应用数学和力学，第 19 卷 第 6 期(1998 年 6 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

一般各向异性复合材料层板基体损伤性能衰减研究(Ⅱ)——分解刚度值确定与层板性能衰减研究

王兴国[①] 华 玉[①] 郦正能[②]

(沈亚鹏推荐，1995 年 12 月 9 日收到，1997 年 12 月 19 日收到修改稿)

摘 要

本文尝试将损伤复合材料层板性能衰减研究扩展到含一般各向异性铺层的基体开裂层板• 对第(Ⅰ)部分提出的分解刚度法给出分解刚度值确定方程，完整了开裂层板本构关系解；对$(\theta_m/90_n)_s$开裂层板刚度衰减进行了数值计算并对计算结果进行了讨论•

关键词 复合材料层板 一般各向异性 损伤 分解刚度 性能衰减
中图分类号 TB332

§1. 引 言

在本文第(Ⅰ)部分中，对于含一般各向异性铺层的对称约束开裂复合材料层板，应用刚度分解的方法处理耦合刚度问题，建立起损伤层板本构关系，将有效刚度表为裂纹间距(或裂纹密度)的显式函数•

刚度分解的具体做法是将约束层(2)和开裂层(1)的面内折减刚度阵及出平面刚度阵都各自表为两个刚度阵的叠加• 对于约束层(2)，直接分离出耦合刚度项组成 b 问题刚度阵，其余刚度项构成 a 问题刚度阵；对于开裂层(1)，需将各刚度系数分解为两项之和如第(Ⅰ)部分中(2.9)、(2.10)式所示，即

$$\left.\begin{aligned} Q_{11}^{(1)} &= Q_{11a}^{(1)} + Q_{11b}^{(1)}, & Q_{66}^{(1)} &= Q_{66a}^{(1)} + Q_{66b}^{(1)} \\ Q_{12}^{(1)} &= Q_{12a}^{(1)} + Q_{12b}^{(1)}, & Q_{22}^{(1)} &= Q_{22a}^{(1)} + Q_{22b}^{(1)} \\ C_{44}^{(1)} &= C_{44a}^{(1)} + C_{44b}^{(1)}, & C_{55}^{(1)} &= C_{55a}^{(1)} + C_{55b}^{(1)} \end{aligned}\right\} \quad {}_{ss} \tag{1.1}$$

这里将讨论(1.1)式中各个分解值的确定•

(1.1)式中共含 12 个分解值($Q_{ija}^{(1)}, Q_{ijb}^{(1)}, \cdots$)，而(1.1)式本身只提供了 6 个方程• 因此，要全部确定这些刚度分解值尚缺少 6 个条件• 注意到本文第(Ⅰ)部分有效刚度表达式(4.2)、(4.3)中 $Q_{22a}^{(1)}, Q_{22b}^{(1)}$ 在两部分叠加后还原为 $Q_{22}^{(1)}$，分解值不单独出现，意味着 $Q_{22a}^{(1)}$，

---

① 河北理工学院土建系，河北唐山 063009

② 北京航空航天大学 北京 100083

$Q_{22b}^{(1)}$可任意取值而不影响其它解• 这样, 还余下$Q_{11a}^{(1)}$, $Q_{66a}^{(1)}$, $Q_{12a}^{(1)}$, $C_{44a}^{(1)}$, $C_{55a}^{(1)}$这5个刚度分解值, 还须补充5个方程来确定•

a, b 两问题在分离后虽然各自求解, 但它们并不是相互独立的, 必然存在着内部的关联• 两个问题应当各自满足平衡和连续条件以及边界条件; 两问题的位移和应变是协调的• 根据这些条件, 必能找到足够的补充方程以确定上述5个刚度分解值•

