

两种材料角区尖端裂纹异性分析

钱 俊^① 长谷部宣男^②

(钱伟长推荐, 1996 年 6 月 26 日收到, 1997 年 5 月 16 日收到修改稿)

摘 要

本文分析两种材料角区尖端产生的裂纹现象。设裂纹位于两种材料角区的分角线上, 利用问题的几何和材料对称性, 可将原问题分解为对称和反对称两种状态。通过特征展开法, 分别导出两种状态下裂纹的特征方程, 进而计算出不同材料比值和角区张角下的特征值序列, 其中最小正特征值可用来反映裂纹的奇异性程度, 最后推导出裂纹尖端附近位移应力表达式。

关键词 双材料 奇异性 位移应力场

中图分类号 O346

§ 1. 前 言

工程实际中存在着各种形式的材料连接问题, 诸如焊接压力容器, 钢筋混凝土构件, 灌浆软弱地基以及固体火箭推进器等。研究材料与材料之间接合部的奇异性问题, 不仅对于安全设计, 而且对于工程施工都具有一定的理论和实际指导意义。Dempsey 和 Sinclair^[6] 曾研究 N 种材料组成的角区问题, 并证明角区尖端奇异性依赖于各角区材料常数比值和各材料形成的角区角度。对于两种材料组成的角区问题, Bogy 和 Wang^[1] 曾经得出角区尖端的应力场分布及其奇异性程度变化规律。最近 Chen 和 Nisitani^[3] 将两种材料形成的角区分成对称与反对称两种情形, 从而导出其尖端应力场。

由于两种材料形成的角区尖端存在着一定程度的奇异性, 在该区域附近有可能引起断裂现象, 进而导致裂纹的扩展。因此研究两种材料角区尖端产生的裂纹问题, 具有一定的理论和应用价值。由于裂纹的出现, 两种材料接合尖端奇异性发生转变, 应力应变场也随之发生重分布现象。为研究上的方便, 本文先考虑较简单情形, 即假定裂纹位于两种材料组成的角区分界线上, 从而使得原问题可以被分解为对称与反对称两种情形, 进而得出两种情形下的特征方程, 最后推导出相应的特征函数亦即裂纹尖端附近的应力位移场。

§ 2. 问题的提出

如图 1 所示, 两种材料组成的平面角域, 其张角分别为 2α 和 $2\pi - 2\alpha$ 。在角区尖端有一

① 南京理工大学, 南京 210000

② 名古屋工业大学, 日本国

裂纹, 位于张角为 $2\pi - 2\alpha$ 的角区分角线上 ($0 \leq \alpha \leq \pi$)。

问题的位移和应力分量可用复势函数 ϕ 和 ψ_j 表示如下^[8]:

$$U_j = u_{jr} + iu_{j\theta} = (2G_j)^{-1} e^{-i\theta} (\kappa_j \phi_j(z) - z \dot{\phi}_j'(z) - \psi_j(z)) \quad (2.1a)$$

$$T_{jr} = \sigma_{rr} + i\sigma_{r\theta} = \dot{\phi}_j'(z) + \ddot{\phi}_j''(z) - z \dot{\phi}_j''(z) - z z^{-1} \dot{\psi}_j'(z) \quad (2.1b)$$

$$T_{j\theta} = \sigma_{\theta\theta} - i\sigma_{r\theta} = \dot{\phi}_j'(z) + \dot{\phi}_j'(z) + z \dot{\phi}_j''(z) + z z^{-1} \dot{\psi}_j'(z) \quad (2.1c)$$

这里, $j = 1, 2$ 和 3 分别代表图 1 中的区域 I, II 和 III。 $z = r e^{i\theta}$; 对于平面应变情形, $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$; 对于平面应力情形, $\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j)$, 其中 ν_j 和 G_j 分别代表第 j 区域的材料泊松比和剪切模量, $\mu_1 = \mu_2, G_1 = G_2$ 。

设裂纹表面无外力作用, 两种材料交界面完全粘接, 则原问题的边界和连续条件可分别表示如下:

$$T_{10}(\theta = \pi) = 0 \quad (2.2a)$$

$$T_{20}(\theta = -\pi) = 0 \quad (2.2b)$$

$$T_{10}(\theta = \alpha) = T_{30}(\theta = \alpha) \quad (2.2c)$$

$$U_1(\theta = \alpha) = U_3(\theta = \alpha) \quad (2.2d)$$

$$T_{20}(\theta = -\alpha) = T_{30}(\theta = -\alpha) \quad (2.2e)$$

$$U_2(\theta = -\alpha) = U_3(\theta = -\alpha) \quad (2.2f)$$

利用问题的几何对称时, 可将原问题分解为状态 I 和 II, 分别代表对称和反对称状态。

对于状态 I, 可用下列对称条件代替方程 (2.2b)、(2.2e) 和 (2.2f)

$$\sigma_{3r\theta}(\theta = 0) = 0, \quad u_{30}(\theta = 0) = 0 \quad (2.3a, b)$$

