 的奇函数者简化成正弦变换:

$$U_j^i(\rho_0, z; \rho_y, 0) = \int_0^\infty g_j^i(t) \sin zt dt \quad (3.3b)$$

$$\left. \begin{aligned} g_z^z &= -\frac{1}{2\pi} [2K_0(\rho_0 t) I_0(\rho_y t) - \rho_0 t K_1(\rho_0 t) I_0(\rho_y t) + \rho_y t K_0(\rho_0 t) I_1(\rho_y t)] \\ g_\rho^z &= \frac{1}{2\pi} [\rho_y t K_1(\rho_0 t) I_1(\rho_y t) - \rho_0 t K_0(\rho_0 t) I_0(\rho_y t)] \\ g_z^\rho &= -\frac{1}{2\pi} [\rho_0 t K_1(\rho_0 t) I_1(\rho_y t) - \rho_y t K_0(\rho_0 t) I_0(\rho_y t)] \\ g_\rho^\rho &= -\frac{1}{2\pi} [2K_1(\rho_0 t) I_1(\rho_y t) + \rho_0 t K_0(\rho_0 t) I_1(\rho_y t) - \rho_y t K_1(\rho_0 t) I_0(\rho_y t)] \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

在 $\rho = \rho_0$, 使上式等于通解得到:

$$\left. \begin{aligned} A1(t)tI_0(t\rho_0) + B1(t)[\rho_0 t I_1(t\rho_0) + 2I_0(t\rho_0)] &= -g_z^z \\ A1(t)tI_1(t\rho_0) + B1(t)\rho_0 t I_0(t\rho_0) &= -g_\rho^z \\ A2(t)tI_0(t\rho_0) + B2(t)[\rho_0 t I_1(t\rho_0) + 2I_0(t\rho_0)] &= -g_z^\rho \\ -A2(t)tI_1(t\rho_0) - B2(t)\rho_0 t I_0(t\rho_0) &= -g_\rho^\rho \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

求解这些方程, 函数 $A1(t)$, $B1(t)$, $A2(t)$ 和 $B2(t)$ 用下式表示,

$$\left. \begin{aligned} A1(t) &= \frac{1}{2\pi C1} [-\rho_0^2 t I_0(\rho_y t)(I_0 K_1 + I_1 K_0) + \rho_y I_1(\rho_y t)[\rho_0 t(I_0 K_0 + I_1 K_1) + 2I_0 K_1]] \\ B1(t) &= \frac{1}{2\pi C1} [-\rho_0 t I_1(\rho_y t)(I_0 K_1 + I_1 K_0) + I_0(\rho_y t)[\rho_0 t(I_0 K_0 + I_1 K_1) - 2I_1 K_0]] \\ A2(t) &= \frac{1}{2\pi C2} [I_1(\rho_y t)[- (4 + \rho_0^2 t^2)(I_0 K_1 - 2\rho_0 t(I_0 K_0 + I_1 K_1) - \rho_0^2 t^2 I_1 K_0) \\ &\quad + \rho_0 t I_0(\rho_y t)[\rho_0 t(I_0 K_0 + I_1 K_1) + 2I_0 K_1]] \\ B2(t) &= \frac{1}{2\pi C3} [I_1(\rho_y t)[\rho_0 t(I_0 K_0 + I_1 K_1) + 2I_0 K_1] - \rho_0 t I_0(\rho_y t)(I_0 K_1 + I_1 K_0) \\ C1 &= \rho_0 t I_0^2 - \rho_0 t I_1^2 - 2I_0 I_1, \quad C2 = -t C1 \text{ 和 } C3 = -C1 \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

式中, $I_0 = I_0(\rho_0 t)$, $I_1 = I_1(\rho_0 t)$, $K_0 = K_0(\rho_0 t)$, 和 $K_1 = K_1(\rho_0 t)$ 。

