

复合材料大层数层压矩形截面杆的 扭转问题分析

张 剑 李思简

(蒋咏秋推荐, 1995 年 10 月 23 日收到, 1997 年 9 月 1 日收到修改稿)

摘 要

本文根据有效弹性模量理论^[1], 采用三维八节点等参数有限元和整体-局部方法, 对复合材料大层数矩形厚截面层压杆的扭转问题及其自由边缘效应进行了分析研究, 通过算例计算给出了剪切应力在横截面内的分布规律、杆的扭转变形及其在自由边缘区域层间应力的分布情况。由于本文的分析方法可根据需要仅在应力梯度较大的局部区域, 按单层逐层划分单元或在单层内再细化单元, 以求得单层内精确的应力场和位移场, 因此能显著节约计算量与机时, 为具有大层数层压杆的扭转强度计算提供了一种有效的方法。

关键词 有效弹性模量 三维八节点等参数单元 子层 整体-局部法 自由边缘效应
矩形厚截面层压杆 扭转

中图分类号 O34

1 引 言

现代工程结构中出现了承受高载荷、高压、抗爆等具有厚截面的复合材料层压构件, 由于它们具有内在的三维和非均质特性, 现有的二维层压结构各级近似理论已经不再适用, 因此建立以三维特性为基础的厚层压构件理论是复合材力学领域的新课题。

如图 1 所示的复合材料厚层压板往往具有数十甚至数百个铺层, 各层的铺设角不同或材料不同, 用有限元法进行应力分析时, 离散单元需逐层进行或逐层积分^[4], 显然计算量是巨大的, 由于计算机容量和速度的局限性, 在层压构件边缘处的网格不可能划分得过密, 故其计算精度受到很大影响, 不能很好地模拟出自由边缘处的应力分布特性。但是实际应用中的厚层压构件, 常常需要某种周期性变化的铺设次序以满足特定的设计

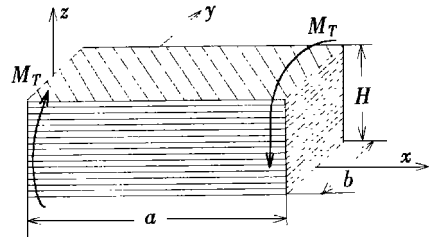


图 1

设计要求。我们把一个周期内的铺层称作子层, 当层压构件的整体厚度与一个子层的厚度相比为很大时, 则每个子层的不均质性就可以忽略不计。由此提出了有效弹性模量理论, 即把一个

由 M (大数) 个重复子层组成的厚层压构件宏观上看作是一个均匀的各向异性体, 此时应用有限元法离散三维单元时, 每个单元沿层压构件厚度方向可包含多层而不必逐层积分, 这样针对具体问题, 把层压构件沿厚度方向分为两种区域——整体区域和局部区域。需要密切关注的部位划为局部区域, 该区域内使用单层的原始弹性常数, 直接得到单层的精确应力场、应变场和位移场, 从而也得到自由边缘区域的层间应力场; 而整体区域内则使用有效弹性常数, 由此得到整体区域内有效应力场、有效应变场和有效位移场, 如果需要则可根据有效弹性模量理论求任意一层的局部单层的平均应力场、应变场和位移场。

本文对正交各向异性复合材料厚层压矩形截面杆扭转问题进行了分析, 给出了其变形情况及应力分布规律。并与已有的解析解作了分析比较, 得出满意的结果。

2 有效弹性模量理论简介

考虑一个由大量重复子层构成的厚层压板, 每一个子层内包含 N 个具有不同铺设方向的正交各向异性纤维复合材料单层板, 如图 1 所示。在子层内, 宏观上有效(平均)应力与应变分别按以下两式计算