对于状态 II, 可用下列反对称条件代替方程 (2.2b)、(2.2e) 和 (2.2f):

$$\sigma_{300}(\theta = 0) = 0, \quad u_{3r}(\theta = 0) = 0 \quad (2.4a, b)$$

§ 3. 特征方程

为了反映裂纹尖端奇异性, 可设方程 (2.1) 中的复势函数为如下形式:

$$\phi(z) = A_j z^\lambda + a_j z^\lambda \quad (3.1a)$$

$$\psi_j(z) = B_j z^\lambda + b_j z^\lambda \quad (3.1b)$$

其中, A_j, a_j, B_j, b_j 和 λ 为待定参数。

先考虑状态 I, 将 (3.1) 代入 (2.1), 于是自由面力条件 (2.2a), 连续条件 (2.2c) 和 (2.2d) 以及对称条件 (2.3a) 和 (2.3b) 可分别表示成如下形式:

$$A_1 e^{2\pi i \lambda} + \overline{a_1} \lambda + \overline{b_1} = 0 \quad (3.2a)$$

$$a_1 e^{2\pi \lambda} + \overline{A_1} \lambda + \overline{B_1} = 0 \quad (3.2b)$$

$$A_1 e^{2i\alpha\lambda} + \overline{a_1} \lambda e^{2i\alpha} + \overline{b_1} = A_3 e^{2i\alpha\lambda} + \overline{a_3} \lambda e^{2i\alpha} + \overline{b_3} \quad (3.2c)$$

$$a_1 e^{2i\alpha\lambda} + \overline{A_1} \lambda e^{2i\alpha} + \overline{B_1} = a_3 e^{2i\alpha\lambda} + \overline{A_3} \lambda e^{2i\alpha} + \overline{B_3} \quad (3.2d)$$

$$\kappa_1 A_1 e^{2i\alpha\lambda} - \overline{a_1} \lambda e^{2i\alpha} - \overline{b_1} = G_{13} (\kappa_3 A_3 e^{2i\alpha\lambda} - \overline{a_3} \lambda e^{2i\alpha} - \overline{b_3}) \quad (3.2e)$$

$$\kappa_1 a_1 e^{2i\alpha\lambda} - \overline{A_1} \lambda e^{2i\alpha} - \overline{B_1} = G_{13} (\kappa_3 a_3 e^{2i\alpha\lambda} - \overline{A_3} \lambda e^{2i\alpha} - \overline{B_3}) \quad (3.2f)$$

$$A_3 (1 - \lambda) - a_3 (1 - \lambda) + \overline{b_3} - B_3 = 0 \quad (3.2g)$$

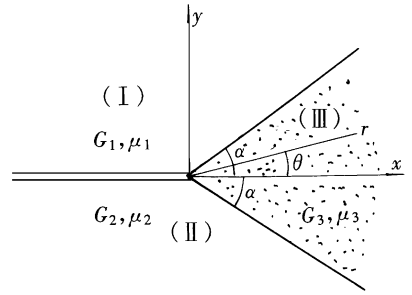


图 1 两种材料角区尖端裂纹问题

$$A_3(\kappa_3 + \lambda) - \overline{a_3}(\kappa_3 + \lambda) - \overline{b_3} + B_3 = 0 \quad (3.2h)$$

其中, $G_{13} = G_1/G_3$ 。

由(3.2h)和(3.2g)可得:

$$\overline{a_3} = A_3 \quad (3.3a)$$

$$\overline{b_3} = B_3 \quad (3.3b)$$

将(3.2c)和(3.2d)代入(3.2e)和(3.2f)可得:

$$A_1 = k_{11}A_3 + k_{12}\overline{a_3} + k_{13}\overline{b_3} \quad (3.4a)$$

$$\overline{a_1} = k_{21}\overline{a_3} + k_{22}A_3 + k_{23}B_3 \quad (3.4b)$$

其中

$$k_{11} = \frac{1 + G_{13}\kappa_3}{1 + \kappa_1}, k_{12} = \frac{1 - G_{13}}{1 + \kappa_1} \lambda e^{2i\alpha(1-\lambda)}, k_{13} = \frac{1 - G_{13}}{1 + \kappa_1} e^{-2i\alpha\lambda}$$

$$k_{21} = k_{11}, k_{22} = \frac{1 - G_{13}}{1 + \kappa_1} \lambda e^{-2i\alpha(1-\lambda)}, k_{23} = \frac{1 - G_{13}}{1 + \kappa_1} e^{2i\alpha\lambda}$$

将(3.2a)和(3.2b)代入(3.2c)和(3.2d)得

$$A_1(e^{2i\alpha\lambda} - e^{2i\pi\lambda}) + \overline{a_1}\lambda(e^{2i\alpha} - 1) = A_3e^{2i\alpha\lambda} + \overline{a_3}\lambda e^{2i\alpha} + \overline{b_3} \quad (3.5a)$$

$$\overline{a_1}(e^{-2i\alpha\lambda} - e^{-2i\pi\lambda}) + A_1\lambda(e^{-2i\alpha} - 1) = \overline{a_3}e^{-2i\alpha\lambda} + A_3\lambda e^{-2i\alpha} + B_3 \quad (3.5b)$$

进而将(3.4)代入(3.5)便可推得

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} A_3 \\ B_3 \end{cases} = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

其中

$$a_{11} = (k_{11} + k_{12})(e^{2i\alpha\lambda} - e^{2i\pi\lambda}) + (k_{22} + k_{21})\lambda(e^{2i\alpha} - 1) - e^{2i\alpha\lambda} - \lambda e^{2i\alpha}$$

$$a_{12} = k_{13}(e^{2i\alpha\lambda} - e^{2i\pi\lambda}) + k_{23}\lambda(e^{2i\alpha} - 1) - 1$$

$$a_{21} = (k_{22} + k_{21})(e^{-2i\alpha\lambda} - e^{-2i\pi\lambda}) + (k_{11} + k_{12})\lambda(e^{-2i\alpha} - 1) - \lambda e^{-2i\alpha} - e^{-2i\alpha\lambda}$$

$$a_{22} = k_{23}(e^{-2i\alpha\lambda} - e^{-2i\pi\lambda}) + k_{13}\lambda(e^{-2i\alpha} - 1) - 1$$

