位场解析延拓的稳定性估计

徐定华　　程　晋　　李明忠

(江福汝推荐, 1996 年 9 月 20 日收到)

摘　　要

本文讨论两类非典型情形下 Laplace 方程 Cauchy 问题解的稳定性, 分别利用共形映照、不适定问题的解法(Tikhonov, 栾文贵, Yamamoto) 相应获得了解的加权 Hölder 型稳定性估计和对数型稳定性估计

关键词　Laplace 方程 Cauchy 问题　位场解析延拓　不适定问题　稳定性估计

中图分类号　O175

随着生产实践和科学技术的发展, 许多科学技术和工程问题都可归结为 Laplace 方程 Cauchy 问题, 如工程物探中的地质勘查、工业无损探测中的目标体确定、医学中的病灶诊断等　然而这类问题又常常是不适定问题, 这就给这类问题的解决增添了难度, 表现在没有有效的理论和方法可供借鉴　但是这类问题又是实践中所迫切需要解决的, 因此对这类问题的研究具有理论和实践价值

对这类不适定的问题, 有许多数学家、应用数学家和工程学家进行了讨论, 得到了许多有意义的结果[1～4], 然而他们讨论的各种情形都是典型情形　本文讨论两种非典型情形下的 Laplace 方程 Cauchy 问题解的稳定性　引发我们研究这类问题的起因是源于对一类工程无损探测问题的研究[5]　本文分别利用共形映照[4]、位场解析延拓方法和不适定问题的解法[3,6,7], 得到了这类问题解对 Cauchy 数据的加权 Hölder 型连续依赖性和对数型连续依赖性

1　位场解析延拓问题解的稳定性估计: 情形 A

栾文贵在文献[3] 中讨论了位场值在整个实数轴$(-\infty, +\infty)$上给出的位场延拓问题　本节将讨论位场值在两条互为正交的射线 Ox, Ot 上给出时的位场延拓问题, 如图 1 所示:

设位场值 $u(x, t)$满足

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \qquad \text{在 } \mathbf{R}^2\setminus D \text{ 内} \\ &u|_{\Gamma_1}=f_1(t), \qquad u|_{\Gamma_2}=f_2(x) \\ &u(x,t)\to 0, \qquad \text{当 } x\to\infty \text{ 或 } t\to\infty \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

当

国家自然科学基金(19671056) 和上海市教委基金(96ZA10420) 资助课题

华东地质学院 267 信箱, 江西抚州 344000
复旦大学数学系, 上海 200433
上海大学数学系, 上海 200072

这里 D 是第一象限中的一个有界区域，代表场源所在的位置，$_1$ 为 Ot 轴，$_2$ 为 Ox 轴，记 $= \ _1 \quad _2$

$$f(x, t) = \begin{cases} f_1(t), & _1 \text{上} \\ f_2(x), & _2 \text{上} \end{cases}$$

稳

第二、三、四象限所在的平面区域记为 $_+$，第一象限所在的区域记为 $_-$，则问题(1 1)等价于下列两个定解问题:

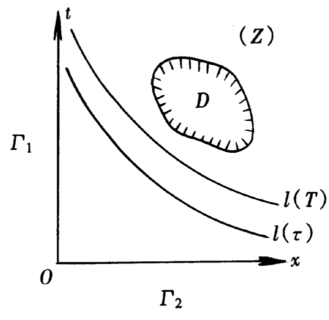

图 1　情形 A

P_1　Dirichlet 外问题

$$\left.\begin{aligned} & u = 0, \quad _+ \text{内} \\ & u| = f \\ & u \quad 0, \quad \text{当}\ x \quad + \quad \text{或}\ t \quad - \end{aligned}\right\} \qquad (1\ 2)$$

P_2　Cauchy 问题

$$\left.\begin{aligned} & u = 0 \quad _- \backslash D \text{ 内} \\ & u| = f, \ \frac{u}{n}\Big| = g \\ & u \quad 0, \quad \text{当}\ x \quad + \quad \text{或}\ t \quad - \end{aligned}\right\} \qquad (1\ 3)$$

