应用数学和力学, 第 19 卷 第 6 期(1998 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

旋转壳的一般轴对称问题及积分方程分析*

陈山林① 刘 东②

(1996 年 12 月 3 日收到, 1997 年 9 月 22 日收到修改稿)

摘 要

本文得到了旋转弹性薄壳在一般荷载下轴对称问题的一种简化形式的复变量方程, 该方程准确度在薄壳理论误差范围, 并消除了经线极值奇点; 给出了问题的 Volterra 积分方程表述及其数值解•

关键词 旋转壳 轴对称 积分方程
中图分类号 O342

§ 1. 前 言

在任意轴对称荷载下弹性旋转薄壳的 Meisser_Reissner 型方程为[1~3]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{r_2}{r_1}\ddot{\chi}+\left[\frac{r_2}{r_1}\mathrm{ctg}\,\varphi+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\bullet}\right]\dot{\chi}-\left(\frac{r_1}{r_2}\mathrm{ctg}^2\varphi+\nu\right)\chi=\frac{r_1}{K}(r_2Q_\varphi)\\ &\frac{r_2}{r_1}(r_2Q_\varphi)^{\bullet\bullet}+\left[\frac{r_2}{r_1}\mathrm{ctg}\,\varphi+\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\bullet}\right](r_2Q_\varphi)^{\bullet}-\left(\frac{r_1}{r_2}\mathrm{ctg}^2\varphi-\nu\right)(r_2Q_\varphi)\\ &\quad=-D(1-\nu^2)r_1\chi+\left[\frac{r_2^2-r_1^2}{r_1r_2}\mathrm{ctg}\,\varphi-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\bullet}\right]\frac{P}{\sin^2\varphi}\\ &\qquad+(r_2^2p_r)^{\bullet}+(r_2^2+\nu r_1r_2)p_\varphi \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

式中, $K=Eh^3/12(1-\nu^2)$, $D=Eh/(1-\nu^2)$, E, ν为弹性常数, h 为壳厚度, 常数, χ 为经线切线转角, Q_φ 为剪力, r_1, r_2 为主曲率半径, p_r, p_φ 为表面分布荷载法向和切向分量, 而

$$P=P_0+\int_{\varphi_0}^{\varphi}(p_r\cos\varphi-p_\varphi\sin\varphi)rr_1d\varphi \tag{1.2}$$

φ为余纬度, r 为向径, 脚标带“0”的量表示该量取边界 $\varphi=\varphi_0$ 值• (1.1)式中, 上角•$=d/d\varphi$•本文未加说明的符号同文献[1]•

方程(1.1)在 r_1 为常数或无限大时, 可以简化为一对共轭的二阶方程, 从而复变量化[1~3]•近年来, 文献[4, 5]对 $r_1\neq$常数的椭圆环壳成功地进行了基本方程的复变量简化工作, 这是经

---

* 国家自然科学基金资助项目(1860368)
① 重庆建筑大学建筑安装工程系, 重庆 400045
② 重庆建筑大学研究生部, 重庆 400045

典壳体理论的一个进展• 但是,对任意经线形状的一般旋转壳体,基本方程(1.1)的复变量简化问题,尚有待研究• 本文将表明,只需与文献[4,5]类似地,推广钱伟长教授在文献[6]中提出的统一复变量化方法,并且采用文献[7]推广的 À³À, º½À³ 变换,就可以将一般旋转壳体的基本方程(1.1)进行复变量化;所得方程形式简便,与原方程(1.1)准确度在薄壳理论误差范围内,同时消除了经线极值点的奇异性• 这就为一般旋转壳体的轴对称问题提供了分析或数值计算的适当的基础•