为了使状态 I 下的问题有非零解, 方程(3.6)的系数行列式必须为零, 亦即:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \quad (3.7)$$

同样对于状态 II 有:

$$a'_{11}a'_{22} - a'_{12}a'_{21} = 0 \quad (3.8)$$

这里 a'_j 的具体形式为:

$$a'_{11} = (k_{11} - k_{12})(e^{2i\alpha\lambda'} - e^{2i\pi\lambda'}) + (k_{22} - k_{21})\lambda'(e^{2i\alpha} - 1) - e^{2i\alpha\lambda'} - \lambda'e^{2i\alpha}$$

$$a'_{12} = -k_{13}(e^{2i\alpha\lambda'} - e^{2i\pi\lambda'}) + k_{23}\lambda'(e^{2i\alpha} - 1) + 1$$

$$a'_{21} = (k_{22} - k_{21})(e^{-2i\alpha\lambda'} - e^{-2i\pi\lambda'}) + (k_{11} - k_{12})\lambda'(e^{-2i\alpha} - 1)$$

$$- \lambda'e^{-2i\alpha} + e^{-2i\alpha\lambda'}$$

$$a'_{22} = k_{23}(e^{-2i\alpha\lambda'} - e^{-2i\pi\lambda'}) - k_{13}\lambda'(e^{-2i\alpha} - 1) - 1$$

方程(3.7)和(3.8)即为状态 I 和 II 下的特征方程。 λ 和 λ' 分别表示满足特征方程(3.7)和(3.8)的特征值。对于不同的材料比值和角区张角, 相应的特征值可为实数或复数, 其中小于 1 的特征值尤其重要, 因为它们反映着裂纹尖端奇异性程度, 因此以下仅考虑这些特征值随材料参数和角区张角变化的规律。

本文利用 Muller 迭代法求解超越方程(3.7)和(3.8), 得出不同材料比值和角区张角下的

最小正特征值变化规律, 分别用图 2~5 表示。当 $\alpha = 0, \pi$ 或 $G_{13} = 1$ 时, $\lambda_1 = \lambda'_1 = 0.5$, 其与均质材料中的裂纹情形一致。当 $G_{13} < 1$ 时, λ_1 和 λ'_1 皆大于 0.5, 这说明由于裂纹尖端存在较硬的角区而导致裂纹奇异性的减弱; 相反当 $G_{13} > 1$ 时, λ_1 和 λ'_1 都小于 0.5, 这表明由于裂纹尖端存在较软的角区而使裂纹奇异性增强。 G_{13} 越大, 裂纹尖端奇异性程度越高。

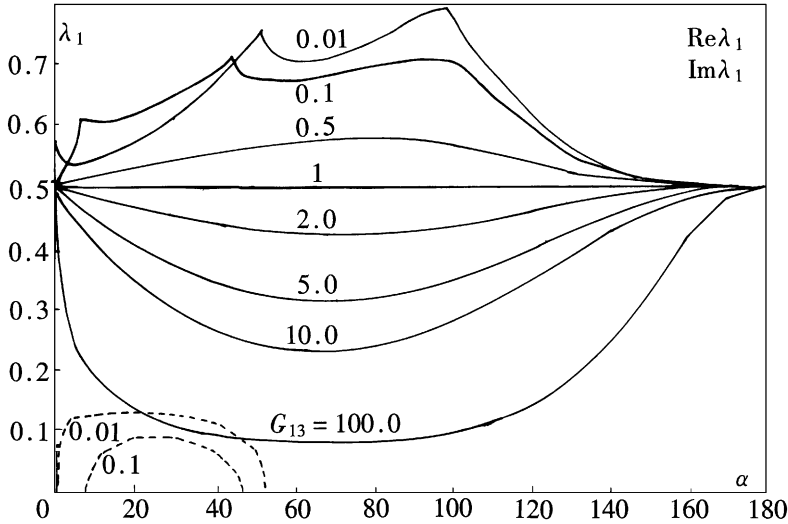


图 2 不同 α 和 G_{13} 下的 λ_1 值

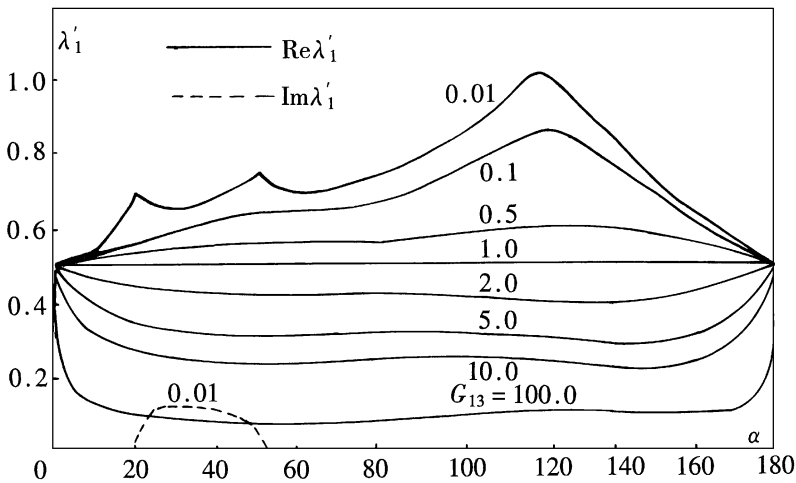


图 3 不同 α 和 G_{13} 下的 λ'_1 值

λ_1 和 λ'_1 一般为实数。当 G_{13} 和 α 较小时, λ_1 和 λ'_1 会由实数变为复数。例如当 $G_{13} = 0.01$ 时, 如 $0^\circ < \alpha < 53^\circ$, λ_1 由实数变为复数; 当 $20^\circ < \alpha < 53^\circ$ 时, λ'_1 由实数变为复数, 如图 2 和图 3 所示。