问题

其中 n 是垂直于 的外法微商　事实上，定解问题(1 2)是适定的　先解(1 2)，算出 $u(x, t)$ 在 $_+$ 内的值，从而求出 u 在 上的外法微商 $u/ \ n$ 的值；然后解(1 3)，求得 $u(x, t)$ 在 $_- \backslash D$ 内的值，这就是问题(1 1)的数学内容　由此可见，位场解析延拓问题的关键在于解 Cauchy 问题(1 3)　根据著名的 Cauchy_　定理，若 f 及 g 为 上的解析函数，则问题(1 3)在 附近存在唯一的解析解

必须注意，问题(1 1)实质上是表征全平面的解析延拓　假如只考虑在观察线 上给出的位场值而不考虑 $_+$ 内的特性，则确定区域 $_-$ 内的位场值一般不唯一　还要指出，当 f 为非解析函数时，由 Duhen 定理知问题(1 1)在 $_- \backslash D$ 的解是不存在的　即使解一旦存在(比如解析 Cauchy 数据情形)，此时问题在 Hadamard 意义下可能不适定，即解不连续依赖于 Cauchy 数据

下面来讨论问题(1 1)　把上述 Oxt 平面视为复平面 Z，记 $l(\ )$ 为 Z 平面上的双曲线：$xt = \ $，$0< \quad T< + \ $，$x> 0$　特别当 $= 0$ 时，$l(\ )$ 退化为两条半直线 $_1$ 和 $_2$，又记线积分

$$u(x, t) \quad = \left(\int_{l(\ )} |u(x, t)|^2 dl \right)^{1/2}, \qquad 0 \qquad T$$

特别地

$$u(x, t) \quad _0 = \left(\int_{_1 \quad _2} |u(x, t)|^2 dl \right)^{1/2} = (\ f_1 \ _2^2 + \ f_2 \ _2^2)^{1/2}$$

这里 $f_1 \ _2$，$f_2 \ _2$ 表示 $L^2(0, + \ )$ 范数

假设 $f_1(t), f_2(x)$ 均在 $[0, + \ )$ 上解析同时属于 $L^2(0, + \ )$　一般来说，在该假设下问题(1 1)的解没有稳定性，但是如果我们对该问题的解 u 作一个加权模先验有界的假设，即对于任意固定的 $[0, + \ )$，存在与 有关的正常数 $M(\ )$，使得下式成立

$$\sqrt[4]{x^2 + t^2}\, u(x, t) \quad = \left(\int_{l(\ )} | \sqrt[4]{x^2 + t^2}\, u(x, t)|^2 dl \right.$$

则问题(1 1)的解 $u(x,t)$ 对观察数据 $f_1(t), f_2(x)$ 有如下形式的加权 H lder 型连续依赖性估计:

$$\sqrt[4]{x^2+t^2}\,u(x,t) \quad (\ \sqrt{t}\,f_1(t)\ {}_2^2 + \ \sqrt{x}\,f_2(x)\ {}_2^2)^{(1- \ /T)/2}$$

$$\sqrt[4]{x^2+t^2}\,u(x,t)\ {}_T^{\ /T}, \qquad 0< \quad < T \tag{1 5}$$

现在证明估计式(1 5) 作共形映照

$$w = z^2,\ z = x+ it,\ w = x + it$$

它将 Z 平面映为 W 平面, 将 Z 平面中的第一象限映为 W 平面中的上半平面, 将 $l(\ )$ 映为直线 $t = 2\ , 0< \ < T$, $l(T)$ 映为直线 $t = 2T$, $_1$ 映为 $_1$, $_2$ 映为 $_2$, 有界域 D 映为有界域 D , 见图 2

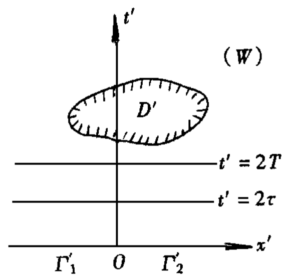

图 2

由于在共形映照下, 调和方程保持类型不变[4], 因此问题(1 1)化为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{^2 v}{x^2} + \frac{^2 v}{t^2} = 0, \qquad (x\ ,t\ ) \quad \mathbf{R}^2 \setminus D \\ &v(x\ ,t\ ) = f^*(x\ ), \qquad t = 0, x \quad \mathbf{R} \\ &v(x\ ,t\ ) \quad 0, \qquad 当\ x \qquad 或\ t \quad - \end{aligned}\right\} \tag{1 6}$$

