应用数学和力学, 第 19 卷 第 6 期(1998 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

自反 Banach 空间内混合非线性似变分不等式解的算法*

丁协平①

(1996 年 9 月 9 日收到)

摘　　要

本文在自反 Banach 空间内研究了一类混合非线性似变分不等式• 应用作者得到的一个极小极大不等式, 对这类混合非线性似变分不等式的解, 证明了几个存在唯一性定理• 其次由应用辅助问题技巧, 作者建议了一个计算此类混合非线性似变分不等式的近似解的创新算法• 最后讨论收敛性准则•

关键词　混合非线性似变分不等式　极小极大不等式　辅助变分不等式　一般算法　自反 Banach 空间

中图分类号　O176, O177

§1. 引　　言

设 D 是 Banach 空间 B 的非空凸子集, B^* 是 B 的拓扑对偶空间和 $\langle u, v\rangle$ 是 $u \in B^*$ 和 $v \in B$ 之间的配对• 设 $T, A: D \to B^*$ 和 $\eta: D \times D \to B$ 是三个映象和 $f: D \to (-\infty, +\infty]$ 是一实值函数• 在本文中我们将研究混合非线性似变分不等式问题 $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$: 寻求 $u \in D$ 使得对一切 $v \in D$,

$$\langle Tu - Au, \eta(v, u)\rangle \geqslant f(u) - f(v) \tag{1.1}$$

特殊情形

(1) 如果 $f \equiv 0$, 则问题(1.1) 等价于寻求 $u \in D$ 使得对一切 $v \in D$,

$$\langle Tu - Au, \eta(v, u)\rangle \geqslant 0 \qquad (1.\ )$$

问题(1.) 是由 Noor[1] 研究的强非线性似变分不等式问题• 此问题与 semi_invex 集上的 semi_invex 函数的极小产生自然的联系•

( ) 如果 $f \equiv 0$ 和 $A \equiv 0$, 则问题(1.1) 等价于寻求 $u \in D$ 使得对一切 $v \in D$,

$$\langle Tu, \eta(v, u)\rangle \geqslant 0 \tag{1.3}$$

问题(1.3) 是由 Parida, Sahoo 和 Kumar[ ] 研究的似变分不等式问题, 它与数学规划有自然的联系• 问题(1.3) 已由 Dien[3] 进一步研究和推广•

(3) 如果 $\eta(v, u) = g(v) - g(u)$ 对一切 $v, u \in D$ 成立, 其中 $g: D \to B$ 是给定映象, 则问题(1.1) 等价于寻求 $u \in D$ 使得对一切 $v \in D$,

* 国家自然科学基金资助项目 (19371058)

① 四川师范大学数学系, 成都 610066

$$\langle Tu - Au, g(v) - g(u) \rangle \geqslant f(u) - f(v) \tag{1.4}$$

问题(1.4)由Yao[4]作为广义变分不等式问题引入和研究• 他在Hilbert空间内的适当假设下证明了解的某些存在唯一性定理• Ding[5]进一步在自反Banach空间内研究了问题(1.4)• 存在问题(1.1)和(1.4)的许多特殊情形能在Harker和Pang[6], Isac[7], Noor[8~10], Noor, Noor和Rassias[11], Yao[4]等人的文章和其参考文献中找到, 所以$MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$(1.1)是更为一般和统一的问题, 这也是本文主要的促动因素之一•

在本文中, 我们首先在自反Banach空间内较弱假设下对$MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$证明了某些解的存在唯一性定理, 推广了Parida_Sahoo_Kumar[ ], Dien[3], Yao[4], Ding[5]和Noor[8~10]中的相应结果到自反Banach空间• 其次通过应用辅助问题技巧, 我们对计算$MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$的近似解建议和分析了一个十分一般的算法• 最后讨论收敛性准则•