本文同时给出了问题的积分方程表述,从而使旋转壳一般轴对称问题的分析和计算更为简便•

§2. 方程的简化

记算子

$$L(\ ) = \frac{r_2}{r_1}(\ )^{\cdot\cdot} + \left[\frac{r_2}{r_1}\mathrm{ctg}\,\varphi + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\cdot}\right](\ )^{\cdot} - \frac{r_1}{r_2}\mathrm{ctg}^2\varphi\,(\ ) \tag{2.1}$$

和

$$f(\varphi) = \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1 r_2}\mathrm{ctg}\,\varphi - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\cdot}\right]\frac{P}{\sin^2\varphi} + (r_2^2 p_r)^{\cdot} + (r_2^2 + \nu r_1 r_2)p_\varphi \tag{2.2}$$

(1.1)简记为

$$\left.\begin{aligned} &L(\chi) - \nu\chi = \frac{r_1}{K}(r_2 Q_\varphi) \\ &L(r_2 Q_\varphi) + \nu r_2 Q_\varphi + D(1-\nu^2)r_1\chi = f(\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

沿用文[6]的统一复变量化方法,设有复函数

$$S = A r_2 Q_\varphi + B\chi \tag{2.4}$$

A, B 为待定复常数• 由(2.3)~(2.4)可得

$$\begin{aligned} L(S) = {} & A L(r_2 Q_\varphi) + B L(\chi) = (-A\nu + B r_1/K) r_2 Q_\varphi \\ & + [-AD(1-\nu^2)r_1 + B\nu]\chi + A f(\varphi) \end{aligned} \tag{2.5}$$

取

$$\left.\begin{aligned} &-A\nu + B r_1/K = -2Ai\mu(\varphi) \\ &-AD(1-\nu^2)r_1 + B\nu = -2Bi\mu(\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

式中,$\mu(\varphi)$为某一待定函数• 而由(2.6)的非零解条件给出

$$\mu^2 = 3(1-\nu^2)\frac{r_1^2}{h^2}\left[1 - \frac{\nu^2 h^2}{12(1-\nu^2)r_1^2}\right] \tag{2.7}$$

对于薄壳,应有$|h/r_1| << 1$;因此,上式中小量 $O(h^2/r_1^2)$可以略去,我们得到

$$\mu(\varphi) \approx \sqrt{3(1-\nu^2)}\,r_1/h \tag{2.8}$$

代入(2.6)可得

$$B = \frac{AK}{r_1}\left(\nu - i\sqrt{12(1-\nu^2)}\,\frac{r_1}{h}\right) \tag{2.9}$$

同样,略去小量 $O(\nu h/r_1)$有

$$B \approx -\sqrt{12(1-\nu^2)}\,KAi/h \tag{2.10}$$

B 已简化为常数• 代入(2.4)可得

$$S = A\left(r_2 Q_\varphi - i\frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\chi\right) \tag{2.11}$$

常数 A 可以任意选择, 建议取

$$A = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2} i \tag{2.12}$$

如此选取的好处是, S 可以无量纲化• 于是

$$S = \chi + \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2} i r_2 Q_\varphi \tag{2.13}$$

这样, 由(2.4)~(2.6)、(2.12), 我们得到

$$L(S) + 2\mu(\varphi) iS = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2} i f(\varphi) \tag{2.14}$$

上述复变量化方法是钱伟长教授在文[6]中对圆环壳问题提出的, 文献[4, 5]进一步应用于椭圆环壳问题• 本文在这里推广应用于一般轴对称旋转壳情形• 方程(2.14)中, 荷载项 $f(\varphi)$ 在经线的极值点($\varphi = 0, \pi$, $r_2 \to \infty$)通常具有奇异性, 它给方程特解的寻求带来困难• 引入文献[7]的推广的 À³À, º½À³ 变换

$$V = S - \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2} i\,\mathrm{ctg}\,\varphi P \tag{2.15}$$