这里 $v(x\ ,t\ ) = v(w) = u(\sqrt{w}) = u(z), z = \sqrt{w}$ 取主枝,

$$f^*(x\ ) = v(x\ ,t\ )|_{t=0} = \begin{cases} u(x,t)|_{t=0,x\ 0} = f_2(x) \\ u(x,t)|_{x=0,t\ 0} = f_1(t) \end{cases} \tag{1 7}$$

若记

$$v \quad = \left(\int_-^+ |v(x\ ,2\ )|^2 dx \right)^{1/2}, \quad 0 \qquad T \tag{1 8}$$

特别地

$$v\ {}_0 = \left(\int_-^+ |v(x\ ,0)|^2 dx \right)^{1/2} = \ f^*\ {}_{L^2(\mathbf{R})}$$

$$v\ {}_T = \left(\int_-^+ |v(x\ ,2T)|^2 dx \right)^{1/2}$$

且假设对任意固定的 $\ (0,+\ ), v(x\ ,2\ ) \quad L^2(\mathbf{R})$, 则由文献[3] 可知, 对问题(1 6) 有稳定性估计

$$v \qquad f^*\ {}_{L^2(\mathbf{R})}^{1- \ /T} \quad v\ {}_T^{\ /T} \tag{1 9}$$

下面计算几个有关 u 与 v 的范数转换表达式 首先由

$$w = z^2,\ z = x+ it,\ w = x + it$$

可知 $x = x^2 - t^2, t = 2xt$, 于是求微分得

$$2xdx - 2tdt = dx\ ,\ 2tdx + 2xdt = dt$$

在双曲线 $l(\ )$(固定 $\ $) 上, 由于 $dt = d(2\ ) = 0$, 因此 $l(\ )$ 上的弧长微元 dl 写为

$$dl = \sqrt{dx^2 + dt^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+t^2}}dx \tag{1 10}$$

这样可得到几个范数关系式

$$\sqrt[4]{x^2+t^2}\,u(x,t) \quad = \left(\int_{l(\ )} |\sqrt[4]{x^2+t^2}\,u(x,t)|^2 dl \right)^{1/2} \qquad 1$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x^2+t^2}\,|v(x,t)|^2 \frac{1}{2\sqrt{x^2+t^2}}dx\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\|v\| \qquad (1.11)$$

证明

$$\|f^*\|_{L^2(\mathbf{R})} = \left(\int_{-\infty}^{0} |f^*(x)|^2dx + \int_0^{+\infty} |f^*(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_0^{+\infty} |f_1(t)|^2\, 2tdt + \int_0^{+\infty} |f_2(x)|^2\, 2xdx\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}\,\|\sqrt[4]{x^2+t^2}\,u(x,t)\|_0 \qquad (1.12)$$

$$\|v\|_{+T} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |v(x,2T)|^2dx\right)^{1/2} = \left(\int_{l(T)} |u(x,t)|^2\, 2\sqrt{x^2+t^2}\,dl\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}\,\|\sqrt[4]{x^2+t^2}\,u(x,t)\|_T \qquad (1.13)$$

结合(1.11)和(1.9),并注意到(1.12)和(1.13),便得

$$\|\sqrt[4]{x^2+t^2}\,u(x,t)\|_\rho \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|f^*\|_{L^2(\mathbf{R})}^{1-\rho/T}\|v\|_T^{\rho/T}$$

$$= \left(\|\sqrt{t}\,f_1(t)\|_2^2 + \|\sqrt{x}\,f_2(x)\|_2^2\right)^{(1-\rho/T)/2}\|\sqrt[4]{x^2+t^2}\,u(x,t)\|_T^{\rho/T}$$

$$0<\rho<T \qquad (1.14)$$

这就证明了估计式(1.5),以定理的形式归纳本节的讨论结果:

定理 1 假设$f_1(t),f_2(x)$均在$[0,+\infty)$上解析同时又属于$L^2(0,+\infty)$,如果该问题的解$u(x,t)$加权模先验有界,即对于任意固定的$\rho\in[0,+\infty)$,存在与ρ有关的正常数$M(\rho)$,使得(1.4)式成立,那么(1.1)的解$u(x,t)$对观察数据$f_1(t),f_2(x)$有形如(1.5)式的加权Hölder型连续依赖性估计.