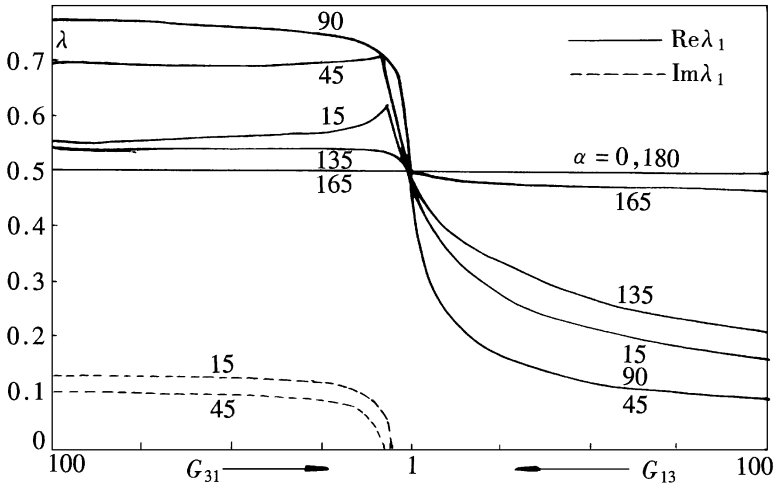


图 4 不同 G_{13} 和 α 下的 λ_1 值

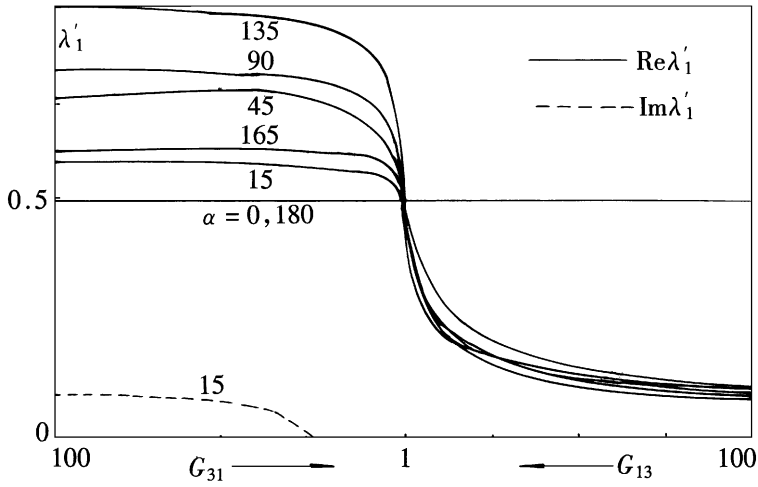


图 5 不同 G_{13} 和 α 下的 λ'_1 值

表 1 不同 μ_1 和 μ_2 下的 λ , $\alpha = 45^\circ$, $G_{13} = 0.1$, $\text{Re } \lambda < 1$

μ_1	μ_2				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	(0.70023, 0.12763)	(0.69894, 0.13584)	(0.69784, 0.14254)	(0.69688, 0.14812)	(0.69605, 0.1528)
0.2	(0.70532, 0.06245)	(0.70387, 0.07750)	(0.70264, 0.08842)	(0.70158, 0.09694)	(0.70065, 0.1038)
0.3	0.62560, 0.79619	0.63714, 0.78144	0.64938, 0.76645	0.66338, 0.75008	0.68285, 0.72855
0.4	0.58466, 0.84946	0.59088, 0.83966	0.59666, 0.83082	0.60208, 0.82277	0.60719, 0.81536
0.5	0.55927, 0.88861	0.56367, 0.88019	0.56766, 0.87279	0.57131, 0.86620	0.57465, 0.86030

表 1~5 列出不同 G_{13} , α , μ_1 和 μ_2 下, 状态 I 下的特征值结果 ($\text{Re } \lambda < 1$)。当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 本问题转变成两种材料半平面交界面上的垂直裂纹问题^[4]。表 2 和表 5 中的特征值与文[9]所列结果一致, 这说明文[9]可作为本文之特例。表 6~10 列出了反对称情形下的特征值结果。当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 反对称情形下的特征值与对称情形下的特征值完全重合, 这与文[4]中的结论一致。

表 3、4 和 8 还表明在某些特殊情形下, 同时存在两个特征值 λ_1 和 λ_2 小于 1, 在这种情形下, λ_1 和 λ_2 对裂纹尖端的奇异性都有影响。因此在计算裂纹应力强度因子时必须同时考虑它们的影响。

表 2 不同 μ_1 和 μ_2 下的 λ , $\alpha = 90^\circ$, $G_{13} = 0.1$, $\text{Re } \lambda < 1$