§ 2. 出平面刚度的分解值确定

由本文第(Ⅰ)部分中对开裂层板各层出平面剪应力剪应变关系的分解可得到

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xza}^{(1)} &= C_{55a}^{(1)}\gamma_{xz}^{(1)}, & \tau_{xzb}^{(1)} &= C_{55b}^{(1)}\gamma_{xz}^{(1)} \\
\tau_{yza}^{(1)} &= C_{44a}^{(1)}\gamma_{yz}^{(1)}, & \tau_{yzb}^{(1)} &= C_{44b}^{(1)}\gamma_{yz}^{(1)} \\
\tau_{xza}^{(2)} &= C_{55}^{(2)}\gamma_{xz}^{(2)}, & \tau_{xzb}^{(2)} &= C_{45}^{(2)}\gamma_{yz}^{(2)} \\
\tau_{yza}^{(2)} &= C_{44}^{(2)}\gamma_{yz}^{(2)}, & \tau_{yzb}^{(2)} &= C_{45}^{(2)}\gamma_{xz}^{(2)}
\end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

已假定各层出平面剪应力在界面保持连续, 因此有

当 $z = h^{(1)}$,

$$\left.\begin{aligned}
C_{55a}^{(1)}\gamma_{xz}^{(1)} &= C_{55}^{(2)}\gamma_{xz}^{(2)}, & C_{44a}^{(1)}\gamma_{yz}^{(1)} &= C_{44}^{(2)}\gamma_{yz}^{(2)} \\
C_{55b}^{(1)}\gamma_{xz}^{(1)} &= C_{45}^{(2)}\gamma_{yz}^{(2)}, & C_{44b}^{(1)}\gamma_{yz}^{(1)} &= C_{45}^{(2)}\gamma_{xz}^{(2)}
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

在(2. 2)式中消去剪应变项后得到下式:

$$\frac{C_{55b}^{(1)}C_{44b}^{(1)}}{C_{55a}^{(1)}C_{44a}^{(1)}} = \frac{C_{45}^{(2)}C_{45}^{(2)}}{C_{55}^{(2)}C_{44}^{(2)}} \tag{2.3}$$

代入(1. 1)式, 整理得到关于出平面刚度分解值$C_{55a}^{(1)}$, $C_{44a}^{(1)}$的一个二元二次方程

$$p_1C_{55a}^{(1)}C_{44a}^{(1)} + p_2C_{55a}^{(1)} + p_3C_{44a}^{(1)} + p_4 = 0 \tag{2.4}$$

其中

$$p_1 = \frac{C_{45}^{(2)}C_{45}^{(2)}}{C_{44}^{(2)}C_{55}^{(2)}} - 1,\quad p_2 = C_{44}^{(1)},\quad p_3 = C_{55}^{(1)},\quad p_4 = -C_{44}^{(1)}C_{55}^{(1)} \tag{2.5}$$

为解出$C_{55a}^{(1)}$, $C_{44a}^{(1)}$, 尚需寻找另一方程• 在本文第(Ⅰ)部分中的(3. 1)式曾给出b问题界面剪应力与各层平均位移差间的关系, 而对a问题由文献[1]也可写出对应的表达式

$$\left.\begin{aligned}
(h^{(1)}C_{55}^{(2)} + h^{(2)}C_{55a}^{(1)})\,\tau_{xza}^{12} &= 3C_{55a}^{(1)}C_{55}^{(2)}(u^{(2)} - u^{(1)}) \\
(h^{(1)}C_{44}^{(2)} + h^{(2)}C_{44a}^{(1)})\,\tau_{yza}^{12} &= 3C_{44a}^{(1)}C_{44}^{(2)}(v^{(2)} - v^{(1)})
\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