当常数知道, 补函数项可以用函数 $f(\rho_0, \rho_x, \rho_y, t)$ 表为矩阵形式:

$$V_j^i = \int_0^\infty \begin{bmatrix} f_z^z \cos(zt) & f_z^\rho \sin(zt) \\ f_z^{\tilde{\rho}} \sin(zt) & -f_z^\rho \cos(zt) \end{bmatrix} dt \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} f_z^z &= A1(t) t I_0(t\rho) + B1(t) [\rho I_1(t\rho) + 2I_0(t\rho)] \\ f_z^{\tilde{\rho}} &= A1(t) t I_1(t\rho) + B1(t) \rho I_0(t\rho) \\ f_z^{\tilde{\rho}} &= A2(t) t I_0(t\rho) + B2(t) [\rho I_1(t\rho) + 2I_0(t\rho)] \\ f_z^\rho &= A2(t) t I_1(t\rho) + B2(t) \rho I_0(t\rho) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

式中, 当 $t \rightarrow \infty$, 只要 $\rho_x < \rho_0$ 和 $\rho_y < \rho_0$, f 以指数率 $\exp[-(\rho_x + \rho_y - 2\rho_0)t]/\pi$ 收敛. 当 $t \rightarrow 0$, 除了 zz 项 f_z^z 外, 所有 f 的项都趋于零. 因为 $f_z^z(t \rightarrow 0) \sim \ln[(2\rho_0 - \rho_x - \rho_y)t]/\pi$ 对数奇异. 用收敛函数 $K_0[(2\rho_0 - \rho_x - \rho_y)t]/\pi$ (Happel 和 Brenner^[5]) 去改善 f_z^z 的性为:

$$\int_0^\infty K_0[(2\rho_0 - \rho_x - \rho_y)t] \cos(zt) dt = \frac{\pi}{2[z^2 + (2\rho_0 - \rho_x - \rho_y)^2]^{1/2}}$$

我们用 $f_z^z = f_z^z - K_0[(2\rho_0 - \rho_x - \rho_y)t]/\pi$ 定义函数 f_z^z 将 V_z^z 写成:

$$V_z^z = \int_0^\infty f_z^z \cos(zt) dt + \frac{1}{2[z^2 + (2\rho_0 - \rho_x - \rho_y)^2]^{1/2}} \quad (3.9)$$

(3.7) 式变成可积. 进一步考虑周期点源环引起的流动(图 1(a)). 首先用 nL 去替代 z_y , 对其 n 项求和得到环在 $z_y = nL$ 上的速度场. 例如:

$$V_z^\rho = \int_0^\infty f_z^\rho \sum_{n=-N}^N \sin[(z + nL)t] dt \quad (3.10)$$

为了求解无限个环, 我们使用 $N \rightarrow \infty$ 时的渐近表达式(Lighthill^[10]):

$$H(\infty) = \frac{2\pi}{L} \exp(izt) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2\pi m/L) \quad (3.11)$$

式中, δ 是一维得它函数. 将上式代入(3.10)式中, 并考虑 $f_z^\rho(t=0) = 0$. 函数 $U_z^i + V_z^i$ 的和是组合格林函数:

$$G_z^{Az} = \frac{2\pi}{L} \sum_{m=1}^{\infty} f_z^\rho(t_m) \sin(tmz) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_z^\rho(z + nL) \quad (3.12)$$

式中, $t_m = 2\pi m/L$, 上标 A 表示组合. 上式右边两个求和项分别以指数和代数率收敛. 类似地考虑 $f_z^{\tilde{\rho}}(t=0) = f_z^\rho(t=0) = 0$, 我们得到 $G_z^{A\tilde{\rho}}$ 和 $G_z^{A\rho}$ 与(3.12)式相似的表达式. 当 $t \rightarrow 0$ 时被积函数有界, 最终我们用下式构成周期格林函数:

$$\begin{aligned} G_z^{Az} &= \frac{2\pi}{L} \left[\frac{1}{2} f_z^z(t=0) + \sum_{m=1}^N f_z^z(t_m) \cos(tmz) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[U_z^z(z + nL) + \frac{K_0}{2[(z + nL)^2 + (2\rho_0 - \rho_x - \rho_y)^2]^{1/2}} \right] \right] \quad (3.13) \end{aligned}$$