μ_1	μ_2				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.75822	0.76952	0.77975	0.78905	0.79755
0.2	0.71513	0.72443	0.73276	0.74028	0.74710
0.3	0.68160	0.68956	0.69667	0.70305	0.70882
0.4	0.65446	0.66148	0.66770	0.67327	0.67829
0.5	0.63200	0.63824	0.64378	0.64873	0.65316

表 3 不同 μ_1 和 μ_2 下的 λ , $\alpha = 135^\circ$, $G_{13} = 0.1$, $\text{Re } \lambda < 1$

μ_1	μ_2				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.53829	0.53879	0.53922	0.53959	0.53991
0.2	0.53766	0.53821	0.53868	0.53909	0.53944
0.3	0.53702	0.53763	0.53814	0.53858	0.53896
0.4	0.53638	0.53703	0.53758	0.53806	0.53848
0.5	0.53572	0.53642	0.53703	0.53753	0.53798

表 4 不同 μ_1 和 μ_2 下的 λ , $\alpha = 45^\circ$, $G_{13} = 10$, $\text{Re } \lambda < 1$

μ_1	μ_2				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.25044	0.26023	0.27117	0.28353	0.29766
0.2	0.24169	0.25101	0.26141	0.27313	0.28652
0.3	0.23383	0.24273	0.25266	0.26384	0.27659
0.4	0.22671	0.23525	0.24477	0.25548	0.26766
0.5	0.22022	0.22844	0.23759	0.24788	0.25958

表 5 不同 μ_1 和 μ_2 下的 λ , $\alpha = 90^\circ$, $G_{13} = 10$, $\text{Re } \lambda < 1$

μ_1	μ_2				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.25246	0.25964	0.26529	0.27122	0.27747
0.2	0.24620	0.25131	0.25666	0.26228	0.26820
0.3	0.23890	0.24376	0.24886	0.25421	0.25985
0.4	0.23224	0.23689	0.24176	0.24688	0.25227
0.5	0.22613	0.23059	0.23527	0.24018	0.24535

表 6 不同 μ_1 和 μ_2 下的 λ , $\alpha = 135^\circ$, $G_{13} = 10$, $\text{Re } \lambda < 1$

μ_1	μ_2				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.40587, 0.82659	0.40939, 0.84319	0.41283, 0.86137	0.41620, 0.88133	0.41949, 0.90333
0.2	0.40094, 0.82236	0.40443, 0.83851	0.40785, 0.85621	0.41121, 0.87566	0.41451, 0.89711
0.3	0.39623, 0.81862	0.39970, 0.83440	0.40311, 0.85169	0.40646, 0.87071	0.40976, 0.89171
0.4	0.39173, 0.81529	0.39517, 0.83074	0.39857, 0.84768	0.40192, 0.86634	0.40522, 0.88695
0.5	0.38741, 0.81228	0.39083, 0.82744	0.39421, 0.84408	0.39756, 0.86242	0.40086, 0.88271

表 7 不同 μ_1 和 μ_2 下的 λ' , $\alpha = 135^\circ$, $G_{13} = 0.1$, $\text{Re } \lambda' < 1$

μ_1	μ_2				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.66703, 0.93775	0.67737, 0.91390	0.68865, 0.89057	0.70146, 0.86696	0.71708, 0.84158
0.2	0.64858, 0.96791	0.65479, 0.94802	0.66111, 0.92948	0.66762, 0.91200	0.67439, 0.89533
0.3	0.63750, 0.99083	0.64127, 0.97324	0.64500, 0.95716	0.64871, 0.94235	0.65241, 0.92862
0.4	0.63130	0.63333, 0.99314	0.63532, 0.97871	0.63726, 0.96557	0.63916, 0.95354
0.5	0.62872	0.62940	0.63005, 0.99625	0.63068, 0.98434	0.63129, 0.97353

表 8 不同 μ_1 和 μ_2 下的 λ' , $\alpha = 135^\circ$, $G_{13} = 0.1$, $\text{Re } \lambda' < 1$

μ_1	μ_2				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.81614	0.82319	0.82927	0.83454	0.83917
0.2	0.80420	0.81192	0.81858	0.82440	0.82952
0.3	0.79195	0.80026	0.8078	0.81380	0.81939
0.4	0.77952	0.78835	0.79605	0.80283	0.80884
0.5	0.76702	0.77628	0.78440	0.79158	0.79796

表 9 不同 μ_1 和 μ_2 下的 λ' , $\alpha = 45^\circ$, $G_{13} = 10$, $\text{Re } \lambda' < 1$

μ_1	μ_2				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.24609	0.24736	0.24865	0.24996	0.25128
0.2	0.23799	0.23920	0.24044	0.24169	0.24296
0.3	0.23064	0.23181	0.23299	0.23420	0.23541
0.4	0.22393	0.22506	0.22620	0.22736	0.22854
0.5	0.21779	0.21888	0.21998	0.22110	0.22223

表 10 不同 μ_1 和 μ_2 下的 λ' , $\alpha = 135^\circ$, $G_{13} = 10$, $\text{Re } \lambda' < 1$

μ_1	μ_2				
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
0.1	0.22513	0.23252	0.23996	0.24746	0.25503
0.2	0.21889	0.22591	0.23300	0.24015	0.24739
0.3	0.21337	0.22007	0.22684	0.23369	0.24062
0.4	0.20843	0.21484	0.22133	0.22791	0.23458
0.5	0.20397	0.21012	0.21637	0.22270	0.22913