将上式代入(2.14), 计算后得到

$$L(V) + 2\mu(\varphi) iV - \nu V = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2} i\left\{-\left(\frac{r_1}{r_2} + 2\mu i\right)\mathrm{ctg}\,\varphi P + \left(r_2^2\sin^3\varphi\, p_r + r_2^2\sin^2\varphi\cos\varphi\, p_\varphi\right)^{\cdot}/\sin\varphi + \nu r_1 r_2 p_\varphi\right\} \tag{2.16}$$

利用关系 $r = r_2\sin\varphi$, 将上式中 r_2 用 r 表示, 可得

$$\left(\frac{r}{r_1}V^{\cdot}\right)^{\cdot} + \left(-\frac{r_1}{r}\cos^2\varphi + 2\mu i\sin\varphi\right)V + r$$
$$= i\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}\left\{-\left(\frac{r_1}{r}\sin\varphi + 2\mu i\right)\cos\varphi P + \left[r^2(p_r\sin\varphi + p_\varphi\cos\varphi)\right]^{\cdot} + \nu r_1 r p_\varphi\right\} \tag{2.17}$$

方程(2.17)中 P 的系数项

$$\frac{r_1}{r}\sin\varphi + 2\mu i = \sqrt{12(1-\nu^2)}\, i\frac{r_1}{h}\left(1 - \frac{i}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}\frac{h}{r_2}\right) \quad 到 \tag{2.18}$$

对于薄壳, 应有 $|h/r_2| << 1$, 因此, 上式中小量 $O(h/r_2)$ 可以略去• 于是

$$\frac{r_1}{r}\sin\varphi + 2\mu i \approx 2\mu i \tag{2.19}$$

最后, 由(2.17)和(2.19), 我们得到

B 为常

$$\left(\frac{r}{r_1}V^{\cdot}\right)^{\cdot} + \left(-\frac{r_1}{r}\cos^2\varphi + 2\mu i\sin\varphi\right)V$$
$$= \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2} i\left\{-2\mu i\cos\varphi P + \left[r^2(p_r\sin\varphi + p_\varphi\cos\varphi)\right]^{\cdot} + \nu r_1 r p_\varphi\right\} \tag{2.20}$$

方程(2.20)右端, 关于经线极值点 $\varphi = 0, \pi$ 的奇异性已全部消除; 该方程具有自共轭形式, 形式是简洁的• 由上述简化过程可知, 方程(2.20)与原方程(1.1)的准确度在薄壳理论误差范围

之内•

§3. 内力和位移

由(2.13)、(2.15)可以得到

$$V=\chi+\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}i(r_2Q_\varphi-\operatorname{ctg}\varphi P) \tag{3.1}$$

P 已由(1.2)定义• 于是

$$\left.\begin{aligned}&\chi=\operatorname{Re}V\\ &\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}rQ_\varphi=\sin\varphi\operatorname{Im}V+\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}P\cos\varphi\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

，由弹性定律给出[1]

$$M_\varphi=K\left(\frac{\chi'}{r_1}+\nu\frac{\chi}{r}\cos\varphi\right)$$

$$M_\theta=K\left(\nu\frac{\chi'}{r_1}+\frac{\chi}{r}\cos\varphi\right)$$

于是

$$\left.\begin{aligned}&\frac{r_1}{K}M_\varphi=\operatorname{Re}V'+\frac{r_1\operatorname{Re}V}{r}\nu\cos\varphi\\ &\frac{r_1}{K}M_\theta=\nu\operatorname{Re}V'+\frac{r_1\operatorname{Re}V}{r}\cos\varphi\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

由文献[1]可知,

$$N_\varphi=-Q_\varphi\operatorname{ctg}\varphi+\frac{P}{r\sin\varphi}$$

$$N_\theta=-\frac{(r_2Q_\varphi)^{\cdot}}{r_1}-\frac{P}{r_1\sin^2\varphi}+\frac{rp_r}{\sin\varphi}$$