§ . 预 备 知 识

我们首先回忆下列定义和已知结果•

定义2.1 设D是自反Banach空间B的非空子集, B^*是B的对偶空间, $T: D \to B^*$和$\eta: D \times D \to B$•

(1) 称T是强η_单调的具有常数$\alpha > 0$, 如果对一切$u, v \in D$, $u \neq v$,

$$\langle Tu - Tv, \eta(u, v) \rangle \geqslant \alpha \| u - v \|$$

如果$\eta(u, v) = g(u) - g(v)$对一切$u, v \in D$成立其中$g: D \to B$是给定映象, 则称T是强g_单调的具有常数$\alpha > 0$• 如果$\eta(u, v) = u - v$对一切$u, v \in D$成立, 则称T是强单调的具有常数$\alpha > 0$•

( ) 称T是η_反单调的, 如果对一切$u, v \in D$,

$$\langle Tu - Tv, \eta(u, v) \rangle \leqslant 0$$

(3) 称T是Lipschitz连续的具有常数$\beta \geqslant 0$, 如果对一切$u, v \in D$,

$$\| Tu - Tv \| \leqslant \beta \| u - v \|$$

(4) 称η满足Lipschitz型条件具有常数$\delta \geqslant 0$, 如果对一切$u, v \in D$,

$$\| \eta(u, v) \| \leqslant \delta \| u - v \|$$

定义2.2 设D是Banach空间B的非空凸子集和$f: D \to (-\infty, +\infty]$•

(1) 称f是凸的, 如果对任何$u, v \in D$和$\alpha \in [0, 1]$,

$$f(\alpha u + (1 - \alpha) v) \leqslant \alpha f(u) + (1 - \alpha) f(v)$$

( ) 称f在D上下半连续, 如果对每一$\alpha \in (-i\infty, +\infty]$, 集$\{u \in D: f(u) \leqslant \alpha\}$在$D$内是闭的•

下面概念是Ding_Tarafdar[1]引入的相应概念的推广•

定义2.3 设D是Banach空间B的非空凸子集, $T: D \to B^*$和$\eta: D \times D \to B$是映象• 称T和η在D上有0_对角凹关系, 如果下式定义的函数$\phi: D \times D \to (-\infty, +\infty]$:

$$\phi(u, v) = \langle Tu, \eta(v, u) \rangle$$

在v是0_对角凹的(见[13]), 即是对任何有限集$\{v_1, \cdots, v_m\} \subset D$和对任何

$$u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \quad \left(\lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right) \qquad \text{se}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\psi(u, v_i) \leqslant 0$$

T 和 η 被说成在 D 上有 0_对角凸关系, 如果 $-T$ 和 η 在 D 上有 0_对角凹关系•

注 2.1 容易看出如果对每一 $u \in D$, $\eta(u, u) = 0$ 和函数 $v \mapsto \langle Tu, \eta(v, u)\rangle$ 是凹的, 则 T 和 η 在 D 上有 0_对角凹关系•

下面引理的证明能在[14]内找到•

引理 2.1 设 D 是拓扑矢量空间的非空凸子集和设 $\varphi: D \times D \to [-\infty, +\infty]$ 使得

(i) 对每一 $v \in D$, $u \mapsto \varphi(v, u)$ 在 D 的每一紧子集上是下半连续的,

(ii) 对每一非空有限集 $\{v_1, \cdots, v_m\} \subset D$ 和对每一

or $$u = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i v_i \quad \left(\lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1\right), \quad \min_{1\leqslant i\leqslant m}\varphi(v_i, u) \leqslant 0$$

(iii) 存在 D 的非空紧凸子集 D_0 和非空紧子集 K 使得对每一 $u \in D \setminus K$, 存在 $v \in \mathrm{co}(D_0 \cup \{u\})$ 满足 $\varphi(v, u) > 0$•

则存在 $\hat{u} \in K$ 使得对一切 $v \in D$, $\varphi(v, \hat{u}) \leqslant 0$•

§ 3. 存在唯一性定理

在本节中, 我们将对 $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$ 证明解的存在唯一性定理•

定理 3.1 设 D 是自反 Banach 空间 B 的非空闭凸子集和 B^* 是 B 的对偶空间, $T, A: D \to B^*$ 和 $\eta: D \times D \to B$ 是三个映象和 $f: B \to (-\infty, +\infty]$ 是真凸下半连续泛函满足 $\mathrm{int}(\mathrm{dom} f) \cap D \neq \varnothing$ 使得