注 定理1表明,在$\|\sqrt[4]{x^2+t^2}\,u(x,t)\|_T$有界的条件下,当

$$\|\sqrt[4]{x^2+t^2}\,u(x,t)\|_0 = \left(\|\sqrt{t}\,f_1(t)\|_2^2 + \|\sqrt{x}\,f_2(x)\|_2^2\right)^{1/2} \to 0$$

时,$\|\sqrt[4]{x^2+t^2}\,u(x,t)\|_\rho \to 0$,其Hölder型连续依赖性阶数为$1-\rho/T$.即表明问题(1.1)的解$u(x,t)$沿双曲线$l(\rho)$在第一象限内作延拓时,它对观察数据$f_1(t),f_2(x)$具有加权的Hölder型连续依赖性估计.同时公式(1.5)还表明,当ρ递增(即双曲线$l(\rho)$远离坐标轴)时,该加权的Hölder型连续依赖性估计减弱.

2 位场解析延拓问题解的稳定性估计:情形B

本节讨论位场测量值在U形线上给出时的位场延拓问题(图3),此时的Laplace方程Cauchy问题可叙述为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\qquad (x,t)\in\mathbf{R}^2\setminus D$$

$$u(x,t)=\begin{cases} f_1(t), & \Gamma_1\text{上}\\ f_2(x), & \Gamma_2\text{上}\\ f_3(t), & \Gamma_3\text{上}\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=g_1(x),\qquad \Gamma_2\text{上}$$

$$u(x,t)\to 0,\qquad \text{当}\ x\to\infty\ \text{或}\ t\to-\infty$$

为了方便以后的讨论,我们通过适当的函数变换将该问题化为Pois-

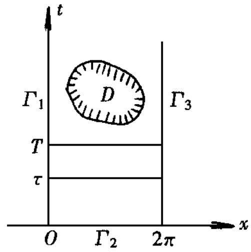

图3 情形B

son 方程 Cauchy 问题

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F(x,t), && (x,t)\in \mathbf{R}^2\setminus D\\
&u(x,t)=\begin{cases} f(x), & \Gamma_2\ 上\\ 0, & \Gamma_1\cup\Gamma_3\ 上\end{cases}\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)=g(x), && \Gamma_2\ 上\\
&u(x,t)\to 0, && 当\ x\to\infty\ 或\ t\to-\infty
\end{aligned}\right\}\tag{211}$$

设 Ω_- 是位于第一象限内由 Γ_1, Γ_2, Γ_3 所围成的区域, $\Omega_+=\mathbf{R}^2\setminus\Omega_-$, 这里 D 是在 Ω_- 内的有界区域。 于是问题(211) 的解析延拓可叙述为: 已知位场 $u(x,t)$ 在 Ω_+ 内和 Γ_1, Γ_2, Γ_3 上的值, 求 u 在 Ω_- 内的值。 现在我们来求解问题(211)。

假设 $u(x,t)$, $F(x,t)$, $f(x)$, $g(x)$ 均关于 x 属于 $L^2[0,2\pi]$ ($L^2[0,2\pi]$ 表示以 2π 为周期的平方可积函数空间), 令

$$\left.\begin{aligned}
&u(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}u_n(t)e^{inx}, && -\infty<x<+\infty,\ 0<t<T\\
&F(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}F_n(t)e^{inx}, && -\infty<x<+\infty,\ 0<t<+\infty\\
&f(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}f_n e^{inx}, && 0<x<2\pi\\
&g(x)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}g_n e^{inx}, && 0<x<2\pi
\end{aligned}\right\}\tag{212}$$

其中 $u_n(t)$, $F_n(t)$, f_n, g_n 分别为 $u(x,t)$, $F(x,t)$ (关于 x), $f(x)$, $g(x)$ 的 Fourier 系数:

$$\left.\begin{aligned}
&u_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}u(x,t)e^{-inx}dx, && t>0\\
&F_n(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}F(x,t)e^{-inx}dx, && t>0\\
&f_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}f(x)e^{-inx}dx\\
&g_n=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi}g(x)e^{-inx}dx
\end{aligned}\right\}\tag{213}$$

在公式(212) 中, 级数是按 $L^2[0,2\pi]$ 范数在 $L^2[0,2\pi]$ 中收敛的。 (212) 式代入(211) 式得到关于 $u_n(t)$ $(n\in\mathbf{Z})$ 的一个二阶非齐次常微分方程

$$\left.\begin{aligned}
&u_n''(t)-n^2u_n(t)=F_n(t), && t>0\\
&u_n(0)=f_n,\ u_n'(0)=g_n
\end{aligned}\right\}\tag{214}$$