将(3.2)代入上式, 计算得到

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}rN_\varphi=-\cos\varphi\operatorname{Im}V+\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}P\sin\varphi\\ &\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}r_1N_\theta=-\operatorname{Im}V'+rr_1(p_r\sin\varphi+p_\varphi\cos\varphi)\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

引入水平位移 Y 和直位移 Z, 作与文献[7]相似的推导, 可以导得

$$\left.\begin{aligned}&Y=\frac{r}{Eh}(N_\theta-\nu N_\varphi)\\ &Z=Z_0+\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left[\frac{r_1}{Eh}\sin\varphi(N_\varphi-\nu N_\theta)-r_1\cos\varphi\operatorname{Re}V\right]d\varphi\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

如果 V 已求得, 则可由(3.2)~(3.5)诸式算得全部内力和位移•

§4. Volterra 积分方程表述

为了便于分析和数值计算, 我们来导出(2.20)式的初参数积分方程• 定义无量纲量

$$P^*=|A|P,\quad (p_r^*,p_\varphi^*)=|A|r_1r(p_r,p_\varphi)$$

$$
\left.\begin{aligned}
&(N^*_\varphi,\ N^*_\theta,\ Q^*_\varphi) = |A|\, r_1 (N_\varphi,\ N_\theta,\ Q_\varphi)\\
&(M^*_\varphi,\ M^*_\theta) = \frac{r_1}{K}(M_\varphi,\ M_\theta)\\
&Z^* = \frac{Z}{r_1}\\
&Y^* = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h}\frac{r_{10}}{r_0}Y
\end{aligned}\right\}\tag{4.1}
$$

其中 r_1, r 是旋转壳的特征尺寸. 由(3.2)~(3.5)和(4.1)诸式可算得

$$
\left.\begin{aligned}
&Q^*_\varphi = \frac{r_1}{r}\sin\varphi \operatorname{Im} V + \frac{r_1}{r}P^*\cos\varphi\\
&M^*_\varphi = \frac{r_1}{r_1}\operatorname{Re}\dot V + \nu\frac{r_1}{r}\cos\varphi \operatorname{Re} V\\
&M^*_\theta = \nu\frac{r_1}{r_1}\operatorname{Re}\dot V + \frac{r_1}{r}\cos\varphi \operatorname{Re} V\\
&N^*_\varphi = -\frac{r_1}{r}\cos\varphi \operatorname{Im} V + \frac{r_1}{r}P^*\sin\varphi\\
&N^*_\theta = -\frac{r_1}{r_1}\operatorname{Im}\dot V + \frac{r}{r}(p^*_r\sin\varphi + p^*_\varphi\cos\varphi)
\end{aligned}\right\}\tag{4.2}
$$

以及位移

$$
\left.\begin{aligned}
&Y^* = \frac{r_{10}}{r_0}\left[-\frac{r}{r_1}\operatorname{Im}\dot V + \frac{r^2}{r_1 r}(p^*_r\sin\varphi + p^*_\varphi\cos\varphi) + \nu\cos\varphi \operatorname{Im} V - \nu P^*\sin\varphi\right]\\
&Z^* = Z^*_0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi}\left[\frac{r}{r_1}\frac{h}{r_1\sqrt{12(1-\nu^2)}}\sin\varphi(N^*_\varphi - \nu N^*_\theta) - \frac{r_1}{r_1}\cos\varphi \operatorname{Re} V\right]d\varphi\\
&\chi = \operatorname{Re} V
\end{aligned}\right\}\tag{4.3}
$$

定义内力的无量纲水平合力

$$
H^*_\varphi = \frac{r}{r_1}(N^*_\varphi\cos\varphi - Q^*_\varphi\sin\varphi)\tag{4.4}
$$