(i) T 是连续和强 η_单调的具有常数 $\alpha > 0$,

(ii) η 连续和满足 Lipschitz 型条件具有常数 $\delta \geqslant 0$ 且对一切 $u, v \in D$, $\eta(u, v) = -\eta(v, u)$,

(iii) A 是连续和 η_反单调的,

(iv) $A - T$ 和 η 在 D 上有 0_对角凹关系•

则 $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$ 有唯一解 $\hat{u} \in D$•

证明 定义函数 $\varphi: D \times D \to [-\infty, +\infty]$ 如下:

$$\varphi(v, u) = \langle Au - Tu, \eta(v, u)\rangle + f(u) - f(v)$$

因为 T, A 和 η 是连续的和 f 是下半连续的, 对每一 $v \in D$, 函数 $u \mapsto \varphi(v, u)$ 在 D 上是弱下半连续的• 我们主张 $\varphi(v, u)$ 满足引理 .1 的条件(ii)• 如果不真, 则存在有限集 $\{v_1, \cdots, v_m\} \subset D$ 和下半

$$u = \sum_{i=1}^{m}\lambda_i v_i \quad \left(\lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1\right)$$

使得 $\varphi(v_i, u) > 0$, $i = 1, \cdots, m$, 即有

$$\langle Au - Tu, \eta(v_i, u)\rangle + f(u) - f(v_i) > 0 \qquad (i = 1, \cdots, m)$$

由此推得 $$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\langle Au - Tu, \eta(v_i, u)\rangle + f(u) - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i f(v_i) > 0$$

注意到 f 是凸的, 我们必有

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\langle Au - Tu, \eta(v_i, u)\rangle > 0$$

这与 $A - T$ 和 η 在 D 上有 0_对角凹关系相矛盾• 所以引理 .1 的条件(ii) 成立• 因为 f 是真凸下半连续的, 对每一 $v \in \mathrm{int}(\mathrm{dom} f), \partial f(v) \neq$ ï, 见 Ekeland 和 Temam[15]• 取 $v^* \in \mathrm{int}(\mathrm{dom} f) \cap D$, 则有

$$f(u) \geqslant f(v^*) + \langle r, u - v^* \rangle, \qquad \text{对一切 } r \in \partial f(v^*), u \in B$$

由 φ 的定义和条件(i) ~ (iii) 我们有

$$\begin{aligned}\varphi(v^*, u) &= \langle Au - Tu, \eta(v^*, u)\rangle + f(u) - f(v^*) \\ &\geqslant \langle Tv^* - Tu, \eta(v^*, u)\rangle - \langle Tv^*, \eta(v^*, u)\rangle + \langle Av^*, \eta(v^*, u)\rangle + f(u) - f(v^*) \\ &\geqslant \alpha \| u - v^* \| - \delta \| Tv^* \| \| u - v^* \| - \delta \| Av^* \| \| u - v^* \| + \langle r, u - v^* \rangle \\ &\geqslant \| u - v^* \| [\alpha \| u - v^* \| - \delta \| Tv^* \| - \delta \| Av^* \| - \| r \|]\end{aligned}$$

令 $R = (1/\alpha)[\delta(\| Tv^* \| + \| Av^* \|) + \| r \|]$ 和 $K = \left\{u \in D: \| u - v^* \| \leqslant R\right\}$• 则 K 和 $D_0 = \left\{v^*\right.$ 都是 D 的弱紧凸子集• 因此对每一 $u \in D \setminus K$, 存在 $v^* \in \mathrm{co}(D_0 \cup \left\{u\right.)$ 使得 $\varphi(v^*, u) > 0$ 和引理 .1 的条件(iii) 也成立• 由引理 .1, 存在 $\hat{u} \in D$ 使得对一切 $v \in D$, $\varphi(v, \hat{u}) \leqslant 0$, 即有对一切 $v \in D$,

$$\langle A\hat{u} - T\hat{u}, \eta(v, \hat{u})\rangle + f(\hat{u}) - f(v) \leqslant 0, \qquad v \in D$$

因此我们有对一切 $v \in D$,

$$\langle T\hat{u} - A\hat{u}, \eta(v, \hat{u})\rangle \geqslant f(\hat{u}) - f(v)$$