(3.13) 式右边第一个求和项以指数率收敛. 我们可以证明(3.13)式右边第二个级数以 $(nL)^{-3}$ 收敛, 这样所有的求和项都收敛. 在此论文中, 为了计算格林函数, 用 $(2\rho_0 - \rho_x - \rho_y)t = 25$ 时, 截断(3.13)式中第一无穷求和项 m 的值, 而第二个值 $n = 40$.

(2) 边界积分方程的组成

为了组成在液泡表面的速度边界积分方程, 我们考虑两个域. 第一个是用边界面 S_b 包括液泡的内域(V_p). 考虑流体力学轴对称方程(Ladyzhenskaya^[11]), 导出下面对于 x 点($x \in V_p$)用速度 $u_i^{(1)}$ 作用于表面($f_i(u(y)) = \tau_{ki} n_k$)上流体的应力:

$$C_{ji}u_i^{(1)}(x) = \int_{S_b} u_i^{(1)}(y) T_{jk}^{Ai}(x, y) n_k(y) ds(y) - \frac{1}{k} \int_{S_b} G_j^{Ai}(x, y) f_i^{(1)}(u(y)) ds(y) \quad (3.14)$$

在上式中所有的循环约定在 r 或 z 取值, 而求和约定是对 r 和 z 遍取。矩阵 C_{ji} 是对角, 当 $x \in V_p$ 时对角元素等于 -1 , 当 $x \in S_b$ 时等于 $-1/2$ 。

对于一个由液泡、管壁和恒等的两个截面构成的封闭域, 这两个截面地连续介质中的距离是一个周期长 L (见图 1(b)), 我们进一步给出类似于 (3.14) 式的方程:

$$C_{ji}u_i^{(2)}(x) = - \int_{S_T} u_i^{(2)}(y) T_{jk}^{Ai}(x, y) n_k(y) ds(y) + \int_{S_T} G_j^{Ai}(x, y) f_i^{(2)}(u(y)) ds(y) \quad (3.15)$$

式中面积分沿着封闭域的全表面 (S_T), 法向量从界面指向域。因为格林函数满足沿着管壁无滑移条件, 沿着管壁的积分是零。由于流动和格林函数的周期性, 沿着截面的积分相等且相反, 相互抵消。上式中只剩下沿着液泡表面的积分。将 (3.14) 式乘以 κ , 加上 (3.15) 式的结果并使用速度连续和应力平衡的边界条件得到下式:

$$\begin{aligned} u_j(x) - \frac{2(1-\kappa)}{(1+\kappa)} \int_S u_i(y) T_{jk}^{Ai}(x, y) n_k(y) ds(y) \\ = - \frac{2}{(1+\kappa)} \int_S G_j^{Ai}(x, y) F_i(u(y)) ds(y) \end{aligned} \quad (3.16)$$

注意到当 $\kappa=1$, 仅有 F_i 积分项。当液泡表面用弧长 s 、参数 $\rho(s)$ 和 $z(s)$ ($s \in [0, S_l]$) 表示, 方程 (3.16) 表示为:

$$\begin{bmatrix} u_\rho \\ u_z \end{bmatrix} = - \frac{2}{(1+\kappa)} \int_0^{S_l} \begin{bmatrix} F_\rho G_\rho^\rho + F_z G_\rho^z \\ F_\rho G_z^\rho + F_z G_z^z \end{bmatrix} \rho_y ds_y \quad (3.17)$$