a, b 问题中各层平均位移是同一的, 因而可结合两问题中这两组关系式, 消去位移, 并代入平衡方程、面内无损伤本构关系等式整理得到

$$q_1C_{55a}^{(1)}C_{44a}^{(1)} + q_2C_{55a}^{(1)} + q_3C_{44a}^{(1)} + q_4 = 0 \tag{2.7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
q_1 &= h^{(2)}h^{(2)}_{\gamma}\left(\frac{Q^{(2)}_{11}Q^{(2)}_{66}}{C^{(2)}_{44}C^{(2)}_{55}}+\frac{Q^{(2)}_{16}Q^{(2)}_{16}}{C^{(2)}_{45}C^{(2)}_{45}}-\frac{Q^{(2)}_{11}Q^{(2)}_{16}}{C^{(2)}_{55}C^{(2)}_{45}}-\frac{Q^{(2)}_{66}Q^{(2)}_{16}}{C^{(2)}_{44}C^{(2)}_{45}}\right)\\
q_2 &= h^{(1)}h^{(2)}\left(\frac{Q^{(2)}_{11}Q^{(2)}_{66}}{C^{(2)}_{55}}-\frac{Q^{(2)}_{16}Q^{(2)}_{66}}{C^{(2)}_{45}}\right)\\
q_3 &= h^{(1)}h^{(2)}\left(\frac{Q^{(2)}_{11}Q^{(2)}_{66}}{C^{(2)}_{44}}-\frac{Q^{(2)}_{16}Q^{(2)}_{11}}{C^{(2)}_{45}}\right)\\
q_4 &= h^{(1)}h^{(1)}\left(Q^{(2)}_{11}Q^{(2)}_{66}-Q^{(2)}_{16}Q^{(2)}_{16}\frac{C^{(2)}_{44}C^{(2)}_{55}}{C^{(2)}_{45}C^{(2)}_{45}}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

联立(2.4)、(2.7)可解出开裂层(1.1)的出平面刚度分解值 $C^{(1)}_{55a}$, $C^{(1)}_{44a}$, 代回(1.1)式可确定 $C^{(1)}_{55b}$, $C^{(1)}_{44b}$.

§3. 面内刚度的分解值确定

由本文第(Ⅰ)部分 a, b 问题的平均应力边界条件(2.15)至(2.17)有

$$\sigma^{(1)}_{xa}(l)=0,\quad \sigma^{(1)}_{xb}(l)=0$$

代入无损伤本构关系得到

$$Q^{(1)}_{11a}u^{(1)\prime}(l)+Q^{(1)}_{12a}\varepsilon_y=0,\quad Q^{(1)}_{11b}u^{(1)\prime}(l)+Q^{(1)}_{12b}\varepsilon_y=0 \tag{3.1}$$

即导出两问题面内刚度分解值 $Q^{(1)}_{12a}$, $Q^{(1)}_{12b}$ 与 $Q^{(1)}_{11a}$, $Q^{(1)}_{11b}$ 的关系

$$\frac{Q^{(1)}_{11a}}{Q^{(1)}_{11b}}=\frac{Q^{(1)}_{12a}}{Q^{(1)}_{12b}} \tag{3.2}$$

下面考虑平衡方面. 刚度的分解需使 a, b 问题各自仍满足平衡条件. 由本文第(Ⅰ)部分给出的各层分离体平衡方程(2.12)、(2.13)及两问题面内无损伤本构关系(2.2)至(2.10), 消去界面剪应力后整理得到

$$\left.\begin{aligned}
h^{(1)}Q^{(1)}_{11a}u^{(1)\prime\prime} &= -h^{(2)}Q^{(2)}_{11}u^{(2)\prime\prime},\quad h^{(1)}Q^{(1)}_{66a}v^{(1)\prime\prime}=-h^{(2)}Q^{(2)}_{66}v^{(2)\prime\prime}\\
h^{(1)}Q^{(1)}_{11b}u^{(1)\prime\prime} &= -h^{(2)}Q^{(2)}_{16}v^{(2)\prime\prime},\quad h^{(1)}Q^{(1)}_{66b}v^{(1)\prime\prime}=-h^{(2)}Q^{(2)}_{16}u^{(2)\prime\prime}
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

在(3.1)式中消去位移导数项得到下式

$$\frac{Q^{(1)}_{11b}Q^{(1)}_{66b}}{Q^{(1)}_{11a}Q^{(1)}_{66a}}=\frac{Q^{(2)}_{16}Q^{(2)}_{16}}{Q^{(2)}_{11}Q^{(2)}_{66}} \tag{3.4}$$