即 $\hat{u}$ 是 $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)(1.1)$ 的一解•

现在我们证明 $\hat{u}$ 是问题(1.1) 的唯一解• 假设 u_1, u 是问题(1.1) 的任意两个解• 则有对一切 $v \in D$,

$$\langle Tu_1 - Au_1, \eta(v, u_1)\rangle \geqslant f(u_1) - f(v) \tag{3.1}$$

和

$$\langle Tu - Au, \eta(v, u)\rangle \geqslant f(u) - f(v) \tag{3. }$$

注意到对一切 $u, v \in D$, $\eta(u, v) = -\eta(v, u)$, 在(3.1) 内取 $v = u$ 和在(3.) 内取 $v = u_1$ 再加这些不等式, 我们得到

$$\langle Tu_1 - Tu, \eta(u_1, u)\rangle - \langle Au_1 - Au, \eta(u_1, u)\rangle \leqslant 0 \tag{3.3}$$

因 T 是强 η_单调的和 A 是 η_反单调的, 由此推得如果 $u_1 \neq u$, 则有

$$0 < \alpha \| u_1 - u \| \leqslant \langle Tu_1 - Tu, \eta(u_1, u)\rangle \leqslant \langle Au_1 - Au, \eta(u_1, u)\rangle \leqslant 0$$

矛盾• 因此我们必有 $u_1 = u$, 故 $\hat{u}$ 是 $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)(1.1)$ 的唯一解•

如果 A 也是 Lipschitz 连续的具有常数 $\lambda \geqslant 0$, 则在定理 3.1 中 A 的 η_反单调性是不必要的• 这在下面定理中证明•

定理 3.2 设 D, B, B^*, T, A, η 和 f 与定理 3.1 内相同使得条件(i), (ii) 和(iv) 成立• 条件(iii) 由下面条件代替

(iii)′ A 是 Lipschitz 连续的具有常数 $\lambda \geqslant 0$ 使得 $\alpha > \lambda\delta$•

则 $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$ 有唯一解 $\hat{u} \in D$•

证明　定义函数 $\varphi: D \times D \to [-\infty, +\infty]$ 如下:

$$\varphi(v, u) = \langle Au - Tu, \eta(v, u)\rangle + f(u) - f(v)$$

由定理 3.1 的证明中同样的论证, φ 满足引理 .1 的条件(i) 和(ii)• 由定理 3.1 的条件(i), (ii) 和条件(iii)′ 有

$$\begin{aligned}\varphi(v^*, u) &= \langle Au - Tu, \eta(v^*, u)\rangle + f(u) - f(v^*) \\ &\geqslant \langle Tv^* - Tu, \eta(v^*, u)\rangle - \langle Tv^*, \eta(v^*, u)\rangle - \langle Av^* - Au, \\ &\quad \eta(v^*, u)\rangle + \langle Av^*, \eta(v^*, u)\rangle + f(u) - f(v^*)\end{aligned}$$

$$\geqslant \alpha\|u-v^*\| - \delta(\|Tv^*\|+\|Av^*\|)\|u-v^*\| - \lambda\delta\|u-v^*\| + \langle r, u-v^*\rangle$$
$$\geqslant \|u-v^*\|[(\alpha-\lambda\delta)\|u-v^*\| - \delta(\|Tv^*\| + \|Av^*\|) - \|r\|]$$

因 $\alpha-\lambda\delta>0$, 我们可以令 $R=[1/(\alpha-\lambda\delta)][\delta(\|Tv^*\|+\|Av^*\|)+\|r\|]$ 和 $K=\{u\in D: \|u-v^*\|\leqslant R\}$• 由使用定理 3.1 证明中同样的论证, 我们能证明引理 .1 的条件(iii) 也被满足• 由引理 .1, 存在 $\hat{u}\in D$ 使得对一切 $v\in D$,

$$\langle T\hat{u}-A\hat{u}, \eta(v,\hat{u})\rangle \geqslant f(\hat{u})-f(v)$$

注意到 A 是 Lipschitz 连续的, η 满足 Lipschitz 型条件和 $\alpha>\lambda\delta$, 由利用定理 3.1 证明中同样的论证, 我们能证明 $\hat{u}$ 是 $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$(1.1) 的唯一解•