§ 4. 位移应力场

有了上述特征值结果, 相应的特征函数亦即裂纹尖端的应力位移场可进一步推导如下:

先考虑状态 I, 由方程(3. 6)可得:

$$A_3 = WB_3 \quad (4. 1a)$$

$$\overline{a_3} = WB_3 \quad (4. 1b)$$

$$\overline{b_3} = B_3 \quad (4. 1c)$$

$$A_1 = V_1 B_3 \quad (4. 1d)$$

$$\overline{a_1} = V_2 B_3 \quad (4. 1e)$$

$$\overline{b_1} = V_3 B_3 \quad (4. 1f)$$

$$B_1 = V_4 B_3 \quad (4. 1g)$$

其中

$$W = -a_{12}/a_{11}$$

$$V_1 = (k_{11} + k_{12})W + k_{13}$$

$$V_2 = (k_{22} + k_{21})W + k_{23}$$

$$V_3 = -(k_{11} + k_{12})We^{2\pi\lambda} - (k_{22} + k_{21})W\lambda - k_{13}e^{2\pi i\lambda} - k_{23}\lambda$$

$$V_4 = -(k_{22} + k_{21})We^{-2\pi\lambda} - (k_{11} + k_{12})W\lambda - k_{23}e^{-2\pi i\lambda} - k_{13}\lambda$$

利用(4. 1), 状态 I 下的位移应力表达式可由(2. 1)推得如下:

当 $0 \leq \theta \leq \alpha$ 时

$$\left. \begin{aligned} u_{3r} &= (G_3)^{-1} \operatorname{Re} \left\{ r^\lambda [W(k_3 - \lambda) \cos(\lambda - 1)\theta - \cos(\lambda + 1)\theta] B_3 \right\} \\ u_{3\theta} &= (G_3)^{-1} \operatorname{Im} \left\{ r^\lambda [W(k_3 + \lambda) \sin(\lambda - 1)\theta + \sin(\lambda + 1)\theta] B_3 \right\} \\ \sigma_{300} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ r^{\lambda-1} \lambda W(1 + \lambda) \cos(\lambda - 1)\theta + \cos(\lambda + 1)\theta \right\} B_3 \\ \sigma_{3rr} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ r^{\lambda-1} \lambda W(3 - \lambda) \cos(\lambda - 1)\theta - \cos(\lambda + 1)\theta \right\} B_3 \\ \sigma_{3r\theta} &= 2 \operatorname{Im} \left\{ r^{\lambda-1} i \lambda W(1 - \lambda) \sin(\lambda - 1)\theta + \sin(\lambda + 1)\theta \right\} B_3 \end{aligned} \right\} \quad (4. 2a)$$

当 $\alpha \leq \theta \leq \pi$ 时

$$\left. \begin{aligned} u_{1r} &= (2G_1)^{-1} \operatorname{Re} \left\{ r^\lambda [V_1(k_1 - \lambda) e^{i\theta(\lambda-1)} + V_2(k_1 - \lambda) e^{i\theta(-\lambda+1)} \right. \\ &\quad \left. - V_3 e^{i\theta(-\lambda-1)} - V_4 e^{i\theta(\lambda+1)}] B_3 \right\} \\ u_{1\theta} &= (2G_1)^{-1} \operatorname{Im} \left\{ r^\lambda [V_1(k_1 + \lambda) e^{i\theta(\lambda-1)} - V_2(k_1 + \lambda) e^{i\theta(-\lambda+1)} \right. \\ &\quad \left. - V_3 e^{i\theta(-\lambda-1)} + V_4 e^{i\theta(\lambda+1)}] B_3 \right\} \\ \sigma_{100} &= \operatorname{Re} \left\{ r^{\lambda-1} [V_1 \lambda(1 + \lambda) e^{i\theta(\lambda-1)} + V_2 \lambda(1 + \lambda) e^{i\theta(-\lambda+1)} \right. \\ &\quad \left. + V_3 \lambda e^{i\theta(-\lambda-1)} + V_4 \lambda e^{i\theta(\lambda+1)}] B_3 \right\} \\ \sigma_{1rr} &= \operatorname{Re} \left\{ r^{\lambda-1} [V_1 \lambda(3 - \lambda) e^{i\theta(\lambda-1)} + V_2 \lambda(3 - \lambda) e^{i\theta(-\lambda+1)} \right. \\ &\quad \left. - V_3 \lambda e^{i\theta(-\lambda-1)} - V_4 \lambda e^{i\theta(\lambda+1)}] B_3 \right\} \\ \sigma_{1r\theta} &= \operatorname{Im} \left\{ r^{\lambda-1} [V_1 \lambda(\lambda+1) e^{i\theta(\lambda-1)} + V_2 \lambda(1 - \lambda) e^{i\theta(-\lambda+1)} \right. \\ &\quad \left. - V_3 \lambda e^{i\theta(-\lambda-1)} + V_4 \lambda e^{i\theta(\lambda+1)}] B_3 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4. 2b)$$