(3) 数值解步骤

对于液泡 ($a' < b'$) 使用圆球形状开始计算。 N 个结点选在界面周线上, 在结点之间有 $N-1$ 个弧长每个都是相等的。用 N 个点的座标使用三次样条插值来构成用弧长表示的形状。从这个拟合, 法向和切向量的数值以及曲率可求得。这样用 (2.8) 式计算 F_i 力在结点上的值。对于每个弧长, 我们定义一个新的局部座标变量 ξ , $\xi = (\xi_s - \xi_{s-1}) / (\xi_{s+1} - \xi_s)$, $0 \leq \xi \leq 1$ 和 $i=1$ 到 $N-1$, 假设 F_i 力沿着每个段是线性变化:

$$\begin{aligned} F_\rho(\xi) &= F_\rho^{\dot{\rho}} \Psi_1(\xi) + F_\rho^{j^+} \Psi_2(\xi) \\ F_z(\xi) &= F_z^j \Psi_1(\xi) + F_z^{j^+} \Psi_2(\xi) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_\rho \\ u_z \end{bmatrix} \approx - \frac{2}{(1+\kappa)} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \int_{\Delta s} \begin{bmatrix} G_\rho^\rho & G_\rho^z \\ G_z^\rho & G_z^z \end{bmatrix} \Psi_1(y) \rho_y ds_y \right\} \cdot \begin{bmatrix} F_\rho^j \\ F_z^j \end{bmatrix} \\ + \left\{ \int_{\Delta s} \begin{bmatrix} G_\rho^\rho & G_\rho^z \\ G_z^\rho & G_z^z \end{bmatrix} \Psi_2(y) \rho_y ds_y \right\} \cdot \begin{bmatrix} F_\rho^{j^+} \\ F_z^{j^+} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

速度的边界积分被分成 $N-1$ 弧长积分, 用高斯叠代求其数值解。得到表面速度后, 用动力条件确定下一时间步长 Δt 的表面位置,

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = u_\rho(\rho_s, z_s) \quad \frac{\partial z_s}{\partial t} = u_z(\rho_s, z_s) \quad (3.20)$$

我们用二次龙格-库塔法计算在时间步长 $t + \Delta t$ 时的 $\rho_s(t + \Delta t)$ 和 $z_s(t + \Delta t)$ 。变形后结点的弧长用弦长 $(\rho_{i+1} - \rho_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2$ 近似计算。若干步以后, 后部结点间距变成很少, 弧长被从新分成相等的段。

一旦新表面形状结点的座标被确定, 使用三次样条插值来计算弧长参数。用 (3.19) 式计

算表面速度,再用(3.20)式确定新的时间步长的形状,不断重复这个步骤.为了确定液泡不再变形达到稳态,计算每一步长 $(u_s \cdot n)/n_z$ 的值.稳态时这个沿着界面是常数的量等于无量纲度 \dot{U}/\dot{U}_0 .当每结点之间 $(u_s \cdot n)/n_z$ 的值仅有百分之二的误差时,停止计算.时间步长 Δt 和步数决定了数值解的精确度,时间步长取决于 a'/b' 的值和毛细准数,我们得到一些一般规律:越大的毛细准数,表面变形越大,尽管需要步长数多去达到稳态,还可以使用大的时间步长.同样的,随着 a'/b' 增加,使用的时间步长可增大.并需要更多的步长数去达到稳态.对于所有的计算结果,在计算中液泡体积的变化小于0.5%,其是衡量计算精度的一个指标.所有计算是在2100、3100和5000DEC和SUN-2 Sparc工作站进行.