由(4.2)~(4.4)可将未知函数在 $\varphi=\varphi_0$ 处的值 $V_0, \dot V_0$ 表示为

$$
\left.\begin{aligned}
&V_0 = \chi_0 - iH^*_0\\
&\dot V_0 = U_0 + i\left[-\frac{\nu r_{10}\sin\varphi_0}{r_0}P^*_0 + \frac{r_0 r_{10}}{r_1 r}(p^*_{r_0}\sin\varphi_0 + p^*_{\varphi_0}\cos\varphi_0)\right]
\end{aligned}\right\}\tag{4.5}
$$

其中

$$
U_0 = \frac{r_{10}}{r_1}M^*_{\varphi_0} - \nu\frac{r_{10}}{r_0}\cos\varphi_0\,\chi_0 - i\left(Y^*_0 + \nu\frac{r_{10}}{r_0}\cos\varphi_0 H^*_0\right)\tag{4.6}
$$

称内力、位移和荷载的初值 $M^*_{\varphi_0}, H^*_{\varphi_0}, \chi^*_0, Y^*_0, P^*_0$ 为初参数.

由(2.20)和(4.5), 轴对称旋转壳初值问题的一般提法为:

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{r}{r_1}\dot V\right)^{\cdot} + \left(-\frac{r_1}{r}\cos^2\varphi + 2\mu i\sin\varphi\right)V = 2\mu\cos\varphi P^*\\
&\qquad + i\left\{\left[\frac{r^2}{r_1 r}(p^*_r\sin\varphi + p^*_\varphi\cos\varphi)\right]^{\cdot} + \nu\frac{r_1 r}{r_1 r}p^*_\varphi\right\}\qquad (\varphi_0<\varphi<\varphi_1)\\
&V|_{\varphi=\varphi_0} = V_0,\qquad \dot V|_{\varphi=\varphi_0} = \dot V_0
\end{aligned}\right\}\tag{4.7}
$$

直接对自共轭方程(4.7)积分, 容易将其积分方程化. 不同的积分过程可能得到不同形式

的积分方程, 下面给出较简便的一种

$$V = A_1(\varphi)V_0 + A_2(\varphi)U_0 + A_3(\varphi)P_0^* + A_4(\varphi) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} K(\varphi, t)V(t)dt \tag{4.8}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
&A_1(\varphi) = \frac{r_1 r_0}{r r_{10}},\quad A_2(\varphi) = \frac{r_1 r_0}{r r_{10}}(\varphi - \varphi_0)\\
&A_3(\varphi) = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h}\frac{r_1}{r}[k_1(\varphi) - r_0(\varphi - \varphi_0)] - \nu i\frac{r_1}{r}(\varphi - \varphi_0)\sin\varphi_0\\
&A_4(\varphi) = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h}\frac{r_1}{r}\int_{\varphi_0}^{\varphi}[r(t)(t-\varphi) + k_1(\varphi) - k_1(t)][p_r^*\cos t\\
&\qquad - p_\varphi^*\sin t]\frac{r r_1}{r_1 r}dt + i\frac{r_1}{r}\int_{\varphi_0}^{\varphi}(p_r^*\sin\varphi + p_\varphi^*\cos\varphi)\frac{r^2}{r_1 r}d\varphi\\
&\qquad + \nu i\frac{r_1}{r}\int_{\varphi_0}^{\varphi}(\varphi - t)p_\varphi^*\frac{r r_1}{r_1 r}dt\\
&K(\varphi, t) = \frac{r_1(\varphi)}{r(\varphi)}\left[\left(\frac{r(t)}{r_1(t)}\right)^{\cdot} - (\varphi - t)\left(\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h}r_1(t)\, i\sin t - \frac{r_1(t)}{r(t)}\cos^2 t\right.\right.\\
&k_1(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} r(\varphi)d\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