对于状态 II, 同样可得:

$$A'_3 = \overline{W'} B'_3 \tag{4.3a}$$

于是便有:

$$\overline{a'_3} = -\overline{W'} B'_3, \quad \overline{b'_3} = -\overline{B'_3} \tag{4.3b, c}$$

$$A'_1 = V'_1 B'_3, \quad \overline{a'_1} = V'_2 B'_3 \tag{4.3d, e}$$

$$b'_1 = V'_3 B'_3, \quad B'_1 = V'_4 B'_3 \tag{4.3f, g}$$

其中

$$W' = -a'_{12}/a'_{11}$$

$$V'_1 = (k_{11} - k_{12}) W' + k_{13}$$

$$V'_2 = (k_{22} - k_{21}) W' + k_{23}$$

$$V'_3 = -(k_{11} - k_{12}) W' e^{2\pi i \lambda} - (k_{22} - k_{21}) W' \lambda - k_{13} e^{2\pi i \lambda} - k_{23} \lambda$$

$$V'_4 = -(k_{22} - k_{21}) W' e^{-2\pi i \lambda} - (k_{11} - k_{12}) W' \lambda - k_{23} e^{-2\pi i \lambda} - k_{13} \lambda$$

利用(4.3), 状态 II 下的位移应力表达式可由(2.1) 推得如下:

当 $0 \leq \theta \leq \alpha$ 时

$$\left. \begin{aligned} u'_{3r} &= (G_3)^{-1} \operatorname{Re} \left\{ r^{\lambda} i [W' (k_{3\sigma} - \lambda) \sin(\lambda - 1)\theta - \sin(\lambda + 1)\theta] B'_3 \right\} \\ u'_{3\theta} &= (G_3)^{-1} \operatorname{Im} \left\{ r^{\lambda} [W' (k_{3\sigma} + \lambda) \cos(\lambda - 1)\theta + \cos(\lambda + 1)\theta] B'_3 \right\} \\ \sigma'_{\theta\theta} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ r^{\lambda-1} \lambda i [W' (1 + \lambda) \sin(\lambda - 1)\theta + \sin(\lambda + 1)\theta] B'_3 \right\} \\ \sigma'_{3rr} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ r^{\lambda-1} \lambda i [W' (3 - \lambda) \sin(\lambda - 1)\theta - \sin(\lambda + 1)\theta] B'_3 \right\} \\ \sigma'_{3\theta} &= 2 \operatorname{Im} \left\{ r^{\lambda-1} \lambda [W' (\lambda - 1) \cos(\lambda - 1)\theta + \cos(\lambda + 1)\theta] B'_3 \right\} \end{aligned} \right\} \tag{4.4a}$$

当 $\alpha \leq \theta \leq \pi$ 时

$$\left. \begin{aligned} u'_{1r} &= (2G_1)^{-1} \operatorname{Re} \left\{ r^{\lambda} [V'_1 (k_1 - \lambda) e^{i\theta(\lambda-1)} + V'_2 (k_1 - \lambda) e^{i\theta(-\lambda+1)} \right. \\ &\quad \left. - V'_3 e^{i\theta(-\lambda-1)} - V'_4 e^{i\theta(\lambda+1)}] B_3 \right\} \\ u'_{1\theta} &= (2G_1)^{-1} \operatorname{Im} \left\{ r^{\lambda} [V'_1 (k_1 + \lambda) e^{i\theta(\lambda-1)} - V'_2 (k_1 + \lambda) e^{i\theta(-\lambda+1)} \right. \\ &\quad \left. - V'_3 e^{i\theta(-\lambda-1)} + V'_4 e^{i\theta(\lambda+1)}] B_3 \right\} \\ \sigma'_{1\theta\theta} &= \operatorname{Re} \left\{ r^{\lambda-1} [V'_1 \lambda (1 + \lambda) e^{i\theta(\lambda-1)} + V'_2 \lambda (1 + \lambda) e^{i\theta(-\lambda+1)} \right. \\ &\quad \left. + V'_3 \lambda e^{i\theta(-\lambda-1)} + V'_4 \lambda e^{i\theta(\lambda+1)}] B_3 \right\} \\ \sigma'_{1rr} &= \operatorname{Re} \left\{ r^{\lambda-1} [V'_1 \lambda (3 - \lambda) e^{i\theta(\lambda-1)} + V'_2 \lambda (3 - \lambda) e^{i\theta(-\lambda+1)} \right. \\ &\quad \left. - V'_3 \lambda e^{i\theta(-\lambda-1)} - V'_4 \lambda e^{i\theta(\lambda+1)}] B_3 \right\} \\ \sigma'_{1r\theta} &= \operatorname{Im} \left\{ r^{\lambda-1} [V'_1 \lambda (\lambda - 1) e^{i\theta(\lambda-1)} + V'_2 \lambda (1 - \lambda) e^{i\theta(-\lambda+1)} \right. \\ &\quad \left. - V'_3 \lambda e^{i\theta(-\lambda-1)} + V'_4 \lambda e^{i\theta(\lambda+1)}] B_3 \right\} \end{aligned} \right\} \tag{4.4b}$$