§ 4. 结 果

由于考虑到机时,仅计算 $\kappa=1$ 的情况.首先讨论一个液泡($a'/b' < 1$).我们发现当液泡间距 L'/a' 等于或大于6,液泡不变形.对于在 $L'/a' = 6$, $Ca = 0.5, 1.5$ 和 $a'/b' = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$, 稳定速度 \dot{U}/\dot{U}_0 作为 a'/b' 的函数画在图2.结点数是48,时间步长是0.01.其中实线是使用配置点法得到,适用于球泡,详见陈等人文章^[12].注意到对于 $Ca = 0.5$ 和 $a'/b' = 0.5, 0.6, 0.7$,变形后的速度等于未变形球泡的速度.原因来自两个方面:第一,毛细准数小,表面张力占主导去保持球形.第二, a'/b' 的值小到使壁面和液泡间的流体界面相互作用太小,不足以使液泡变形.对于 $Ca = 0.5$,仅当 a'/b' 增大到0.8,液泡和壁面的相互界面作用才大到足以使液泡变形.图3(a)给出从球状到变形后稳态序列的形状.对于 $Ca = 0.5$ 和 $a'/b' = 0.8$,可以看到明显变长的变形.这种情况下,其速度大于球状的速度.当 $Ca = 1.5$,对于 a'/b' 的所有值表面张力不占主导,速度都大于对应球状的速度,变形随着 a'/b' 的增加而增加.图3(b)给出 $Ca = 1.5$ 和 $a'/b' = 0.8$ 从初时球状到极明显的变形序列.当 L'/a' 从6减到2.5,我们进一步考察液泡之间流体界面的影响.图4(a)(b)给出 $a'/b' = 0.8$ 和 $Ca = 0.5, 1.5$ 相互作用液泡稳定形状.正如所期望的毛细准数大的变形也大,因为随着 Ca 的增大表面张力相对粘性力减少.我们发现了更有趣的速度结果:当固定 Ca ,对于 a'/b' 大的速度随着 L'/a' 增加不明显.当 $Ca = 0.5$,对于 $L'/a' = 2.5$ 是0.034,相相对于 $L'/a' = 6$ 是0.032.类似地,当 $Ca = 1.5$,对于 $L'/a' = 2.5$ 速度是0.068,而对于不变形的情况是0.061.从这些有选择和代表性的结果表明,间距 L'/a' 对提高速度的影响大于毛细准数.

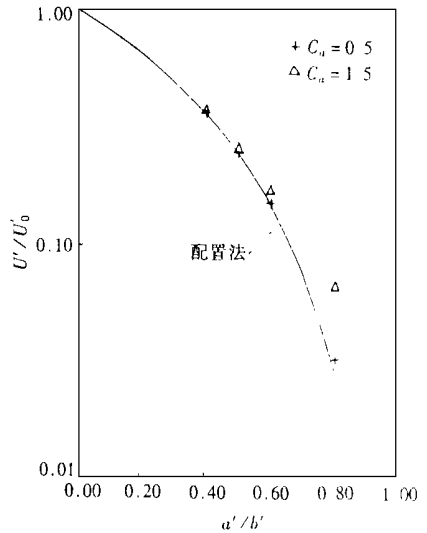
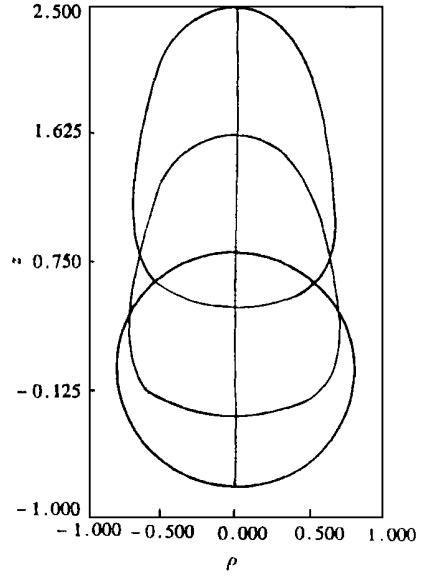
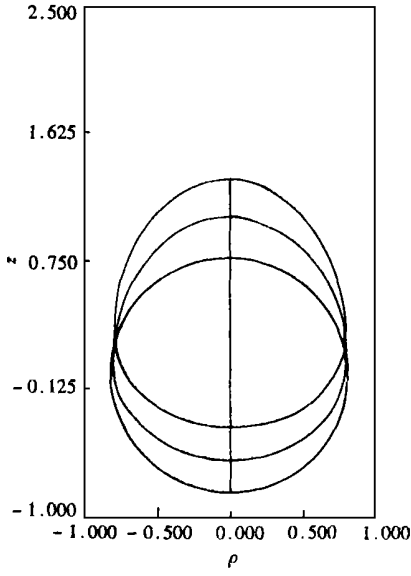


