应用数学和力学, 第 19 卷 第 5 期(1998 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

空心球复合材料热弹性性质的一些精确结果

何陵辉① 成振强① 刘人怀②

(1995 年 9 月 18 日收到)

摘 要

本文基于所提出的基体均匀场方法研究了空心球增强复合材料的热弹性性质。 导出了均匀边界条件激发的局部热场和力学场量的关系, 并进而得到了复合材料等效热弹性性质之间的精确关系。 对于具有某种特定内外径比的空心球所构成的宏观各向同性复合材料, 如果基体和空心球的热膨胀系数相同, 可以证明其等效体积模量和线膨胀系可以精确地确定。

关键词 复合材料 空心球 热弹性性质
中图分类号 O343

§ 1. 引 言

作为一类广泛使用的低密度材料, 由空心球分布于基体材料所构成的复合材料引起了人们越来越多的兴趣。 关于这种复合材料等效弹性模量预测方面的工作可见于 Lee 和 Westmann[1], Qiu 和 Weng[2], Huang 和 Gibson[3] 以及 Chercauoi 等[4] 的文章。 Huang 和 Gibson[3] 还对此类复合材料的力学行为进行过实验研究。 本文是这些工作的沿续, 并侧重于研究空心球复合材料热弹性性质之间的精确关系。

关于非均匀材料等效性质之间精确关系的研究起始于 Hill[5] 的开创性工作。 其熟知的结果是: 对于宏观上呈现横观各向同性的两相纤维复合材料, 在其五个等效弹性模量的三个之间存在着两组精确关系。 在热弹性问题方面, Levin[6] 利用虚功原理导出了由两任意形状各向性相构成的两相复合材料等效刚度和热应力张量之间的精确对应关系。 受这些经典工作的启发, 一些后来的研究者在许多更为复杂的非均匀系统中, 包括多晶聚集体和压电复合材料等, 也得到了一系列精确结果[7~14]。 这里我们要特别提及 Dvorak[8, 9] 关于均匀场方面的漂亮工作。 他的文章以某种均匀热学和力学边界条件引起的在整个复合材料体积内为均匀的应变或应力场为基础, 给出了一些十分有力的结果。 许多已有的结果, 包括 Hill[5] 和 Levin[6] 的工作, 都可以通过 Dvorak 的一般性处理得到。 然而, 均匀场概念并不能直接用于含曲线各向异性相或多连通相的复合材料, 如本文所考虑的情况, 这是因为此时均匀场并不存在。

① 中国科学技术大学, 合肥 230026
② 暨南大学, 广州 510632

本文提出了一种新的方法用于研究空心球复合材料热弹性性质之间的联系• 其基本思想是在某种均匀温度和力学边界条件下建立复合材料基体中的均匀场• 事实上, 这是 Dvorak[8, 9] 均匀场概念的一个推广• 按照这一方法, 导出了均匀外载和温度变化引起的局部热弹性场的一些精确关系, 进而得到了复合材料等效热弹性性质之间的精确关系• 对于具有某种特定内外径比的空心球所构成的宏观各向同性复合材料, 如果基体和空心球的线膨胀系数相等, 可以证明其等效体积模量和线膨胀系数可以精确地确定• 尽管本文假定各相材料性质与温度变化无关, 但若材料性质是温度的函数本文结果作为瞬态性质的关系仍然成立•

§2. 本 构 律

考虑一由各向同性基体, 第一相, 和大量各向同性空心球, 第二相, 完善粘结所构成的复合材料• 空心球可以具有不同的尺寸, 但其外半径与内半径之比保持不变• 各相的热弹性本构律给定为:

$$\sigma_s(\boldsymbol{x}) = \mathbf{L}_s \varepsilon_s(\boldsymbol{x}) + \mathbf{l}_s T(\boldsymbol{x}) \tag{2.1}$$