注 3.1 如果对每一 $u\in D$, 函数 $v\mapsto\langle Au-Tu, \eta(v,u)\rangle$ 是凹的, 或特别 $v\mapsto\eta(v,u)$ 是仿射或线性的, 则定理 3.1 的条件(iv) 成立• 如果 $\eta(u,v)=g(u)-g(v)$ 对一切 $u,v\in D$ 成立, 其中 $g: D\to B$ 是 Lipschitz 连续的具有常数 $\delta\geqslant 0$, 则定理 3.1 的条件(ii) 被满足• 如果对一切 $u,v\in D$, $\eta(u,v)=u-v$, 则定理 3.1 的条件(ii) 和(iv) 被平凡满足和 T 是强单调的具有常数 $\alpha>0$, 因此定理 3.1 和 3. 推广了 Ding[5] 的定理 3.1 和 3. • 定理 3. 也是 Yao[4] 的定理 3.1 在自反 Banach 空间设置下的改进变形• 定理 3.1 和 3. 能被使用来获得在文[1, ,4,6~11] 中所考虑的各类变分不等式和补问题解的存在结果的推广•

§4. 一般算法和收敛性

在本节中, 我们利用辅助原理技巧对 $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$ 的近似解给出一个一般算法和收敛性分析•

我们考虑一辅助真凸可微泛函 $K: B\to(-\infty, +\infty]$ 和一正数 $\rho>0$• 对一给定的 $u^*\in D$, 我们引入下面辅助极小化问题:

$$\min_{w\in D}[K(w)+\rho\langle Tu^*-Au^*, \eta(w,u^*)\rangle - \langle K'(u^*), w\rangle + \rho f(w)] \qquad (4.1)$$

如果 f 和 $w\mapsto\langle Tu^*, -Au^*, \eta(w,u^*)\rangle$ 是凸的和对一切 $u,v,z\in D$, $\eta(u,u)=0$ 和 $\eta(u,v)=\eta(u,z)+\eta(z,v)$, 则辅助问题(4.1) 的解能由下面辅助变分不等式刻划:

$$\langle K'(w), v-w\rangle \geqslant \langle K'(u^*), v-w\rangle - \rho\langle Tu^*-Au^*, \eta(v,w)\rangle + \rho f(w) - \rho f(v) \qquad \forall v\in D \qquad (4. \ )$$

注意到如果 $w=u^*$, 则显然 u^* 是 $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$ 的一解• 根据这一观察我们对 $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$ 的近似解建议下面一般算法•

算法 4.1 一般算法•

(i) 当 $n=0$ 时, 从某初始元 u_0 开始,

(ii) 在第 n 步, 解具有 $u^*=u_n$ 的辅助极小化问题(4.1) 或解具有 $u^*=u_n$ 的辅助变分不等式(4.)• 令 u_{n+1} 是问题(4.1) 或(4.) 的解,

(iii) 如果对给定的 $\varepsilon>0$, $\|u_{n+1}-u_n\|\leqslant\varepsilon$, 则停止, 否则重复(ii)•

注 4.1 算法 4.1 是计算 $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$ 的解的一有趣的方法, 只要或者辅助问题(4.1) 或者辅助变分不等式(4.) 比 $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$ 更容易求解• 因为辅助问题(4.1) 是一个极小化问题, 对于求解它, 几种方法是有效的• Cohen[16] 已指出包含梯度、次梯度和分解等许多计算方法都能在辅助问题的一般框架下进行研究•

定理 4.1 设 D 是自反 Banach 空间 B 的一非空闭凸子集, $T, A: D\to B^*$ 和 $\eta: D\times D\to$

B 是三个映象和 $f: B \to (-\infty, +\infty]$ 是一真凸下半连续泛函满足 $\mathrm{int}(\mathrm{dom} f) \cap D \neq \emptyset$• 设 $K: B \to (-\infty, +\infty]$ 是一可微凸泛函使得

(i) T 是连续和强 η_单调的具有常数 $\alpha > 0$,

(ii) η 连续和满足 Lipschitz 型条件具有常数 $\delta \geqslant 0$ 使得对每一 $u, v, z \in D$, $\eta(u, u) = 0$ 和 $\eta(u, v) = \eta(u, z) + \eta(z, v)$, 且对每一固定的 $u \in D$, 函数 $v \mapsto \langle Au - Tu, \eta(v, u)\rangle$ 是凹的,