代入(1.1)式, 整理得到关于面内刚度分解值 $Q^{(1)}_{11a}$, $Q^{(1)}_{66a}$ 的一个二元二次方程

$$t_1Q^{(1)}_{11a}Q^{(1)}_{66a}+t_2Q^{(1)}_{11a}+t_3Q^{(1)}_{66a}+t_4=0 \tag{3.5}$$

其中

$$t_1=\frac{Q^{(2)}_{16}Q^{(2)}_{16}}{Q^{(2)}_{11}Q^{(2)}_{66}}-1,\quad t_2=Q^{(1)}_{66},\quad t_3=Q^{(1)}_{11},\quad t_4=-Q^{(1)}_{11}Q^{(1)}_{66} \tag{3.6}$$

为得到关于 $Q^{(1)}_{11a}$, $Q^{(1)}_{66a}$ 的另一方程, 再考虑 a, b 问题的位移与应变协调. 本文第(Ⅰ)部分中的(3.9)式给出 b 问题(1)层在裂纹半间距上的位移表达式 $u^{(1)}(l)/l$ 及 $v^{(1)}(l)/l$; 对 a 问题则参照文献[1]可写出对应的表达式

$$\left.\begin{aligned}
\frac{u^{(1)}(l)}{l} &= \frac{\tau^{12\,\prime}_{xza}(l)}{h^{(1)}a^2_{01}Q^{(1)}_{11a}}\left(1-\frac{\operatorname{th}a_{01}l}{a_{01}l}\right)-\frac{Q^{(1)}_{12a}}{Q^{(1)}_{11a}}\varepsilon_y\\
\frac{v^{(1)}(l)}{l} &= \frac{\tau^{12\,\prime}_{yza}(l)}{h^{(1)}a^2_{02}Q^{(1)}_{66a}}\left(1-\frac{\operatorname{th}a_{02}l}{a_{02}l}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

结合两问题中这两组关系式,消去位移项;令 $l \to \infty$,利用(3.2)式消去 ε_y,再利用两问题无损伤本构关系等经微分运算消去界面剪应力项,整理后得出

$$\left.\begin{aligned} \frac{Q_{11b}^{(1)}}{Q_{11a}^{(1)}} &= \frac{a_{01}^2}{a_1^2 a_2^2}\left(-g_y \frac{Q_{11b}^{(1)}}{Q_{11a}^{(1)}} + f_y \frac{Q_{16}^{(2)}}{Q_{11}^{(2)}}\right) \qquad \mathrm{Q}(\\ \frac{Q_{66b}^{(1)}}{Q_{66a}^{(1)}} &= \frac{a_{02}^2}{a_1^2 a_2^2}\left(g_x \frac{Q_{16}^{(2)}}{Q_{66}^{(2)}} - f_x \frac{Q_{66b}^{(1)}}{Q_{11b}^{(1)}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