其中, $s = 1, 2$ 表示相序号, $\boldsymbol{x}$ 表示一固定的笛卡尔坐标系(x_1, x_2, x_3), T 是温度变化, 而 $\sigma_s(\boldsymbol{x})$, $\varepsilon_s(\boldsymbol{x})$, $\mathbf{L}_s$ 和 $\mathbf{l}_s$ 分别表示应力, 应变, 刚度和热应力张量, 它们满足通常的对称关系• 在以下叙述中, 这些张量可表示为分量形式, 即 $\sigma_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{x})$, $\varepsilon_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{x})$, $L_{ijkl}^{(s)}$ 和 $l_{ij}^{(s)}$, 或按以下约定表示为矩阵形式: 按下列规则以 p 和 q 代替 ij 或 kl :

ij 或 kl:	11	22	33	23 或 32	31 或 13	12 或 21
p 或 q:	1	2	3	4	5	6

并记

$$\sigma_p^{(s)}(\boldsymbol{x}) = \sigma_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{x}),\ \varepsilon_p^{(s)}(\boldsymbol{x}) = \varepsilon_{ij}^{(s)}(\boldsymbol{x}),\ l_p^{(s)} = l_{ij}^{(s)} \qquad (p = 1-6;\ i, j = 1-3)$$
$$L_{pq}^{(s)} = L_{ijkl}^{(s)} \qquad (p, q = 1-6;\ i, j = 1-3) \tag{2.2}$$

因此, $\sigma_s(\boldsymbol{x})$, $\varepsilon_s(\boldsymbol{x})$, $\mathbf{L}_s$ 和 $\mathbf{l}_s$ 可分别表示为(6×1), (6×1), (6×6), (6×1)矩阵, 并且特别地, $\mathbf{L}_s$ 和 $\mathbf{l}_s$ 可写成

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} K_s + \frac{4}{3}G_s & K_s - \frac{2}{3}G_s & K_s - \frac{2}{3}G_s & 0 & 0 & 0 \\ K_s - \frac{2}{3}G_s & K_s + \frac{4}{3}G_s & K_s - \frac{2}{3}G_s & 0 & 0 & 0 \\ K_s - \frac{2}{3}G_s & K_s - \frac{2}{3}G_s & K_s + \frac{4}{3}G_s & 0_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_s \end{bmatrix},\ \mathbf{l}_s = -\begin{Bmatrix} 3K_s\alpha_s \\ 3K_s\alpha_s \\ 3K_s\alpha_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$u_i(\boldsymbol{x})$, V, S 和 $n_i(\boldsymbol{x})$ 分别为位移, 复合材料的体积和外表面, 以及 S 上的单位外法线矢量• 为了确定 L 和 l, 使复合材料在其外表面 S 上承受如下均匀边界条件:

$$u_i(S) = \varepsilon_{ij}^0 x_j, \quad T(S) = T^0 \tag{2.6}$$

其中, ε_{ij}^0 为常应变分量, T^0 为常温度变化• 在稳态条件下, 容易证明

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0, \quad T(\boldsymbol{x}) = T^0 \tag{2.7}$$

因此, 如求得 σ 并以 ε^0 和 T^0 表示, 则复合材料等效性质(**L** 和 **l**) 可以精确地求得• 然而这是不可能的• 但在下面的章节中我们可导出 **L** 和 **l** 之间的一些精确关系•

§ 3. 基体均匀场的存在性

现令上述复合材料承受如下边界条件:

$$u_i(S) = \varepsilon^0 \delta_{ij} x_j, \quad T(S) = T^0 \tag{3.1}$$

其中, δ_{ij} 为 Kronecker 记号• 本节的目的是研究在何种条件下基体中的应变场是均匀的• 为此, 我们可以假定基体中的均匀应变场确实存在• 于是, 稳态条件下第一相中的应力和应变场可以表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1(\boldsymbol{x}) = \varepsilon^0 \mathbf{j}, \quad \boldsymbol{\sigma}_1(\boldsymbol{x}) = 3K_1(\varepsilon^0 - \alpha_1 T^0)\mathbf{j} \tag{3.2}$$