(iii) A 是 Lipschitz 连续的具有常数 $\lambda \geqslant 0$ 使得 $\lambda\delta < \alpha$,

(iv) K 的导数 K' 是强单调的具有常数 $\mu > 0$•

则

(a) $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$ 有唯一解 $\hat{u} \in D$,

(b) 对每一 $\rho > 0$, 具有 u_n 代替 u^* 的辅助问题(4. 1)或(4.)有唯一解 $u_{n+1} \in D$,

(c) 如果 T 也是 Lipschitz 连续的具有常数 $\beta \geqslant 0$ 使得

$$0 < \rho < \frac{\mu(\alpha - \lambda\delta)}{\delta(\beta + \lambda)} \tag{4.3}$$

则由算法 4. 1 定义的序列 $\{u_n\}$ 强收敛于 $\hat{u}$•

证明 (a) 因对每一 $u \in D$, 函数 $v \mapsto \langle Au - Tu, \eta(v, u)\rangle$ 是凹的, 定理 3. 1 的条件(iv) 被满足• 结论(a) 由定理 3. 得到•

(b) 对每一固定的 $\rho > 0$ 和 $u_n \in D$, 定义函数 $\varphi: D \times D \to [-\infty, +\infty]$ 如下:

$$\varphi(v, w) = \langle K'(u_n) - K'(w), v - w\rangle - \rho\langle Tu_n - Au_n, \eta(v, w)\rangle + \rho f(w) - \rho f(v)$$

由使用定理 3. 1 证明中相同的论证, 容易检验 φ 满足引理 .1 的一切条件且因此存在 $\hat{w} \in D$ 使得对一切 $v \in D$,

$$\langle K'(u_n) - K'(\hat{w}), v - \hat{w}\rangle - \rho\langle Tu_n - Au_n, \eta(v, \hat{w})\rangle + \rho f(\hat{w}) - \rho f(v) \leqslant 0 \tag{4.4}$$

容易证明 $\hat{w}$ 是唯一解, 故 $u_{n+1} = \hat{w}$ 是具有 $u^* = u_n$ 的辅助变分不等式(4.) 的唯一解•

(c) 现在我们研究由下式定义的泛函 $\Lambda: D \to (-\infty, +\infty]$:

$$\Lambda(u) = K(\hat{u}) - K(u) - \langle K'(u), \hat{u} - u\rangle$$

由 K' 的强单调性, 我们有

$$\Lambda(u) = K(\hat{u}) - K(u) - \langle K'(u), \hat{u} - u\rangle \geqslant (\mu/\ )\|u - \hat{u}\| \tag{4.5}$$

注意到对一切 $u, v, z \in D$, $\eta(u, u) = 0$ 和 $\eta(u, v) = \eta(u, z) + \eta(z, v)$ 蕴含对一切 $u, v \in D$, $\eta(u, v) = -\eta(v, u)$• 从 K' 的强单调性和具有 $\hat{w} = u_{n+1}$ 和 $v = \hat{u}$ 的(4.4) 式推得

$$\begin{aligned}
&\Lambda(u_n) - \Lambda(u_{n+1}) \\
&\quad = K(u_{n+1}) - K(u_n) - \langle K'(u_n), u_{n+1} - u_n\rangle + \langle K'(u_{n+1}) - K'(u_n), \hat{u} - u_{n+1}\rangle \\
&\quad \geqslant (\mu/\ )\|u_n - u_{n+1}\| + \rho\langle Tu_n - Au_n, \eta(u_{n+1}, \hat{u})\rangle + \rho f(u_{n+1}) - \rho f(\hat{u}) \\
&\quad = (\mu/\ )\|u_n - u_{n+1}\| + \rho\langle Tu_n - Au_n - (T\hat{u} - A\hat{u}), \eta(u_{n+1}, \hat{u})\rangle \\
&\qquad + \rho\langle T\hat{u} - A\hat{u}, \eta(u_{n+1}, \hat{u})\rangle + \rho f(u_{n+1}) - \rho f(\hat{u})
\end{aligned}$$