求 Laplace 变换, (214) 式变为

$$p^2L[u_n](p)-pf_n-g_n-n^2L[u_n](p)=L[F_n](p)$$

$$\Rightarrow\quad L[u_n](p)=L[F_n](p)\frac{1}{p^2-n^2}+\frac{p}{p^2-n^2}f_n+\frac{1}{p^2-n^2}g_n$$

再对上式求 Laplace 逆变换, 注意到 Laplace 变换的卷积性质和变换公式立得

$$
u_n(t)=\begin{cases}\int_0^t F_n(v)\,\dfrac{1}{n}\operatorname{sh} n(t-v)\,dv+f_n\operatorname{ch} nt+\dfrac{g_n}{n}\operatorname{sh} nt, & n\neq 0\\ \int_0^t F_0(v)(t-v)\,dv+f_0+g_0 t, & n=0\end{cases}\tag{215}
$$

于是问题(211)的解 $u(x,t)$ 可形式地写成

$$
u(x,t)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} u_n(t)e^{inx}\tag{216}
$$

其中 $u_n(t)$ 由式(215)表示。设

$$
\|u\|_S=\left(\int_0^{2\pi}|u(x,S)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\leq M(S),\qquad M(S)\text{ 为有界正常数}
$$

对任意固定的 $S\in[0,+\infty)$ 成立,则有下面的 Parseval 恒等式[8]

$$
\|u\|_S^2=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}|u_n(S)|^2\tag{217}
$$

注意到(217)式右端的级数,对于固定的 $S\in(0,+\infty)$,当 $n\to\infty$ 时,$n^{-1}\operatorname{sh} nS$, $\operatorname{ch} nS\to+\infty$,即 $|u_n(S)|^2$ 可能不趋于零,级数(217)可能不收敛,这说明问题(211)解的不稳定性。因此转而讨论解的条件稳定性,即由 Tikhonov 定理可知,当我们对解在某种拓扑意义下作一先验有界的假设时可得到解的稳定性,但一般来说得不到其稳定性阶数。如果把某 Sobolev 空间中的有界集作为解的容许集 $U=\{u(x,t): u$ 在某种拓扑意义下关于 t 一致先验有界$\}$,就能得到这个稳定性阶数。于是需要构造容许集 U。对任意固定的自然数 N,将级数拆写为

$$
\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}|u_n(S)|^2=\sum_{n=-N}^{n=+N}|u_n(S)|^2+\sum_{n}{}'|u_n(S)|^2\tag{218}
$$

这里求和号 $\sum_n{}'$ 表示 $\sum_{n=-\infty}^{-N-1}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}$。运用不等式 $(a+b+c)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)$ 可知

$$
|u_n(S)|^2\leq 3\left[\int_0^S|F_n(v)|^2\left|\frac{1}{n}\operatorname{sh} n(S-v)\right|^2dv+|f_n|^2|\operatorname{ch} nS|^2+\frac{|g_n|^2}{n^2}|\operatorname{sh} nS|^2\right],\quad n\neq 0
$$

$$
|u_0(S)|^2\leq 3\left[\int_0^S|F_0(v)|^2|S-v|^2dv+|f_0|^2+|g_0|^2|S|^2\right],\quad n=0
$$

注意到 $-N\leq n\leq N$, $0<S<T$ 时,$\operatorname{ch} nS<e^{NT}$, $n^{-1}\operatorname{sh} nS<e^{NT}$, $S<e^{NT}$, $n\neq 0$,所以当 $-N\leq n\leq N$, $0<S<T$ 时,

$$
|u_n(S)|^2\leq 3e^{2NS}\left[\int_0^S|F_n(v)|^2dv+|f_n|^2+|g_n|^2\right]
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-N}^{n=N}|u_n(S)|^2&\leq 3e^{2NS}\left[\int_0^S\sum_{n=-N}^{n=N}|F_n(v)|^2dv+\sum_{n=-N}^{n=N}|f_n|^2+\sum_{n=-N}^{n=N}|g_n|^2\right]\\
&\leq 3e^{2NS}\left[\int_0^S\int_0^{2\pi}|F(x,v)|^2dx\,dv+\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}|f_n|^2+\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}|g_n|^2\right]
\end{aligned}
$$