其中, $\mathbf{j}$ 为一(6× 1) 列阵其转置 $\mathbf{j}^T$ 为

$$\mathbf{j} = [1, 1, 1, 0, 0, 0] \tag{3.3}$$

在(3.2) 的条件下任一空心球中的变形是球对称的• 为了确定一外半径为 b 内关径为 a 的典型空心球中的应变场, 引入通常的球坐标系(r, θ, φ)• 这里 r 是距球中心的径向距离, 而 θ 和 φ 分别为 x_1 和 x_2 轴以及 x_1_x_2 平面和 x_3 轴之间的夹角• 因此, 球中唯一的非零位移分量为 $u_r^{(2)} = u_r^{(2)}(r)$, 这由方程

$$\frac{d^2 u_r^{(2)}}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du_r^{(2)}}{dr} - \frac{2}{r^2}u_r^{(2)} = 0 \tag{3.4}$$

和以下界面条件决定:

$$r = b \text{ 时:} \quad u_r^{(2)} = b\varepsilon^0, \ \sigma_r^{(2)} = \sigma_r^{(1)} \tag{3.5}$$

$$r = a \text{ 时:} \quad \sigma_r^{(2)} = 0 \tag{3.6}$$

利用通常的方法, 可得(3.4) 的通解为

$$u_r^{(2)} = c_1 r + \frac{c_2}{r^2} \tag{3.7}$$

其中, c_1 和 c_2 为待定常数• 借助于式(2.1), (3.2), (3.5), (3.7)及无穷小应变的定义, 我们有

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \frac{3K_1 + 4G_2}{3K_2 + 4G_2}\varepsilon^0 + \frac{3(K_2\alpha_2 - K_1\alpha_1)}{3K_2 + 4G_2}T^0 \\ c_2 &= \frac{3(K_2 - K_1)b^3}{3K_2 + 4G_2}\varepsilon^0 - \frac{3(K_2\alpha_2 - K_1\alpha_1)b^3}{3K_2 + 4G_2}T^0 \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

因此, 将式(3.8) 代入(3.6) 可得一附加等式

$$\begin{aligned} &[(3K_2 + 4\lambda G_2)K_1 + 4(1 - \lambda)K_2 G_2]\varepsilon^0 \\ &\quad = [(3K_2 + 4\lambda G_2)K_1\alpha_1 + 4(1 - \lambda)K_2 G_2\alpha_2]T^0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

其中, $\lambda = b^3/a^3$• 要提到的是对于任意空心球 λ 保持不变•

式(3.9)正是所要求的复合材料基体中均匀应变场的存在条件• 该条件仅依赖于两组分相的材料性质及空心球外半径与内半径的比值• 由于 $\lambda > 0$, 可见式(3.9)中 ε^0 的系数当且仅当 $K_1 < K_2$ 和 $\lambda = \lambda^0$ 时为零, 这里

$$\lambda^0 = \frac{K_2(3K_1 + 4G_2)}{4G_2(K_2 - K_1)} \tag{3.10}$$

因此, 如 $K_1 \geqslant K_2$ 或 $\lambda \neq \lambda^0$, 式(3.9)可写成

$$\varepsilon^0 = \xi T^0 \tag{3.11}$$

其中

$$\xi = \frac{(3K_2 + 4\lambda G_2)K_1\alpha_1 + 4(1-\lambda)K_2G_2\alpha_2}{(3K_2 + 4\lambda G_2)K_1 + 4(1-\lambda)K_2G_2} \tag{3.12}$$