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV \quad (2.1)$$

和

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{ij} dV \quad (2.2)$$

式中 V 是子层的体积。由于子层的厚度与整个层板的厚度相比很小, 因此可以假设应力和应变在每一子层内沿厚度方向为均匀分布的, 即它们沿子层厚度方向为常数。(2.1)式与(2.2)式经过积分后成为

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sum_{k=1}^N V_k \sigma_{ij}^{(k)} \quad (2.3)$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \sum_{k=1}^N V_k \epsilon_{ij}^{(k)} \quad (2.4)$$

这里, $\sigma_{ij}^{(k)}$ 和 $\epsilon_{ij}^{(k)}$ 分别表示第 k 单层的应力与应变, V_k 称为第 k 单层的体积比, 即:

$$V_k = \frac{t_k}{h} \quad (2.5)$$

上式中, t_k 为第 k 单层的厚度, h 为子层的厚度。第 k 单层的应力与应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^{(k)} \\ \sigma_{yy}^{(k)} \\ \sigma_{zz}^{(k)} \\ \sigma_{yz}^{(k)} \\ \sigma_{xz}^{(k)} \\ \sigma_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & C_{13}^{(k)} & 0 & 0 & C_{16}^{(k)} \\ C_{12}^{(k)} & C_{22}^{(k)} & C_{23}^{(k)} & 0 & 0 & C_{26}^{(k)} \\ C_{13}^{(k)} & C_{23}^{(k)} & C_{33}^{(k)} & 0 & 0 & C_{36}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(k)} & C_{45}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45}^{(k)} & C_{55}^{(k)} & 0 \\ C_{16}^{(k)} & C_{26}^{(k)} & C_{36}^{(k)} & 0 & 0 & C_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^{(k)} \\ \epsilon_{yy}^{(k)} \\ \epsilon_{zz}^{(k)} \\ \epsilon_{yz}^{(k)} \\ \epsilon_{xz}^{(k)} \\ \epsilon_{xy}^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

有效应力与有效应变之间满足下式

$$\begin{Bmatrix} xx \\ yy \\ zz \\ yz \\ xz \\ xy \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} xx \\ yy \\ zz \\ yz \\ xz \\ xy \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

式中, [C] 称为有效弹性常数矩阵

考虑各层交界处应力和位移的连续性, 作如下假设:

$$\begin{Bmatrix} (k) \\ zz \\ (k) \\ yz \\ (k) \\ xz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} zz \\ yz \\ xz \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} (k) \\ xx \\ (k) \\ yy \\ (k) \\ xy \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} xx \\ yy \\ xy \end{Bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.8)$$

由于对称性, 有效弹性常数矩阵假设为下列形式

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

从方程(2.3)式至(2.9)式中可以求得各有效弹性常数 C_{ij} 的表达式如下

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= \sum_{k=1}^N V_k C_{11}^{(k)} + \sum_{k=2}^N (C_{13}^{(k)} - C_{13}) V_k (C_{13}^{(1)} - C_{13}^{(k)}) / C_{33}^{(k)} \\ C_{66} &= \sum_{k=1}^N V_k C_{66}^{(k)} + \sum_{k=2}^N (C_{36}^{(k)} - C_{36}) V_k (C_{36}^{(1)} - C_{36}^{(k)}) / C_{33}^{(k)} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

上式中 N 为子层内的铺层数, C_{ij}^k 为第 k 单层的弹性常数矩阵元素 (2.10) 式详见参考文献 [1]

3 分析模型与有限元计算格式

(1) 整体—局部模型

沿层合矩形截面杆 z 方向划为整体区域和局部区域 考虑到最大的剪应力可能发生在截面的长边或短边的中点附近, 故把截面的上下边缘处及中面处附近的数个铺层划为局部区域, 其余铺层化为整体区域 分析模型如图 2 所示