这里用了不等式

$$
\sum_{n=-N}^{n=N}|F_n(v)|^2\leq\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}|F_n(v)|^2=\int_0^{2\pi}|F(x,v)|^2dx
$$

记 $\|F\|_S^2=\int_0^S\int_0^{2\pi}|F(x,v)|^2dx\,dv$

由 Parseval 等式

$$\|f\|^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|f_n|^2,\quad \|g\|^2=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|g_n|^2$$

可知下述不等式对任意自然数 N 成立

$$\sum_{n=-N}^{N}|u_n(\tau)|^2\le 3e^{2N\tau}\left(\|F\|_\tau^2+\|f\|^2+\|g\|^2\right)\tag{2.9}$$

再考虑求和 $\sum_n |u_n(\tau)|^2$，构造容许集 $U_{M,\alpha}$：对固定 $\alpha>0$ 和任意的 $M>0$，定义

$$U_{M,\alpha}=\left\{u(x,t)\in C^2(\mathbf{R}^2\setminus D)\cap L^2(\mathbf{R}^2\setminus D):\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|u_n(t)|^2(n^2\pi^2)^\alpha\le M^2\right\}$$

则当 $u(x,t)\in U_{M,\alpha}$ 时，下式对任意自然数 N 成立

$$\sum_n|u_n(\tau)|^2=\sum_n\frac{|u_n(\tau)|^2(n^2\pi^2)^\alpha}{(n^2\pi^2)^\alpha}\le\frac{M^2}{((N+1)^2\pi^2)^\alpha}<\frac{M^2}{((N^2+1)\pi^2)^\alpha}\tag{2.10}$$

现记 $\delta^2=\|F\|_\tau^2+\|f\|^2+\|g\|^2$，则(2.9)式写为

$$\sum_{n=-N}^{N}|u_n(\tau)|^2\le 3e^{2N\tau}\delta^2\tag{2.11}$$

上式对任意的自然数 N 和任意的 τ: $0\le\tau\le T$ 成立。因此由(2.8)、(2.10)和(2.11)可知，对任意自然数 N 和任意的 τ: $0\le\tau\le T$ 有

$$\|u\|_\tau^2\le\frac{M^2}{[(N^2+1)\pi^2]^\alpha}+3e^{2N\tau}\delta^2\tag{2.12}$$

对任意的 β: $0<\beta\le\alpha$，固定自然数 N，使得

$$\frac{1}{\pi}M^{1/\alpha}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\beta/\alpha}\le N<1+\frac{1}{\pi}M^{1/\alpha}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\beta/\alpha}$$

即

$$\frac{M}{[(N^2+1)\pi^2]^{\alpha/2}}\le\frac{1}{(\log(1/\delta))^\beta}\tag{2.13}$$

且

$$\delta e^{N\tau}\le\delta\exp\left[\tau\left[1+\frac{1}{\pi}M^{1/\alpha}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\beta/\alpha}\right]\right]\le\delta e^{\tau}\exp\left[k\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\beta/\alpha}\right],\quad k=\frac{\tau}{\pi}M^{1/\alpha}$$

因为对任意的 β: $0<\beta<\alpha$，由 L. Hospital 法则下式成立

$$\lim_{\delta\to0^+}\delta\exp\left[k\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^{\beta/\alpha}\right]\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^\beta=0$$

所以

$$\delta e^{N\tau}=O\left(\left(\frac{1}{\log(1/\delta)}\right)^\beta\right),\quad 0<\beta<\alpha\tag{2.14}$$

从而由(2.12)~(2.14)可得

$$\|u\|_\tau=O\left(\left(\frac{1}{\log(1/\delta)}\right)^\beta\right),\quad 0<\beta<\alpha\tag{2.15}$$

而当 $M<(\pi/T)^\alpha$ 时，$k<1$，此时取 $\beta=\alpha$ 有

$$\lim_{\delta\to0^+}\delta\exp\left[k\log\frac{1}{\delta}\right]\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^\alpha=\lim_{\delta\to0^+}\delta^{1-k}\left(\log\frac{1}{\delta}\right)^\alpha=0,\quad\beta=\alpha$$

$$\therefore\quad\delta e^{N\tau}=O\left(\left(\frac{1}{\log(1/\delta)}\right)^\alpha\right)\tag{2.16}$$