此时基体中的应变场可表示为

$$\varepsilon_1(\boldsymbol{x}) = \xi T^0\mathbf{j} \tag{3.13}$$

而空心球中应变场在(r, θ, φ)系中为

$$\varepsilon_2(r, \theta, \varphi) = T^0\mathbf{f}(r) \tag{3.14}$$

其中, $\mathbf{f}(r)$为(1×6)矩阵 $\mathbf{f}^T(r)$的转置, 这里

$$\mathbf{f}^T(r) = [f_1(r), f_2(r), f_2(r), 0, 0, 0] \tag{3.15}$$

而

$$\left.\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{(3K_1 + 4G_1)\xi + 3(K_2\alpha_2 - K_1\alpha_1)}{3K_2 + 4G_2} - \frac{6(K_2 - K_1)\xi - 6(K_2\alpha_2 - K_1\alpha_1)}{3K_2 + 4G_2}\left(\frac{b}{r}\right)^3 \\ f_2(r) &= \frac{(3K_1 + 4G_1)\xi + 3(K_2\alpha_2 - K_1\alpha_1)}{3K_2 + 4G_2} + \frac{3(K_2 - K_1)\xi - 3(K_2\alpha_2 - K_1\alpha_1)}{3K_2 + 4G_2}\left(\frac{b}{r}\right)^3 \end{aligned}\right\} \tag{3.16}$$

若转换至(x_1, x_2, x_3)系中, 式(3.14)可写成

$$\varepsilon_2(\boldsymbol{x}) = T^0\mathbf{R}(\theta, \varphi)\mathbf{f}(r) \tag{3.17}$$

其中, $\mathbf{R}(\theta, \varphi)$为$(6\times 6)$转换矩阵:

$$R(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} i_1^2 & j_1^2 & k_1^2 & 2j_1k_1 & 2i_1k_1 & 2i_1j_1 \\ i_2^2 & j_2^2 & k_2^2 & 2j_2k_2 & 2i_2k_2 & 2i_2j_2 \\ i_3^2 & j_3^2 & k_3^2 & 2j_3k_3 & 2i_3k_3 & 2i_3j_3 \\ i_2i_3 & j_2j_3 & k_2k_3 & j_2k_3 + j_3k_2 & i_2k_3 + i_3k_2 & i_2j_3 + i_3j_2 \\ i_1i_3 & j_1j_3 & k_1k_3 & j_1k_3 + j_1k_1 & i_1k_3 + i_3k_1 & i_1j_3 + i_3j_1 \\ i_1i_2 & j_1j_2 & k_1k_1 & j_1k_2 + j_2k_1 & i_1k_2 + i_2k_1 & i_1j_2 + i_2j_1 \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

而

$$\left.\begin{aligned} &i_1 = \cos\theta\cos\varphi, \quad i_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad i_3 = \sin\varphi \\ &j_1 = -\sin\theta, \quad j_2 = \cos\theta, \quad j_3 = 0 \\ &k_1 = -\cos\theta\sin\varphi, \quad k_2 = -\sin\theta\sin\varphi, \quad k_3 = \cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

然而, 如 $K_1 < K_2$ 且 $\lambda = \lambda^0$, 则基体均匀场的存在性要求式(3.9)的右端为零• 这仅当 $\alpha_1 = \alpha_2$ 或 $T^0 = 0$ 时可能• 因为在 $T^0 = 0$ 时无论 $\alpha_1 = \alpha_2$ 是否成立式(3.9)的条件都被满足, 而在 $\alpha_1 = \alpha_2$ 时 T^0的值可以任意给定, 所以, 对于该两种情况基体中的应变场都可以统一地表示成式(3.13)的形式, 而空心球中的应变场可表示成

$$\varepsilon_2(r,\ \theta,\ \varphi) = \varepsilon^0\mathbf{p}(r) + T^0\mathbf{q}(r) \tag{3.20}$$

这里, $\mathbf{p}(r)$ 和 $\mathbf{q}(r)$ 为(6×1)矩阵, 其转置为

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p}^T(r) &= [p_1(r),\ p_2(r),\ p_2(r),\ 0,\ 0,\ 0] \\ \mathbf{q}^T(r) &= [q_1(r),\ q_2(r),\ q_2(r),\ 0,\ 0,\ 0] \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} p_1(r) &= \frac{3K_1+4G_2}{3K_2+4G_2} - \frac{6(K_2-K_1)}{3K_2+4G_2}\left(\frac{b}{r}\right)^3 \\ p_2(r) &= \frac{3K_1+4G_2}{3K_2+4G_2} + \frac{3(K_2-K_1)}{3K_2+4G_2}\left(\frac{b}{r}\right)^3 \end{aligned}\right.$$