方程(4.8)是第二类 Volterra 积分方程• 通过微分可以验证(4.8)与(4.7)是等价的•

对(4.8)微分一次, 可得

$$\dot{V} = A_1(\varphi)U_0 + A_5(\varphi)P_0^* + A_6(\varphi) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} K_1(\varphi, t)V(t)dt \tag{4.10}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
&A_5(\varphi) = \frac{r_1}{r}\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h}(r - r_0) - i\frac{r_1}{r}\nu\sin\varphi_0\\
&A_6(\varphi) = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h}\frac{r_1}{r}\int_{\varphi_0}^{\varphi}[r(\varphi) - r(t)][p_r^*\cos t - p_\varphi^*\sin t]\frac{r r_1}{r r_1}dt\\
&\qquad + i\frac{r r_1}{r r_1}(p_r^*\sin\varphi + p_\varphi^*\cos\varphi) + i\nu\frac{r_1}{r}\int_{\varphi_0}^{\varphi}p_\varphi^*\frac{r r_1}{r r_1}d\varphi\\
&K_1(\varphi, t) = \frac{r_1(\varphi)}{r(\varphi)}\left[\frac{r_1(t)}{r(t)}\cos^2 t - i\sqrt{12(1-\nu^2)}\frac{r_1(t)}{h}\sin t\right.
\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

§5. 边界条件和数值解

在(4.8)中含有5个初参数, 它们的值需要确定• 一般来讲, 旋转壳的每条边界给出两个边界条件• 如对 $\varphi = \varphi_0$ 边界有

$$\left.\begin{aligned}
&H^*(\varphi_0) = H_0^* \qquad \text{或} \qquad Y_0^* = Y_0^*\\
&M^*(\varphi_0) = M_0^* \qquad \text{或} \qquad \chi(\varphi_0) = \chi_0
\end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

或其它混合形式• 式中右端各量为已知边界值• 若旋转壳由 $\varphi = \varphi_0, \varphi_1$ 两条边界界定, 则有4个边界条件• 当 P_0^* 待定时, 可由(4.3)中第二式给出补充方程

$$Z_1^* - Z_0^* = \Delta Z^* \tag{5.2}$$

式中, ΔZ^* 是给定的边界相对垂直位移值• 因此, 共有 5 个条件, 可以确定 5 个初参数• 其中的 2 个或 3 个(当 P_0^* 给定时) 可以预先确定, 这是初参数方法的优点之一•

下面我们来求(4. 8) 的数值解• 设已求得下述方程的解

$$V_i(\varphi) = A_i(\varphi) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} K(\varphi, t) V_i(t)\, dt \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{5.3}$$

则(4. 8) 的解可表示为

$$V(\varphi) = V_0 V_1(\varphi) + U_0 V_2(\varphi) + P_0^* V_3(\varphi) + V_4(\varphi) \tag{5.4}$$

实际上, V_4 是方程(4. 8) 或(2. 20) 的特解, V_1, V_2 是基本解, 而 V_3 可视作特解(P_0^* 已知) 或基本解(P_0^* 待定) • 因此, 采用初参数积分方程, 我们可将旋转壳轴对称问题的解的一般结构用(5. 3) 和(5. 4) 表示• 这对于计算程序的编制或理论研究是有益的• 也是初参数积分方程表述的又一优点•

设将区间[φ_0, φ_1] 分为 N 等份, 在每一分段内近似视 V_i 为常量, 则对第 j 个节点有

$$V_i(\varphi_j) = A_i(\varphi_j) + \sum_{l=1}^{j} V_i(\varphi_j) \int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} K(\varphi_j, t)\, dt \tag{5.5}$$

由(5. 5) 解得

$$V_i(\varphi_j) = \frac{A_i(\varphi_j) + \sum\limits_{l=1}^{j-1} V_i(\varphi_l) J_{jl}}{1 - J_{jj}} \qquad \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4 \\ j = 1, 2, \cdots, N \end{cases} \tag{5.6}$$

式中

$$J_{jl} = \int_{\varphi_{l-1}}^{\varphi_l} K(\varphi_j, t)\, dt \tag{5.7}$$

由(5. 6) 即可递推求得各 $V_i(\varphi_j)$ 的值• $V(\varphi_j)$ 的值由(5. 4) 给出• 在引入边界条件和补充条件确定各初参数及计算无量纲内力时, 还要用到 V'在各节点的值, $V'(\varphi_j)$ 可由(4. 10) 求得•