将(3.8)中两式相除,整理后导出确定 $Q_{11a}^{(1)}$ 和 $Q_{66a}^{(1)}$ 的另一方程,该方程为二元四次方程

$$\begin{aligned} & r_1 Q_{11a}^{(1)} Q_{11a}^{(1)} Q_{66a}^{(1)} Q_{66a}^{(1)} + r_2 Q_{11a}^{(1)} Q_{11a}^{(1)} Q_{66a}^{(1)} + r_3 Q_{11a}^{(1)} Q_{66a}^{(1)} Q_{66a}^{(1)} \\ & \quad + r_4 Q_{11a}^{(1)} Q_{66a}^{(1)} + r_5 Q_{11a}^{(1)} + r_6 Q_{66a}^{(1)} = 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} r_1 = {} & h^{(1)}[h^{(1)}h^{(1)}C_{45}^{(2)}(C_{55b}^{(1)}Q_{66}^{(2)} - r_0 C_{44b}^{(1)}Q_{11}^{(2)}) \\ & - h^{(1)}h^{(2)}(1 - r_0)C_{55b}^{(1)}C_{44b}^{(1)}Q_{16}^{(2)}] \\ r_2 = {} & h^{(1)}Q_{66}^{(2)}[h^{(2)}(1 + r_0)C_{44b}^{(1)}(h^{(2)}C_{55b}^{(1)}Q_{16}^{(2)} - h^{(1)}C_{45}^{(2)}Q_{11}^{(2)}) \\ & - h^{(1)}h^{(1)}C_{55b}^{(1)}C_{45}^{(2)}Q_{66}^{(1)}] \\ r_3 = {} & h^{(1)}Q_{11}^{(2)}[h^{(2)}(1 + r_0)C_{55b}^{(1)}(h^{(1)}C_{45}^{(2)}Q_{66}^{(2)} - h^{(2)}C_{44b}^{(1)}Q_{16}^{(2)}) \\ & + r_0 h^{(1)}h^{(1)}C_{44b}^{(1)}C_{45}^{(2)}Q_{11}^{(1)}] \\ r_4 = {} & h^{(1)}C_{45}^{(2)}Q_{11}^{(2)}Q_{66}^{(2)}[h^{(1)}h^{(2)}(1 + r_0)(C_{44b}^{(1)}Q_{11}^{(1)} - C_{55b}^{(1)}Q_{66}^{(1)}) \\ & - h^{(2)}h^{(2)}(C_{44b}^{(1)}Q_{11}^{(2)} - r_0 C_{55b}^{(1)}Q_{66}^{(2)})] \\ & + h^{(2)}h^{(2)}h^{(2)}(1 - r_0)C_{44b}^{(1)}C_{55b}^{(1)}Q_{16}^{(2)}Q_{11}^{(2)}Q_{66}^{(2)} \\ r_5 = {} & - r_0 h^{(1)}h^{(1)}h^{(2)}C_{45}^{(2)}C_{55b}^{(1)}Q_{11}^{(2)}Q_{66}^{(2)}Q_{66}^{(2)}Q_{66}^{(1)} \\ r_6 = {} & h^{(1)}h^{(2)}h^{(2)}C_{45}^{(2)}C_{44b}^{(1)}Q_{11}^{(2)}Q_{66}^{(2)}Q_{11}^{(2)}Q_{11}^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

式中

$$r_0 = \frac{C_{44a}^{(1)}C_{44}^{(2)}Q_{11}^{(2)}}{C_{55a}^{(1)}C_{55}^{(2)}Q_{66}^{(2)}} \cdot \frac{(h^{(1)}C_{55}^{(2)} + h^{(2)}C_{55a}^{(1)})}{(h^{(1)}C_{44}^{(2)} + h^{(2)}C_{44a}^{(1)})} \tag{3.11}$$

将(3.5)代入(3.9)导出仅含 $Q_{11a}^{(1)}$ 的四次代数方程

$$s_1 Q_{11a}^{(1)}Q_{11a}^{(1)}Q_{11a}^{(1)}Q_{11a}^{(1)} + s_2 Q_{11a}^{(1)}Q_{11a}^{(1)}Q_{11a}^{(1)} + s_3 Q_{11a}^{(1)}Q_{11a}^{(1)} + s_4 Q_{11a}^{(1)} + s_5 = 0 \tag{3.12}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= r_1 t_2^2 - r_2 t_1 t_2 \\ s_2 &= 2r_1 t_2 t_4 - r_2(t_2 t_3 + t_1 t_4) - r_4 t_1 t_2 + r_3 t_2^2 + r_5 t_1^2 \\ s_3 &= r_1 t_4^2 - r_2 t_3 t_4 + 2r_3 t_2 t_4 - r_4(t_2 t_3 + t_1 t_4) + 2r_5 t_1 t_3 - r_6 t_1 t_2 \\ s_4 &= r_3 t_4^2 - r_4 t_3 t_4 + r_5 t_3^2 - r_6(t_2 t_3 + t_1 t_4) \\ s_5 &= - r_6 t_3 t_4 \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

由(3.12)解得 $Q_{11a}^{(1)}$ 后代入(3.5)求出 $Q_{66a}^{(1)}$,再代回(3.2)式可确定 $Q_{11b}^{(1)}$, $Q_{66b}^{(1)}$• 最后,由(3.2)式及(1.1)式确定 $Q_{12a}^{(1)}$ 和 $Q_{12b}^{(1)}$• 至此,可完全确定a, b问题开裂层(1)的刚度分解值•