而

$$\left.\begin{aligned} q_1(r) &= \frac{3(K_2-K_1)\alpha_1}{3K_2+4G_2} + \frac{6(K_2-K_1)\alpha_1}{3K_2+4G_2}\left(\frac{b}{r}\right)^3 \\ q_2(r) &= \frac{3(K_2-K_1)\alpha_1}{3K_2+4G_2} - \frac{3(K_2-K_1)\alpha_1}{3K_2+4G_2}\left(\frac{b}{r}\right)^3 \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

将式(3.20)变换到$(x_1,\ x_2,\ x_3)$系中可得

$$\varepsilon_2(\boldsymbol{x}) = \varepsilon^0\mathbf{R}(\theta,\ \varphi)\mathbf{p}(r) + T^0\mathbf{R}(\theta,\ \varphi)\mathbf{q}(r) \tag{3.23}$$

§4. 影响函数间的关系

在稳态条件及式(2.6)中指定的均匀边界条件作用下, 整个复合材料内部的温度场是均匀的, 而应变场一般是不均匀的• 借助于应变和温度影响函数, 即 $\mathbf{A}_s(\boldsymbol{x})$ 和 $\mathbf{a}_s(\boldsymbol{x})$, 局部应变场可形式地表示为

$$\varepsilon_s(\boldsymbol{x}) = \mathbf{A}_s(\boldsymbol{x})\varepsilon^0 + \mathbf{a}_s(\boldsymbol{x})T^0 \tag{4.1}$$

其中, $\mathbf{A}_s(\boldsymbol{x})$ 和 $\mathbf{a}_s(\boldsymbol{x})$ 分别为四阶和二阶张量, 它们满足 $A^{(s)}_{ijkl}(\boldsymbol{x}) = A^{(s)}_{jikl}(\boldsymbol{x}) = A^{(s)}_{ijlk}(\boldsymbol{x})$ 和 $a^{(s)}_{ij}(\boldsymbol{x}) = a^{(s)}_{ji}(\boldsymbol{x})$, 并可以被分别表示为$(6\times 6)$和$(6\times 1)$矩阵• 我们将证明知道 $\mathbf{A}_s(\boldsymbol{x})$ 则 $\mathbf{a}_s(\boldsymbol{x})$ 被唯一地决定•

为此, 令

$$\varepsilon^0 = \varepsilon^0\mathbf{j} \tag{4.2}$$

如 $K_1 \geqslant K_2$ 或 $\lambda \neq \lambda^0$, 将式(4.2)代入(4.1)并利用(3.11), (3.13)和(3.17)得

$$\left.\begin{aligned} T^0[\xi\mathbf{A}_1(\boldsymbol{x})\mathbf{j} + \mathbf{a}_1(\boldsymbol{x})] &= T^0\xi\mathbf{j} \\ T^0[\xi\mathbf{A}_2(\boldsymbol{x})\mathbf{j} + \mathbf{a}_2(\boldsymbol{x})] &= T^0\mathbf{R}(\theta,\ \varphi)\mathbf{f}(r) \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

因为 T^0可任意给定, 由式(4.3)立即可知

$$\left.\begin{aligned} \xi\mathbf{A}_1(\boldsymbol{x})\mathbf{j} + \mathbf{a}_1(\boldsymbol{x}) &= \xi\mathbf{j} \\ \xi\mathbf{A}_2(\boldsymbol{x})\mathbf{j} + \mathbf{a}_2(\boldsymbol{x}) &= \mathbf{R}(\theta,\ \varphi)\mathbf{f}(r) \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

如 $K_1 < K_2$, $\lambda = \lambda^0$ 且 $\alpha_1 = \alpha_2$, 将式(4.2)代入(4.1)并利用(3.13)和(3.20)给出