定义无量纲应力为

$$(\sigma_\varphi^*, \sigma_\theta^*) = \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh} r_1(\sigma_\varphi, \sigma_\theta) \tag{5.8}$$

算例 1 承受均匀正压力的球壳, 半径 143cm• 本算例取自文献[2], 各参数值为

$$h = 6,\quad \nu = 0.2,\quad \varphi_0 = 0°,\quad \varphi_1 = 39°$$

$$p_r^* = -476.66,\quad p_\varphi^* = 0$$

取

$$r = r_1 = 143,\ |A| = 0.042$$

计算时取 $\varphi_0 = (10^{-3})°$, 壳顶处的各内力值由邻近各点的相应内力值外推而得• 已知初参数 $X_0^* = 0$, $P_0^* = 0$, $Y_0^* = 0$• φ_1 边界给出 $M_1^* = 0, H_1^* = 0$• 图 1 给出了球壳外表面无量纲应力的计算结果, 与文献[2] 的准确解比较表明二者是一致的•

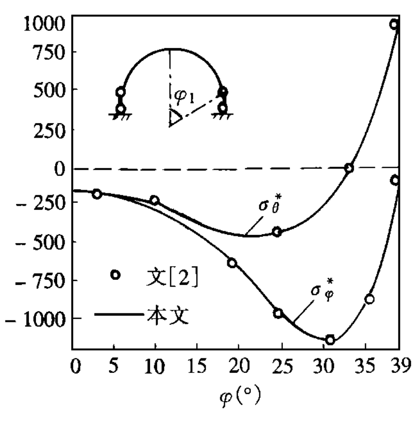

图 1 球壳外表面应力

算例 2 环管形热膨胀节, 如图 2 示• 本算例取自文献[8] • 各参数值为

$$a/R = 0.2544,\quad a/h = 32.72,\quad \nu = 0.3$$

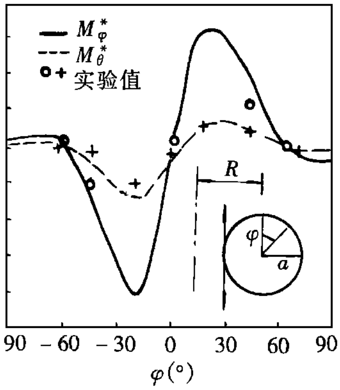

图 2 膨胀节的弯矩 M_φ^*, M_θ^*

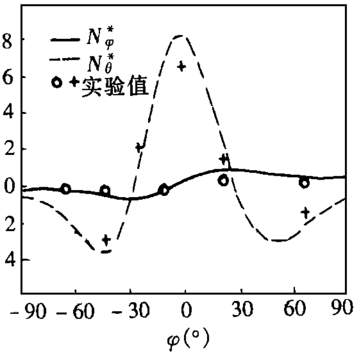

图 3 膨胀节的薄膜力 N_φ^*, N_θ^*

由于对称性, 取 $\varphi_0 = -90°$, $\varphi_1 = 90°$• 假定边界 φ_0 处由于管道约束而不能转动, 边界 φ_1 处满足对称条件, 则有 $\chi_0^* = 0, H_0^* = 0$ 及 $\chi_1^* = 0, H_1^* = 0$• 计算时取

$$P_0^* = 1,\ p_r^* = 0,\ p_\varphi^* = 0,\ r = R,\ r_1 = a,\ R = 1$$

在图 2 和图 3 中分别绘出了弯矩 M_φ^*, M_θ^* 和薄膜力 N_φ^*, N_θ^* 的变化曲线, 与 Dall[8] 的实验值比较表明二者符合良好• 文献[4] 曾用 Fredholm 积分方程数值解计算过同一问题, 本文结果与文献[4] 结果一致, 图中未绘出其结果•