(2) 有限元分析基本公式

对于单对称各向异性复合材料层压板, 采用三维八节点等参数单元进行离散, 单元刚度矩阵及单元几何方程分别为:

$$[K^e] = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left([B]^T [C] [B] + J \right) H_i H_j H_k \quad (3.1)$$

$$\left\{ \vec{e} \right\} = [B] \left\{ \vec{e} \right\} \quad (3.2)$$

以上两式中, \bar{e} , \bar{e} 分别称为单元节点的有效应变和有效位移, H 为权函数 $[B]$, $|J|$ 分别为几何矩阵和 Jacobi 行列式由单元节点的平衡条件导出单元的刚度方程为:

$$[K^e]\{\bar{e}\} = \{P^e\} \quad (3.3)$$

集合所有单元的刚度方程, 形成结构总体刚度方程式:

$$[K]\{\bar{e}\} = \{P\} \quad (3.4)$$

把(2.8)式代入(2.6)式解得

$$\begin{Bmatrix} (k) \\ xx \\ (k) \\ yy \\ (k) \\ xy \end{Bmatrix} = ([A] - [D][E]^{-1}[D]^T) \begin{Bmatrix} xx \\ yy \\ xy \end{Bmatrix} + [D][E]^{-1} \begin{Bmatrix} zz \\ yz \\ xz \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

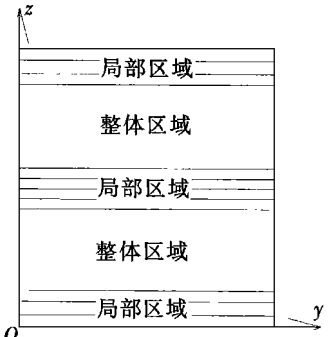


图 2

上式中

$$[A] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & C_{16}^{(k)} \\ C_{12}^{(k)} & C_{22}^{(k)} & C_{26}^{(k)} \\ C_{16}^{(k)} & C_{26}^{(k)} & C_{66}^{(k)} \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} C_{13}^{(k)} & 0 & 0 \\ C_{23}^{(k)} & 0 & 0 \\ C_{36}^{(k)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, [E] = \begin{bmatrix} C_{33}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & C_{44}^{(k)} & C_{45}^{(k)} \\ 0 & C_{45}^{(k)} & C_{55}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

根据(3.1)式至(3.4)式, 首先在整体区域内可求出各有效应力分量, 如果需要, 利用(3.5)式至(3.6)式与(2.8)式亦可得到第 k 单层的平均应力场; 而在局部区域内则可求得单层内精确的应力分布和自由边缘区域的层间应力场

4 算 例

例 1 该例是为了验证本文计算机程序 考虑一正交各向异性材料矩形截面杆纯扭转的情况 为了比较视其为 $[0/0]_{80T}$ 的层压杆 原始数据:

- $b = H = 20\text{mm}, a = 4H = 80\text{mm}$
- $M_T = 0.2\text{kN}\cdot\text{m}, E_1 = 132000\text{MPa}$
- $E_2 = E_3 = 10300\text{MPa}, \nu_{12} = \nu_{13} = 0.25$
- $\nu_{23} = 0.38, G_{12} = 7220\text{MPa}$
- $G_{13} = G_{23} = 6500\text{MPa}$

计算结果见图 3 图中所有数据的单位均为 MPa, 括号内的数据为最大剪应力 τ_{\max} 的解析解(见参考文献[5]), 其余数据为本文解, 最大误差为 5.8%

例 2 $[90/0]_{80T}$ 与 $[45/-45]_{80T}$ 两种正交各向异性材料矩形截面层压杆的纯扭转 $h = 0.125\text{mm}, G_{12} = G_{13} = 6500\text{MPa}, G_{23} = 3910\text{MPa}$, 其余数据同例 1, 图 5(a) 与图 5(b) 分别给出该两种层压杆在 $x = 40\text{mm}$ 处断面上的扭转剪应力分布规律 图中括号内的数字为全部采用整体区域解, 其余数字为采用整体区域结合局部区域解 (其中 4 个子层处于局部区域内, 76 个子层处于整体区域内)