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^0\mathbf{A}_1(\boldsymbol{x})j + T^0\mathbf{a}_1(\boldsymbol{x})] &= \varepsilon^0\mathbf{j} \\ \varepsilon^0\mathbf{A}_2(\boldsymbol{x})\mathbf{j} + T^0\mathbf{a}_2(\boldsymbol{x})] &= \varepsilon^0\mathbf{R}(\theta,\ \varphi)\mathbf{p}(r) + T^0\mathbf{R}(\theta,\ \varphi)\mathbf{q}(r) \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

由 ε^0 和 T^0 的相互独立性, 我们有

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A}_1(\boldsymbol{x}) = \mathbf{I}, \quad \mathbf{a}_1(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \\ &\mathbf{A}_2(\boldsymbol{x})\mathbf{j} = \mathbf{R}(\theta,\ \varphi)\mathbf{p}(\varnothing s), \quad \mathbf{a}_2(\boldsymbol{x}) = \mathbf{R}(\theta,\ \varphi)\mathbf{q}(r) \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

其中, **I** 和 **0** 分别表示(6×6)单位矩阵和(6×1)零矩阵• 需要再次指出的是, 如果 $\alpha_1 \neq \alpha_2$, 式(4.6)中关于 $\mathbf{a}_s(\boldsymbol{x})$ 的诸等式必须移去•

式(4.4)和(4.6)反映了一些情况下 $\mathbf{A}_s(\boldsymbol{x})$ 和 $\mathbf{a}_s(\boldsymbol{x})$ 间的内在联系• 在这些关系以及条件(3.9)的指导中并没有假设复合材料是统计均匀的, 因此, 式(4.4)和(4.6)即使对于宏观上非均匀的复合材料也是成立的•

§5. 等效热弹性性质间的关系

当复合材料在宏观层次上为统计均匀时, 其等效刚度和热应力张量, 即 **L** 和 **l**, 由式(2.4)和(2.5)确定• 利用前面章节得到的结果, 我们可以证明 **L** 和 **l** 之间由一些简单关系相联系•

为书写方便, 记 $\sigma_s(\boldsymbol{x})$, $\varepsilon_s(\boldsymbol{x})$, $\mathbf{A}_s(\boldsymbol{x})$ 和 $\mathbf{a}_s(\boldsymbol{x})$ 在 s 相中的体积平均分别为 σ_s, ε_s, $\mathbf{A}_s$ 和 $\mathbf{a}_s$• 利用 Gauss 公式可知等效应力 σ 可表示为

$$\sigma = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda - 1} f\right) \sigma_1 + f \sigma_2 \tag{5.1}$$

其中, $f\,(< 1 - 1/\lambda)$ 表示第二相的体积分数(不包括内部空洞)• 因此, 在边界条件(2.6)下将式(2.1)和(2.4)代入(5.1), 并利用(2.7)和(4.1)可得:

$$\left[\mathbf{L} - \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda - 1} f\right) \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1 - f \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2\right] \varepsilon^0 + \left[\mathbf{l} - \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda - 1} f\right) (\mathbf{L}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{l}_1) + f (\mathbf{L}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{l}_2)\right] T^0 = 0 \tag{5.2}$$

考虑到 ε^0 和 T^0 的相互独立性, 由式(5.2)可知

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{L} &= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda - 1} f\right) \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1 + f \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2, \\ \mathbf{l} &= \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda - 1} f\right) (\mathbf{L}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{l}_1) + f (\mathbf{L}_2 \mathbf{a}_2 + \mathbf{l}_2) \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

如 $K_1 \geqslant K_2$ 或 $\lambda \neq \lambda^0$, 由式(4.4)和(5.3)消去 $\mathbf{A}_s(\boldsymbol{x})$ 和 $\mathbf{a}_s(\boldsymbol{x})$ 便得 **L** 和 **l** 间的精确对应关系:

$$\xi \mathbf{L} \mathbf{j} + \mathbf{l} = \xi \mathbf{L}_1 \mathbf{j} + \mathbf{l}_1 \tag{5.4}$$