因为 $\hat{u}$ 是 $MNVLIP(T, A, \eta, f, D)$ 的解和 $u_{n+1} \in D$, 我们有

$$\langle T\hat{u} - A\hat{u}, \eta(u_{n+1}, \hat{u})\rangle \geqslant f(\hat{u}) - f(u_{n+1})$$

由此推得

$$\begin{aligned}
&\Lambda(u_n) - \Lambda(u_{n+1}) \\
&\quad \geqslant (\mu/\ )\|u_n - u_{n+1}\| + \rho\langle Tu_n - Au_n - (T\hat{u} - A\hat{u}), \eta(u_{n+1}, \hat{u})\rangle
\end{aligned}$$

$$= (\mu/\ )\|u_n - u_{n+1}\| + \rho\langle Tu_n - T\hat{u}, \eta(u_{n+1}, u_n)\rangle + \rho\langle Tu_n - T\hat{u}, \eta(u_n, \hat{u})\rangle$$
$$- \rho\langle Au_n - A\hat{u}, \eta(u_{n+1}, u_n)\rangle - \rho\langle Au_n - A\hat{u}, \eta(u_n, \hat{u})\rangle$$
$$\geqslant (\mu/\ )\|u_n - u_{n+1}\| - \rho\beta\delta\|u_n - \hat{u}\|\|u_n - u_{n+1}\| + \rho\alpha\|u_n - \hat{u}\|$$
$$- \rho\lambda\delta\|u_n - \hat{u}\|\|u_n - u_{n+1}\| - \rho\lambda\delta\|u_n - \hat{u}\|$$
$$\geqslant (\mu/\ )\|u_n - u_{n+1}\| + \rho(\alpha - \lambda\delta)\|u_n - \hat{u}\| - \rho(\beta\delta + \lambda\delta)\|u_n - \hat{u}\|\|u_n - u_{n+1}\|$$
$$\geqslant \frac{\mu}{\ }\|u_n - u_{n+1}\| + \rho(\alpha - \lambda\delta)\|u_n - \hat{u}\| - \frac{\rho\delta(\beta + \lambda)}{\mu}\|u_n - \hat{u}\|$$
$$- (\mu/\ )\|u_n - u_{n+1}\|$$
$$= \rho[\alpha - \lambda\delta - (\rho\delta/\mu)(\beta + \lambda)]\|u_n - \hat{u}\| \tag{4.6}$$

条件(4.3)和不等式(4.6)说明序列$\{\Lambda(u_n)\}$是严格减的(除非 $u_n = \hat{u}$),且由(4.5),它是非负的• 因此该序列收敛于某数• 所以此序列二相邻项之差趋向于0• 所以当 $n \to +\infty$ 时序列$\{u_n\}$强收敛于 $\hat{u}$• 这就完成了证明•

系 4.1 设 D 是自反 Banach 空间 B 的非空闭凸子集,B^* 是 B 的对偶空间并令 $T, A: D \to B^*$ 和 $g: D \to B$ 是三个映象• 假设 $f: D \to (-\infty, +\infty]$ 是一真凸下半连续泛函满足 int$(\mathrm{dom} f) \cap D \neq ї$ 和 $K: B \to (-\infty, +\infty]$ 是可微真凸泛函使得

(i) T 是连续和强g_单调的具有常数 $\alpha > 0$,

(ii) g 是Lipschitz 连续的具有常数 $\delta \geqslant 0$ 使得对每一 $u \in D$, $v \mapsto \langle Au - Tu, g(v)\rangle$ 是凹的,

(iii) A 是 Lipschitz 连续的具有常数 $\lambda \geqslant 0$ 使得 $\lambda\delta < \alpha$,

(iv) K 的导数K'是强单调的具有常数 $\mu > 0$•

则

(a) 广义变分不等式问题(1.4)有唯一解 $\hat{u} \in D$,

(b) 对每一 $\rho > 0$, 具有 $\eta(v, w) = g(v) - g(w)$, $\forall v, w \in D$ 和u_n 代替u^* 的辅助问题(4.1) 或(4.) 有唯一解 u_{n+1},