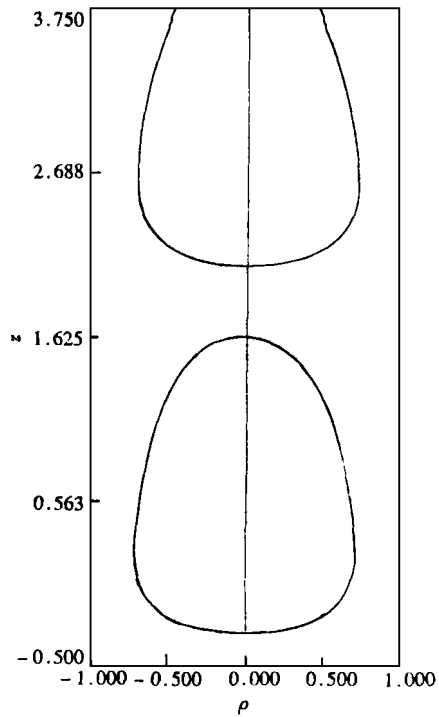
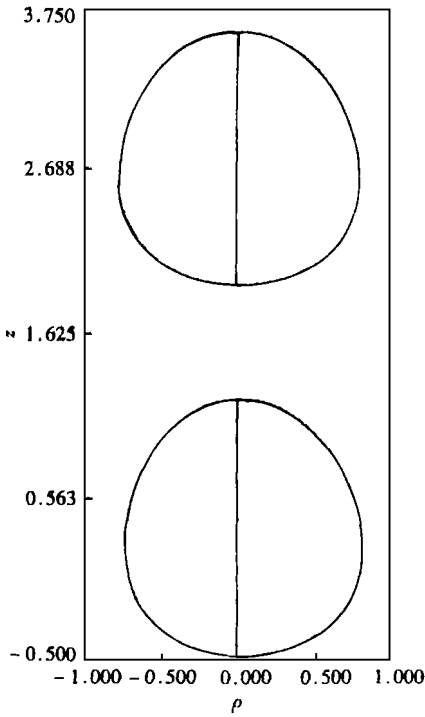
图2 无量纲稳态速度