综合(2.12)、(2.13)和(2.16)可得

$$\|u\|_\tau=O\left(\left(\frac{1}{\log(1/\delta)}\right)^\alpha\right),\quad\beta=\alpha\tag{2.17}$$

综合上述讨论, 我们得到本节的结论:

定理 2 假设 $F(x, t), f(x), g(x)$ 均关于 x 属于 $L^2[0, 2P]$ 且分别在 $\mathbf{R}^2 \setminus D, [0, 2P], [0, 2P]$ 上解析, 记

$$G^2 = +F+^2_S + +f+^2 + +g+^2, \quad +u+S = \left(Q_0^{2P} \mid u(x, S) \mid^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

若 $u(x, t)\ I\ U_{M,A}$(固定 $A > 0$ 和任意的 $M > 0$), 问题(211) 的解 $u(x, t)$ 对任意的自然数 N 和任意的 S: $0 [S [T$ 满足估计式(2112); 特别当 G y 0 时, 解满足(2115) 式; 如果 $M < (P/T)^A$, 则可取 $B = A$, 解满足估计式(2117)#

k 31 评 注 与 问 题

从本文的讨论, 我们看到:

1) 第 1 节利用共形映照和栾文贵的位场解析延拓问题解的稳定性算法, 得到了情形 A 下的平面位场解析延拓的H lder 型连续依赖性估计, 从而为确定场源位置提供了理论依据, 为场源位置的计算提供了理论基础# 例如可试图用 Tikhonov 的正则化方法和适应正则化方法讨论场源位置的数值计算# 但是该方法难以直接推广到三维或更高维空间的位场解析延拓问题中去, 因而必须构思更有效的数学理论和方法#

2) 第 2 节利用 Tikhonov 的解不适定问题的方法讨论情形 B 下的二维 Laplace 方程 Cauchy 问题解的条件稳定性, 构造了解的一个容许集, 借助于 Yamamoto 的估计技巧得到了情形 B 下的位场解析延拓的对数型连续依赖性估计# 同时该方法可直接推广到三维或更高维空间的位场延拓问题中去, 相同的稳定性估计可类似得到# 对测量数据在局部区域上给出的任意维空间中的位场解析延拓问题, 其稳定性可用类似方法获得#

3) 在定理 2 中, 若对 F, f, g 在比 L^2 更强的拓扑下考虑问题(211), 其解可能更好地连续依赖于 F, f 和 g, 如依 Lipschitz 型稳定性或依H lder 型稳定性, 该问题将在后面的文章中讨论#

参 考 文 献

1 L. Nirenberg, Uniqueness in Cauchy problems for differential equations with constant leading coefficients, Comm. Pure Appl. Math., **10**(1) (1957), 89) 115.

2 栾文贵著, 5地球物理中的反问题6, 科学出版社 (1989), 32) 65.

3 栾文贵, 位场、波场和电磁场的延拓, 中国科学(A 辑), (9) (1985), 824) 839.

4 李明忠、候宗义、徐振远著, 5椭圆型方程组理论和边值问题6, 复旦大学出版社 (1990), 228) 231.

5 程晋、徐定华, 关于一类微分方程反问题的若干讨论, 宁夏大学学报(自然科学版), **17**(1) (1996), 74) 75.

6 A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, Solutions of Ill_Posed Problems, V. H. Winston and Sons (1977), 27) 32.

7 M. Yamamoto, Conditional stability in determination of force terms of heat equations in a rectangle, Math. Comput. Modelling, **18**(1) (1993), 79) 88.

8 河田龙夫著, 5Fourier 分析6, 周民强译, 高等教育出版社 (1982), 108) 112.

(P. O. Box 267, East China Geological Institute, Fuzhou, Jiangxi 344000, P. R. China)

Cheng Jin

(Department of Mathematics, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China)

Li Mingzhong

(Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract

This paper discusses the stability of solutions to a class of Cauchy problems for Laplace equations under two kinds of nonclassical circumstances. By means of conformal mapping and Tikhonov, Luan Wengui and Yamamoto. s methods for solving ill_posed problems respectively, the stability estimations of weighted H lder type and logarithmic type, have been obtained accordingly.

Key words Cauchy problems for Laplace equations, analytic continuation of potential field, ill_posed problems, stability estimation