§4. 数值算例

为了应用所导出的本构关系式研究任意约束层对称约束开裂层板的刚度衰减,这里计算了$(\theta/90)_s$层板和$(45_m/90_n)_s$层板在90°层开裂后的层板有效刚度,并考察其随裂纹密度的变化• 材料性能取自文献[2]给出的AS4/3501—6层板数据:$E_{11}=140.1$GPa, $E_{22}=8.36$GPa, $G_{12}=4.31$GPa, $G_{23}=3.2$GPa, $\nu_{12}=0.253$, $\nu_{23}=0.297$, 单层厚度0.149mm•

表1给出$(\theta/90)_s$层板在90°层开裂后,随着裂纹密度的增大,沿开裂方向有效刚度A_{11}的变化• 裂纹密度n定义为

$$n=1/2l \tag{4.1}$$

l为裂纹半间距• n的单位为条/mm• $n=0$时由本文第(Ⅰ)部分的(4.9)式计算无损伤层板刚度,$n\to\infty$时由本文第(Ⅰ)部分的(4.10)式计算开裂层板的极限刚度•

表1 $(\theta/90)_s$开裂层板有效刚度A_{11}(GPa)

n	$(0/90)_s$	$(15/90)_s$	$(30/90)_s$	$(45/90)_s$	$(60/90)_s$	$(75/90)_s$
0.0	74.495	66.080	46.015	25.505	12.960	8.834
0.01	74.479	66.17	46.20	25.61	12.95	8.81
0.5	73.709	67.72	50.49	30.08	16.61	7.90
1.0	72.951	66.04	47.38	26.84	12.83	7.12
1.5	72.291	64.66	45.19	24.66	11.39	6.47
2.0	71.786	63.78	43.99	23.46	10.55	5.99
2.5	71.422	63.23	43.30	22.79	10.04	5.65
3.0	71.164	62.88	42.89	22.38	9.71	5.42
4.0	70.845	62.48	42.45	21.94	9.33	5.13
5.0	70.670	62.28	42.23	21.72	9.14	4.97
10.0	70.400	61.99	41.92	21.42	8.86	4.73
∞	70.300	61.885	41.820	21.310	8.765	4.639

表2给出$(45_m/90_n)_s$层板在90°层开裂后,其开裂方向有效刚度A_{11}随裂纹密度n的变化,并与正交各向异性约束层的$(\pm45/90_2)_s$开裂层板相应刚度做了比较•

表2 $(45_m/90_n)_s$开裂层板有效刚度A_{11}(GPa)

n	$(45/90)_s$	$(45/90_2)_s$	$(45/90_5)_s$	$(45_2/90_2)_s$	$(\pm45/90_2)_s$
0.0	25.505	19.800	14.095	25.505	25.505
0.01	25.61	20.16	14.49	25.72	25.470
0.5	30.08	20.48	9.83	26.84	23.886
1.0	26.84	17.19	8.01	23.46	22.731
1.5	24.66	15.80	7.54	22.38	22.130
2.0	23.46	15.18	7.35	21.94	21.826
2.5	22.79	14.85	7.27	21.72	21.659
3.0	22.38	14.66	7.22	21.60	21.560
4.0	21.94	14.47	7.17	21.47	21.455
5.0	21.72	14.38	7.14	21.42	21.405
10.0	21.42	14.25	7.11	21.34	21.334
∞	21.310	14.207	7.103	21.310	21.310

§5. 结 论

1) 本文第(Ⅰ)部分用分解刚度法导出$(\theta_m/90_n)_s$对称约束开裂层板本构关系,第(Ⅱ)部分给出刚度分解值的确定方法• 公式演化与数值计算表明,所得开裂层板有效刚度是90°层裂纹密度n的函数,在$n\to 0$时退化为无损伤层板刚度,在$n\to\infty$时趋向开裂层板的极限刚度• 由此证明导出结果的合理性•