当空心球壁非常簿时, 或换言之在 $\lambda \to 1$ 的极限情形, 复合材料可被视为多孔材料• 此时复合材料的等效膨胀系数 α 可由式(5.4)给出:

$$\alpha = \alpha_1 \tag{5.5}$$

这一结果在 Hashin[15] 早期的文章中被提及• 在空心球壁非常厚的另一极端情形, 即 $\lambda \to \infty$ 时, 如复合材料是宏观各向同性的, 则式(5.4)变成熟知的 Levin[6] 关系:

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{\dfrac{1}{K_2} - \dfrac{1}{K_1}} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_1}\right) \tag{5.6}$$

如 $K_1 < K_2$, $\lambda = \lambda^0$ 且 $\alpha_1 = \alpha_2$, 将式(4.6)代入(5.3)并进行积分, 我们有如下关于 **L** 和 **l** 的简单结果:

$$\mathbf{L}\mathbf{j} = \mathbf{L}_1 \mathbf{j}, \quad \mathbf{l} = \mathbf{l}_1 \tag{5.7}$$

特别地, 当复合材料统计各向同性时, 其等效体积模量和热膨胀系数可由式(5.7)精确地确定:

$$K = K_1, \quad \alpha = \alpha_1 \tag{5.8}$$

事实上, 式(5.4) 和(5.7) 也可以通过以下更为直接的考虑导出• 令复合材料承受式(3.1) 的边界条件, 同时强加式(3.9) 的限制• 此时基体中的应变场及应力场是均匀的• 利用 Gauss 定理可知 $\sigma_2 = \lambda/(\lambda - 1)\sigma_1$• 故由(5.1)可得 $\sigma = \sigma_1$• 这一结果连同式(2.1), (2.4) 和(2.7) 给出

$$\varepsilon^0 \mathbf{L}\mathbf{j} + T^0 \mathbf{l} = \varepsilon^0 \mathbf{L}_1 \mathbf{j} + T^0 \mathbf{l}_1 \tag{5.9}$$

于是, 若 $K_1 \geqslant K_2$ 或 $\lambda \neq \lambda^0$, 将式(3.11) 代入(5.9) 便得关系式(5.4); 若 $K_1 < K_2$, $\lambda = \lambda^0$ 且 $\alpha_1 = \alpha_2$, 由 ε^0 和 T^0 的相互独立性可见此时式(5.9) 等价于(5.7)•

由式(5.4) 易见, 复合材料等效热弹性性质之间的关系式中通常包含了组分相的性质• 然而, 这里可以证明对于某些宏观上呈现较低对称性的复合材料, 存在一些并不包含组分相性质的类似关系• 作为例子我们考虑宏观上具有正交对称性的复合材料, 即

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & 0 & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & 0 & 0 & 0 \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{5.10}$$

将式(5.10) 代入(5.4), 我们有

$$\begin{aligned} \xi(L_{11} + L_{12} + L_{13}) + l_1 &= \xi(L_{12} + L_{22} + L_{23}) + l_2 \\ &= \xi(L_{13} + L_{23} + L_{33}) + l_3 \end{aligned} \tag{5.11}$$

从式(5.11) 消去 ξ 可得:

$$\frac{L_{11} + L_{13} - L_{22} - L_{23}}{l_1 - l_2} = \frac{L_{11} + L_{12} - L_{23} - L_{33}}{l_1 - l_3} \tag{5.12}$$

按照类似步骤还可以导出宏观上呈现单斜对称性和三斜对称性的复合材料的类似关系• 结果为: 对于具有单斜对称性的复合材料

$$\frac{L_{11} + L_{13} - L_{22} - L_{23}}{l_1 - l_2} = \frac{L_{12} + L_{22} - L_{13} - L_{23}}{l_2 - l_3} = \frac{L_{16} + L_{26} + L_{36}}{l_6} \tag{5.13}$$