算例 3 开孔悬链线壳[9]• 各参数值为

$$h = 0.01,\ \nu = 0.3,\ r_0 = 0.3,\ \varphi_0 = 3.8°,\ \varphi_1 = 64.84°$$

已知初参数 $M_0^* = 0, H_0^* = 0, P_0^* = 0$, φ_1 边界给出 $M_1^* = 0, Y_1^* = 0$• 计算时取

$$p_r^* = -150,\ p_\varphi^* = 0,\ r = r_0,\ r_1 = r_0$$

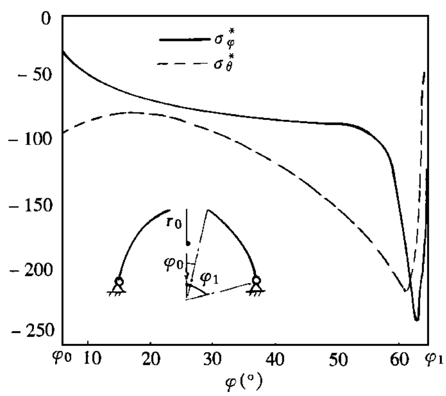

图 4 悬链线壳外表面应力

图 4 绘出了悬链线壳外表面的无量纲应力 σ_φ^*, σ_θ^* 的变化曲线• 我们看到, 边界应力在 $\varphi = \varphi_1$ 附近有剧烈变化, 但在 $\varphi = 10° \sim 15°$ 大部分区域, σ_φ^* 变化缓慢• 从设计角度看, 这种应力分布是有益的•

§6. 结 束 语

本文导出了轴对称旋转壳在一般荷载作用下的简化复变量方程• 该方程消除了荷载项在壳体经线极值点的奇异性• 建立了相应的初参数积分方程表述• 从而为轴对称旋转壳问题的积分方程分析或数值计算提供了适当的基础• 与准确解和实验结果的比较表明, 本文的理论及数值计算是可靠的• 需要指出, 采用本文的初参数积分方程, 只须对初参数的传递稍作修正, 就可以适用于变厚度的旋转壳问题•

参 考 文 献

1 W. Fl gge, Stresses in Shells, 2nd., New York (1973)•
2 S. Timoshenko and S. Woinowsky_Krieger,《板壳理论》, 科学出版社, 北京 (1977)•
3 杨耀乾,《薄壳理论》, 中国铁道出版社, 北京 (1981)•
4 陈山林, 椭圆环壳在一般荷载下的轴对称问题, 中国科学(A辑), (6) (1989), 625—636•
5 钱伟长, 一般旋转壳在轴对称变形下的复变量方程, 应用数学和力学, **11**(7) (1990), 565—580•
6 钱伟长、郑思梁, 轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的精确解, 清华大学学报, **19** (1979), 27—41•
7 陈山林, 圆环壳在一般荷载下的轴对称问题, 应用数学和力学, **7**(5) (1986), 425—434•
8 钱伟长,《应用数学和力学论文集》, 江苏科学技术出版社 (1980)•
9 陈山林, 悬链线壳的轴对称问题,《应用数学和力学(钱伟长八十诞辰祝寿文集)》, 科学出版社 (1993), 285—289•

General Axisymmetry Problems for Shells of Revolution and Analyses of Intergral Equation

Chen Shanlin Liu Dong
(Chongqing Jianzhu University, Chongqing 400045, P.R. China)

Abstract

In this paper, a simplified equation in complex form for axisymmetry elastic thin shells of revolution under arbitrary distributed loads is given. The equation is equivalent to the exact equations within the error range of the thin shell theory, with the singularities at the points of meridional extreme values eliminated. A Volterra integral equation of the problem and the numerical solutions are given.

Key words shell of revolution, axisymmetry problems, integral equation