(c) 如果 T 也是 Lispschitz 连续的具有 $\beta \geqslant 0$ 使得不等式(4.3)成立, 则由具有 $\eta(v, u) = g(v) - g(u)$, $\forall v, u \in D$, 的算法 4.1 定义的序列$\{u_n\}$强收敛于$\hat{u}$•

证明 对每一 $v, u \in D$, 令 $\eta(v, u) = g(v) - g(u)$• 则容易检验 T, A, η 和f 满足定理 4.1 的一切条件• 结论(a)、(b) 和(c) 由定理 4.1 推得•

注 4.2 系 4.1 是 Ding[5] 的定理 4.1• 因此定理 4.1 改进和推广了 Ding[5] 的定理 4.1, Noor[1] 的定理 5.1, Noor 在[8~10] 中的定理 3.1 和 Yao[4] 的定理 3.1 到自反 Banach 空间• 定理 4.1 也改进和推广了 Cohen[16] 的定理 . 到更一般的混合似变分不等式•

参 考 文 献

1 M. A. Noor, Nonconvex functions and variational inequalities, J. Optim. Theory Appl., **87**(3) (1995), 615—630.

J. Parida, M. Sahoo and A. Kumar, A variational_like inequality problem, Bull. Austral. Math. Soc., **39** (1989), 5— 31.

3 N. H. Dien, Some remarks on variational_like and quasivariational_like inequalities, Bull. Austral.

Math. Soc., **46** (199), 335—34 .
4 J. C. Yao, Existence of generalized variational inequalities, Opera. Research Lett., **15** (1994), 35—40.
5 X. P. Ding, General algorithm of solutions for nonlinear variational inequalities in Banach spaces, Internat. J. Computers Math. Appl., **34**(9) (1997), 131—137.
6 P. T. Harker and J. S. Pang, Finite_dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms and applications, Math. Programming. Ser. B., **48** (1990), 161— 1.
7 G. Isac, Complementarity problems, Lecture Notes in Mathematics, **1528**, Springer, Berlin (199), 16—50.
8 M. A. Noor, General variational inequalities, Appl. Math. Lett., **1**( ) (1988), 119—1 .
9 M. A. Noor, Mixed variational inequalities, Appl. Math. Lett., **3**( ) (1990), 73—75.
10 M. A. Noor, General algorithm for variational inequalities, J. Optim. Theory. Appl., **73**( ) (199), 409—413.
11 M. A. Noor, K. I. Noor and T. M. Rassias, Some aspects of variational inequalities, J. Comput. Appl. Math., **47** (1993), 85—31 .
1 X. P. Ding and E. Tarafdar, Existence and uniqueness of solutions for a general nonlinear variational inequality, Appl. Math. Lett., **8**(1) (1995), 31—36.
13 J. X. Zhou and G. Chen, Diagonal convexity conditions for problems in convex analysis and quasi-variational inequalities, J. Math. Anal. Appl., **132** (1988), 13— 5.
14 X. P. Ding and K. K. Tan, A minimax inequality with applications to existence of equilibrium point and fixed point theorems, Colloquium Math., **63**( ) (199), 33— 47.
15 I. Ekeland and R. Temam, Convex Analysis and Variational Problems, North_Holland, Amsterdam, Holland (1976).
16 G. Cohen, Auxiliary problem principle extend to variational inequalities, J. Optim. Theory Appl., **59**( ) (1988), 3 5—333.

Algorithm of Solutions for Mixed Nonlinear Variational_Like Inequalities in Reflexive Banach Space

Ding Xieping
(Department of Mathematics, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P. R. China)

Abstract

In this paper, the author studies a class of mixed nonlinear variational_like inequalities in reflexive Banach space. By applying a minimax inequality obtained by the author, some existence uniqueness theorems of solutions for the mixed nonlinear variational_like inequalities are proved. Next, by applying the auxiliary problem technique, the author suggests an innovative iterative algorithm to compute the approximate solutions of the mixed nonlinear variational_like inequalities. Finally, the convergence criteria is also discussed.

Key words mixed nonlinear variational_like inequality, minimax inequality, auxiliary variational inequality, general algorithm, reflexive Banach space