(a) $Ca = 0.5, t = 0, 5.5, 12.27$

(b) $Ca = 1.5, t = 0, 12.275, 24.875$

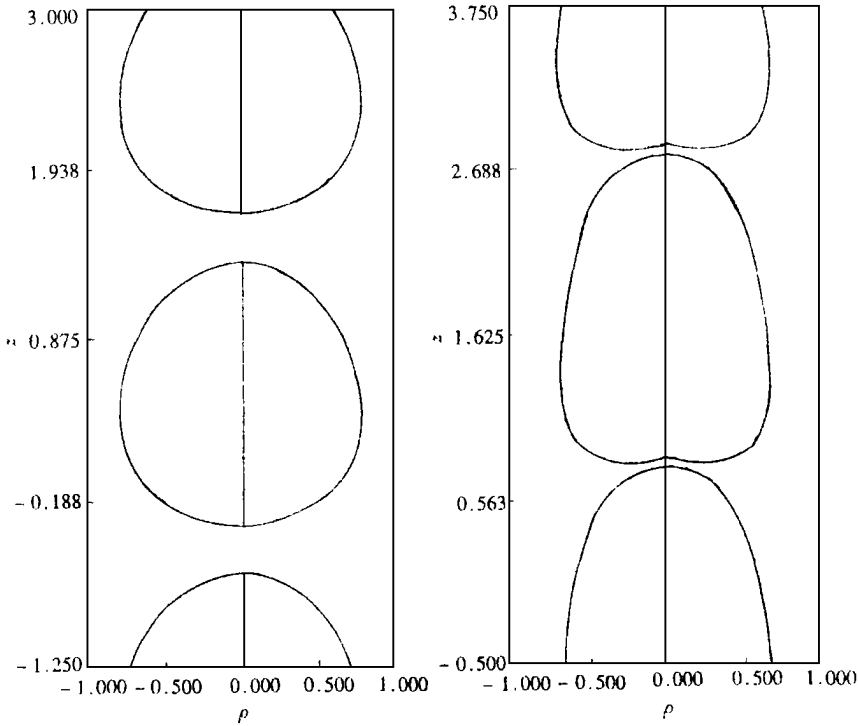
图3 $\dot{a}/\dot{b} = 0.8, L'/\dot{a} = 6$



(a) $Ca = 0.5, t = 11.4$

(b) $Ca = 1.5, t = 23$

图4 $\dot{a}/\dot{b} = 0.8, L'/\dot{a} = 3.0$

(a) $Ca = 0.5, t = 13.4$ (b) $Ca = 1.5, t = 29$ 图5 $a'/b' = 0.8, L'/a' = 2.5$

参考文献

- 1 H. Wang and R. Skalak, Viscous flow in a cylindrical tube containing a line of spherical particles, *J. Fluid Mech.*, **38** (1986), 75.
- 2 W. A. Hyman and R. Skalak, Non-Newtonian behavior of a suspension of liquid drops in tube flow, *AIChE J.*, **18**(1) (1972), 149—160.
- 3 W. A. Hyman and R. Skalak, Viscous flow of a suspension of liquid drops in a cylindrical tube, *Appl. Sci. Res.*, **26** (1972), 27—52.
- 4 C. Pozrikidis, The buoyancy-driven motion of a train of viscous drops within a cylindrical tube, *J. Fluid Mech.*, **237** (1992), 627—648.
- 5 H. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics*, Noordhoff International Pub., Leyden (1973).
- 6 G. K. Youngren and A. Acrivos, Stokes flow past a particle of arbitrary shape: a numerical method of solution, *J. Fluid Mech.*, **69** (1975), 377—403.
- 7 C. Pozrikidis, *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flow*, Cambridge University Press (1992).
- 8 H. Tozeren, Boundary integral equation method for some Stokes flow problem, *Intl. J. Numer. Mech. Fluids*, **4** (1984), 159—170.
- 9 M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover (1972).
- 10 M. J. Lighthill, *An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press (1958).

- 11 O. A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon & Breach (1963).
- 12 Chen Jinnan, Z. Dagan and C. Maldarelli, The axisymmetric thermocapillary motion of a particle in a tube, *J. Fluid Mech.*, **233** (1991), 405—437.

Flow of a Train of Deformable Fluid Particles in a Tube

Chen Jinnan

(School of Chemical Engineering & Material Science, Beijing Institute of Technology,
Beijing 100081, P. R. China)

Charles Maldarelli

(Department of Chemical Engineering, City College of New York, NY 10031, USA)

Abstract

In the article, the boundary integral technique is used to solve the hydrodynamic movement of a train of deformable fluid particles in a tube. When a fluid particle is in a tube, the total normal stress difference is not constant any more, this force tends to distend and elongate the particle. We find that the difference between the velocity of a deformable fluid particle and a sphere (with the same radius) increases as the distance between the particles decreases, and that the increase in velocity with L'/a' is greater the capillary number, and this increase becomes less pronounced as radius decreases.

Key words two phase flow, deformable, periodic fluid particle