对于具有三斜对称性的复合材料

$$\begin{aligned} \frac{L_{11} + L_{13} - L_{22} - L_{23}}{l_1 - l_2} &= \frac{L_{11} + L_{12} - L_{23} - L_{33}}{l_1 - l_3} = \frac{L_{14} + L_{24} + L_{34}}{l_4} \\ &= \frac{L_{15} + L_{25} + L_{35}}{l_5} = \frac{L_{16} + L_{26} + L_{36}}{l_6} \end{aligned} \tag{5.14}$$

§6. 结 束 语

本文在某种均匀温度和力学边界条件下建立了空心球增强复合材料的基体均匀场• 在此基础上得到了复合材料局部热弹性场之间以及等效热弹性性质之间的一些精确关系• 这些结果为空心球复合材料的近似细观力学模型的比较与验证提供了严格的基础•

参 考 文 献

1 K. J. Lee and R. A. Westmann, Elastic properties of hollow_sphere_reinforced composites, J. Compo. Mater., **4** (1970), 242.

2 Y. P. Qiu and G. J. Weng, Elastic moduli of thickly coated particle and fiber_reinforced composites, J. Appl. Mech., **58** (1991), 388.

3 J. S. Huang and L. J. Gibson, Elastic moduli of a composite of hollow spheres in a matrix, J. Mech. Phys. Solids, **41** (1993), 55.

4 M. Cherkaoui, H. Sabar and M. Berveiller, Micromechanical approach of the coated inclusion problem and applications to composite materials, J. Engn. Mater. Techn., **116** (1994), 274.

5 R. Hiu, Theory of mechanical properties of fiber_strengthened materials_Ⅰ. Elastic behaviour, J. Mech. Phys. Solids, **12** (1964), 199.

6 V. M. Levin, Thermal expansion of heterogeneous materials, Mekh. Tverdoga Tela, **2** (1967), 88.

7 B. W. Rosen and Z. Hashin, Effective thermal expansion coefficients and specific heats of composite materials, Int. J. Engng Sci., **8** (1970), 157.

8 G. J. Dvorak, Thermal expansion of elastic_plastic composite material, J. Appl. Mech., **53** (1986), 737.

9 G. J. Dvorak, On uniform fields in heterogeneous media, Proc. R. Soc. Lond., A**431** (1990), 89.

10 K. Schulgasser, Environmentally_induced expansion of heterogeneous media, J. Appl. Mech., **56** (1989), 546.

11 G. J. Dvorak and T. Chen, Thermal expansion of three_phase composite materials, J. Appl. Mech., **56** (1989), 416.

12 Y. Benveniste, Exact results in the micromechanics of fibrous piezoelectric composites exhibiting pyroelectricity, Proc. R. Soc. Lond., A**441** (1993), 59.

13 Y. Benveniste, Exact connections between polycrystal and crystal properties in two_dimensional polycrystalline aggregates, Proc. R. Soc. Lond., A**447** (1994), 1.

14 T. Chen, Piezoelectric properties of multiphase fierous composites: some theoretical resuts, J. Mech. Phys. Solids, **41** (1993), 1781.

15 Z. Hashin, Analysis of composite materials_a survey, J. Appl. Mech., **50** (1983), 481.

Some Exact Results Concerning Thermoelastic Properties of Hollow Sphere Composites

He Linghui Cheng Zhenqiang

(University of Science and Technology of Chian, Hefei 230026, P. R. China)

Liu Renhuai

(Jinan University, Guangzhou 510632, P. R. China)

Abstract

Thermoelastic properties of hollow sphere composites are studied, based on the uniform matrix_field concept proposed here. Some connections between local thermal and mechanical fields produced by certain homogeneous boundary conditions are derived, and furthermore, exact relations are also obtained between the effective thermoelastic properties of the composites. For a macroscopically isotropic composite with a certain ratio of the outer radius to the inner radius, it is found that the effective bulk modulus and the linear coefficient of thermal expansion can be exactly determined, if the thermal expansion coefficient of the matrix and that of the sphere are the same.

Key words composites, hollow spheres, thermoelstic properties