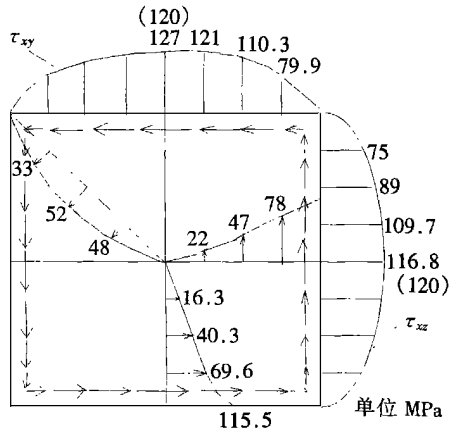


图 3 扭转时横截面上剪应力的分布规律

图中括号内的数字为全部采用整体区域解, 其余数字为采用整体区域结合局部区域解 (其中 4 个子层处于局部区域内, 76 个子层处于整体区域内)

图 4 为 $[45/-45]_{80T}$ 矩形截面层压杆扭转变形后把变形量放大约 20 倍左右的示意图

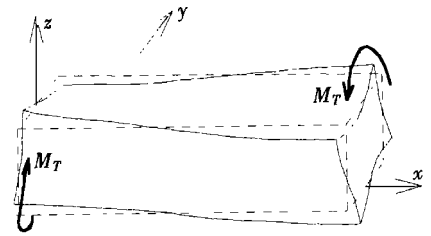


图 4

图 6(a) 至图 7(c) 分别给出上述两种层压杆在 $x = 40\text{mm}$ 断面上 $z/h = 1$ 和 $z/h = 80$ 层间处各应力分量沿着 y 方向的变化曲线及该断面上 $y = 10\text{mm}$ 自由边缘处各层界面间的应力分量沿着 z 方向的变化曲线 (均为整体区域结合局部区域解) 从图中可以看出, 层间正应力 σ_{zz} 和层间剪应力 τ_{yz} 的值很小, 而层间剪应力 τ_{xz} 的值很大, 尤其是在 $z/h = 80$ 的层间处的自由边缘上, 层间剪应力 τ_{xz} 的值达到最大