2) 由表1可见,约束层方向角θ影响刚度衰减• 令

$$\beta_n=\frac{A_{11}(n\to 0)-A_{11}(n)}{A_{11}(n\to 0)-A_{11}(n\to\infty)}$$

用β_n描述层板刚度衰减程度,则可得到$n=2$条/mm时,β_n值由$(0/90)_s$到$(75/90)_s$层板依次为64.6%,54.8%,48.3%,48.7%,57.4%,67.8%• 这时$\theta=30°$刚度衰减最少,易证$\theta=30°$恰是$Q_{16}(\theta)$函数的拐点•

3) 由表2可见,约束强弱影响刚度衰减速度• 当$n=2$条/mm时,β_n值对$(45/90)_s$,$(45/90_2)_s$,$(45/90_5)_s$层板依次为48.7%,82.6%,96.5%• 90°层越多,刚度衰减越快• 再对比$(45_2/90_2)_s$与$(\pm 45/90_2)_s$层板在$n=2$条/mm时的β_n值,依次为85.0%,87.7%,后者衰减得略快•

4) 由表1,表2结果可见,与正交各向异性约束层$(0/90)_s$,$(\pm 45/90_2)_s$开裂层板有效刚度A_{11}相比,一般各向异性约束层的开裂层板有效刚度A_{11}有如下特殊现象:对强的约束情况,当n很小时沿开裂方向刚度反而上升,随n增大又转向衰减;而对弱的约束情况如$(75/90)_s$,$(45/90_5)_s$层板则基本上是单向衰减• 这一现象无疑与约束层存在耦合刚度相关,它使约束状态具有面内非对称性;在强约束情况与裂纹密度很小的范围内,较严重的非对称性会引起层板耦合变形,导致层板性能分析问题非线性程度的增加,这些非线性因素可能是本文开裂层板分析模型中尚未包含的•

5) 一般各向异性铺层损伤层板的本构关系性能衰减研究是同时包含很大的数学复杂性和物理复杂性的课题• 本文工作主要在处理耦合刚度的方法突破上进行了初步的尝试,研究结果有待完善• 例如本文在分解刚度法中将原问题分解为两个静力许可且位移协调的子问题,分别求解后叠加;这一措施虽然使原问题得以求解,但相当于对原问题增加了约束条件,因而得到的实际上是原问题的近似解析解,其近似程度和应用范围需深入探讨• 作者体会,在复合材料层板性能研究中深化现有成果,突破铺层局限,的确是一项困难很大然而势在必行的工作,并且需要复合材料损伤实验的支持•

参 考 文 献

1 R. J. Nuismer and S. C. Tan, Constitutive relations of a cracked composite lamina, J. Comp. Mater., **22**(4) (1988), 306－321.

2 R. Talreja, Yalvac Selim, et al., Transverse cracking and stiffness reduction in cross ply laminates of different matrix toughness, J. Comp. Mater., **26**(11) (1992), 1644－1663.

3 华玉、王兴国、郦正能,一般各向异性复合材料层板基体损伤性能衰减研究(Ⅰ)——分解刚度法建立$(\theta_m/90_n)_s$开裂层板本构关系,应用数学和力学,**19**(3) (1998), 257－265.

Constitutive Relation and Stiffness Degradation of Cracked Anisotropic Composite Laminates(Ⅱ) ——Determination of Resolved Stiffness and Investigation of Stiffness Degradation for Cracked Laminates

Wang Xingguo Hua Yu
(Hebei Institute of Technology, Tangshan, Hebei 063009, P.R.China)

Li Zhengneng
(Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, P.R.China)

Abstract

The study on property degradation of damaged composite laminates is extended to anisotropic laminates with matrix cracking. In (Ⅱ) of the paper, a solution for partitioned stiffness is given to complete the constitutive relations developed in (Ⅰ). The stiffness degradation in $(\theta_m/90_n)_s$ cracked laminates is calculated and the results are discussed.

Key words composite laminate, anisotropy, damage, stiffness partition, property degradation