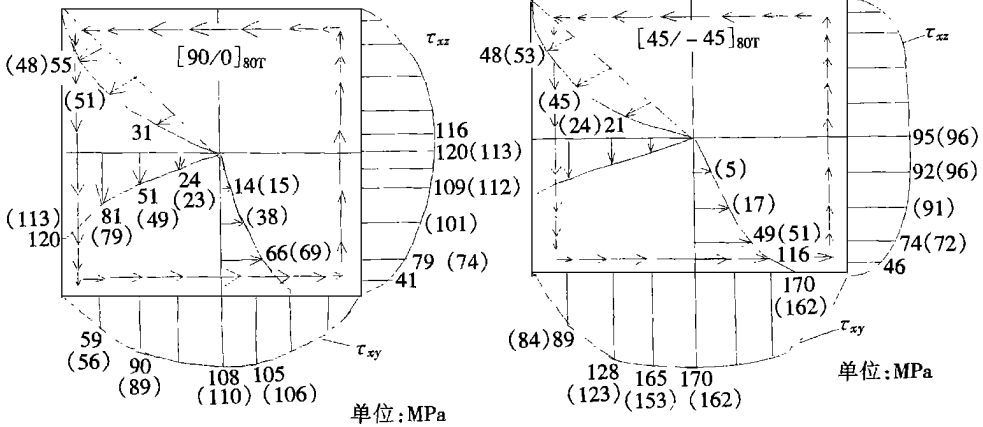


图 5(a) 剪应力在横截面上的分布规律

图 5(b) 剪应力在横截面上的分布规律

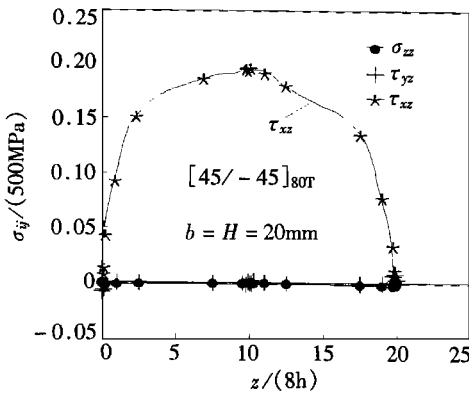


图 6(a) $x = 40\text{mm}, y = 10\text{mm}$ 处层间应力分量沿着 z 方向的变化曲线

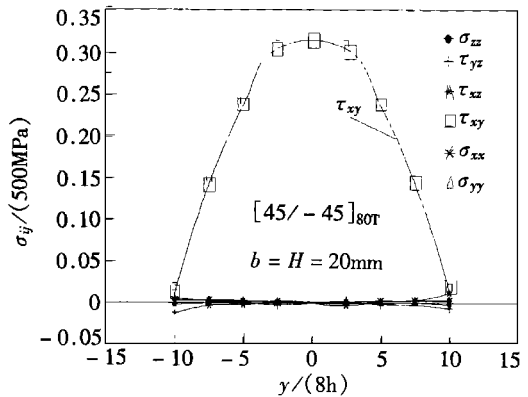


图 6(b) $x = 40\text{mm}, z/h = 1$ 层间处各应力分量沿 y 方向的变化曲线

另外我们分别从图 6(b) 和图 7(a) 中可以看到, 横断面上 $z/h = 1$ 的层界处 τ_{xy} 的最大值发生在沿 y 方向的中点处

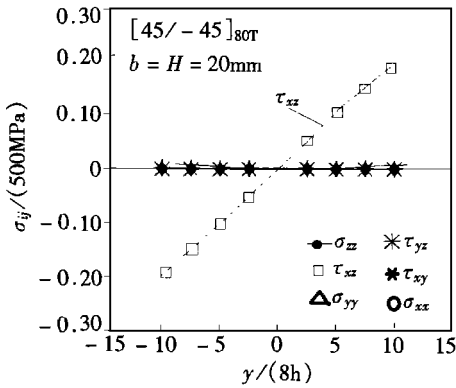


图 6(c) $x = 40\text{mm}$, $z/h = 80$ 层间处各应力分量沿 y 方向的变化曲线

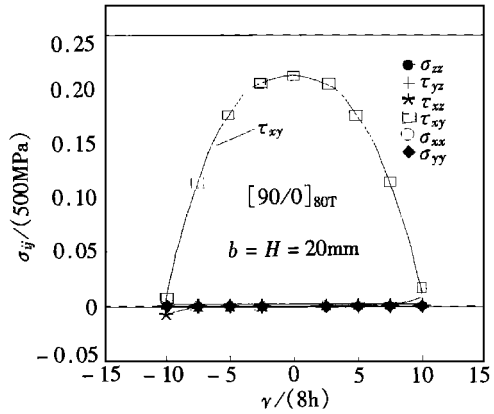


图 7(a) $x = 40\text{mm}$, $z/h = 1$ 层间处各应力分量沿 y 方向的变化曲线

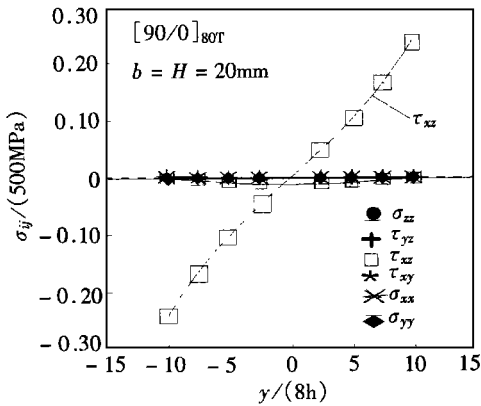


图 7(b) $x = 40\text{mm}$, $z/h = 80$ 层间处各应力分量沿 y 方向的变化曲线

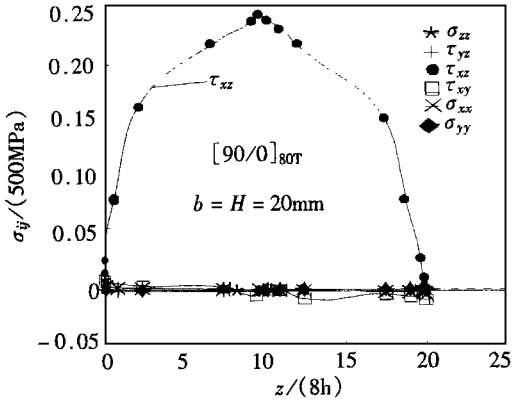


图 7(c) $x = 40\text{mm}$, $y = 10\text{mm}$ 处各层界面间的各应力分量沿 z 方向的变化曲线

5 计算结果分析与讨论

(1) 由于 $[90/0]_{80T}$ 与 $[45/-45]_{80T}$ 两种层压矩形截面杆扭转时, 在自由边缘处产生很大的层间剪应力 τ_{xz} , 它的存在意味着层压杆在自由边缘附近可能产生分层, 因此在设计这类构件时, 只要有扭转变形存在, 应该引起重视

(2) 本文方法适用任意截面形状(layered)的层压杆的扭转; 由于该方法能显著节约计算量与机时, 所以, 它为具有大层数层压杆的扭转强度计算提供了一种有效的方法

(3) 本文方法适用于厚层压板的拉伸、压缩、弯曲等问题的应力分析。该方法的计算精度及其有效性在文献[3]中以厚层压板的拉伸为例已作证明。本文例2中的计算结果未与精确解相比较, 因为至今作者未发现该问题的精确解; 作者曾试图用传统的有限元法(即每个单元内仅包含一个单层)进行计算, 希望由此获得较精确的数值解进行比较, 但最终由于计算机的内存和速度的局限性而未能成功。所以本文计算结果仅供参考

参 考 文 献

- 1 C. T. Sun and Li Sijian, Three_dimensional effective elastic constants for thick laminates, J. Composite Materials, **22** (1988), 629-639.
- 2 J. F. Ely and O. C. Zienkiewicz, Torsion of compound bars—a relaxation solution, Int. J. Mech. Sci., **1** (1960), 356-365.
- 3 C. T. Sun and W. C. Liao, Analysis of thick section composite laminates using effective moduli, J. Composite Materials, **24** (1990), 977-993.
- 4 Chang Fukuo, Jose Luis Perez and Cheng Kuoyen, Analysis of thick laminated composites, J. Composite Materials, **24** (1990), 801-822.
- 5 罗祖道、李思简, 各向异性材料力学, 上海交通大学出版社 (1994), 66-69.

Torsion of Composite Laminated Bars with a Large Number of Layers

Zhang Jian Li Sijian

(Department of Engineering Mechanics, Shanghai Jiaotong University,
Shanghai 200030, P. R. China)

Abstract

In view of the effective elastic moduli theory^[1], analyzing the thick composite laminated bars subjected to an externally applied torque are presented by three_dimensional finite element(3_D FEM) and global_local method in this paper. Numerical results involving the distribution of shearing stresses on cross section and the torsional deformation and the interlaminar stresses near to free edges are given. If necessary elements discretization may be densely carried out only in the high stress gradient region. Obviously, it requires less computer memory and computational time so that it offers an effective way for evaluating strength of laminated bars torsion with a great number of layers.

Key words effective elastic moduli, three_dimensional element, sublaminar, global_local method, free_edge effect, composite laminated bar, torsion