当特征值为实数时, 上述位移应力表达式可以得以简化. 此时复势函数可以假设成如下形式:

$$\phi_1(z) = A_j z^\lambda \tag{4.5a}$$

$$\phi_2(z) = B_j z^\lambda \tag{4.5b}$$

对于状态 I, 将(4.5) 代入(2.1), 面力自由条件(2.2a), 连续条件(2.2c) 和(2.2b) 以及对称条件(2.3a) 和(2.3b) 可表示成如下形式:

$$A_1 e^{2\pi i \lambda} + \overline{A_1} \lambda + \overline{B_1} = 0 \tag{4.6a}$$

$$A_1 e^{2i\alpha\lambda} + \overline{A_1} \lambda e^{2i\alpha} + \overline{B_1} = A_3 e^{2i\alpha\lambda} + \overline{A_3} \lambda e^{2i\alpha} + \overline{B_3} \quad (4.6b)$$

$$\kappa_1 A_1 e^{2i\alpha\lambda} - \overline{A_1} \lambda e^{2i\alpha} - \overline{B_1} = G_{13} (\kappa_3 A_3 e^{2i\alpha\lambda} - \overline{A_3} \lambda e^{2i\alpha} - \overline{B_3}) \quad (4.6c)$$

$$A_3(1-\lambda) - \overline{A_3}(1-\lambda) + \overline{B_3} - B_3 = 0 \quad (4.6d)$$

$$A_3(\kappa_3 + \lambda) - \overline{A_3}(\kappa_3 + \lambda) - \overline{B_3} + B_3 = 0 \quad (4.6e)$$

由(4.6d)和(4.6e)可得

$$A_3 = a_3, \quad B_3 = b_3 \quad (4.7a, b)$$

其中, a_3 和 b_3 为实数•

将(4.6a)代入(4.6b)和(4.6c), 并利用(4.7)得:

$$A_1 d_1 + \overline{A_1} d_2 + a_3 d_3 + b_3 d_4 = 0 \quad (4.8a)$$

$$A_1 d_5 + \overline{A_1} d_6 + a_3 d_7 + b_3 d_8 = 0 \quad (4.8b)$$

其中

$$\begin{aligned} d_1 &= e^{2\pi i \lambda} - e^{2\pi i \lambda}, & d_2 &= \lambda(e^{2i\alpha} - 1), & d_3 &= -e^{2i\alpha\lambda} - \lambda e^{2i\alpha}, & d_4 &= -1 \\ d_5 &= \kappa_1 e^{2i\alpha\lambda} + e^{2\pi i \lambda}, & d_6 &= -\lambda(e^{2i\alpha} - 1), & d_7 &= -G_{13}(\kappa_3 e^{2i\alpha\lambda} - \lambda e^{2i\alpha}), \\ d_8 &= G_{13} \end{aligned}$$

由(4.8)求解 a_3 和 b_3 得:

$$a_3 = \frac{d_4 d_5 - d_1 d_8}{d_3 d_8 - d_7 d_4} A_1 + \frac{d_4 d_6 - d_2 d_8}{d_3 d_8 - d_7 d_4} \overline{A_1} = f_1 A_1 + f_2 \overline{A_1} \quad (4.9a)$$

$$b_3 = \frac{d_1 d_7 - d_3 d_5}{d_3 d_8 - d_7 d_4} A_1 + \frac{d_2 d_7 - d_3 d_6}{d_3 d_8 - d_7 d_4} \overline{A_1} = f_3 A_1 + f_4 \overline{A_1} \quad (4.9b)$$

由(4.9)还可得出

$$a_3 = \overline{f_2 A_1} + \overline{f_1 \overline{A_1}} \quad (4.10a)$$

$$b_3 = \overline{f_4 A_1} + \overline{f_3 \overline{A_1}} \quad (4.10b)$$

将(4.9a)减去(4.10a)得

$$(f_1 - \overline{f_2}) A_1 + (f_2 - \overline{f_1}) \overline{A_1} = g_1 A_1 + g_2 \overline{A_1} = 0 \quad (4.11)$$

即

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}(g_1 + g_2) & \operatorname{Im}(g_2 - g_1) \\ \operatorname{Im}(g_1 + g_2) & \operatorname{Re}(g_1 - g_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \operatorname{Re} A_1 \\ \operatorname{Im} A_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

为使问题有非零解, 下述特征方程必须被满足:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{Re}(g_1 + g_2) & \operatorname{Im}(g_2 - g_1) \\ \operatorname{Im}(g_1 + g_2) & \operatorname{Re}(g_1 - g_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.13)$$

由(4.12)可得

$$A_1 = E a$$

其中 E 可由表 11 确定, a 为实数•

表 11

E 的表达式

$d_{21} = 0, d_{22} = 0$			$d_{11} = 0, d_{12} = 0$		
$d_{11} \neq 0, d_{12} \neq 0$	$d_{11} = 0, d_{12} \neq 0$	$d_{11} \neq 0, d_{12} = 0$	$d_{21} \neq 0, d_{22} \neq 0$	$d_{21} = 0, d_{22} \neq 0$	$d_{21} = 0, d_{22} = 0$
$1 - id_{11}/d_{12}$	1	i	$1 - id_{21}/d_{22}$	1	i

于是有

$$\begin{aligned} B_1 &= Fa \\ A_3 &= Ha \\ B_3 &= Ma \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} F &= -\overline{E}e^{-2\pi\lambda} - \lambda E \\ H &= f_1E + f_2\overline{E} \\ M &= f_3E + f_4\overline{E} \end{aligned}$$

相应的位移应力场可表示如下:

当 $0 \leq \theta \leq \alpha$ 时

$$\left. \begin{aligned} u_{3r} &= (2G_3)^{-1}r^{\lambda} \left\{ (k_3 - \lambda)[h_1\cos(\lambda - 1)\theta - h_2\sin(\lambda - 1)\theta] \right. \\ &\quad \left. - [m_1\cos(\lambda + 1)\theta - m_2\sin(\lambda + 1)\theta] \right\} a \\ u_{3\theta} &= (2G_3)^{-1}r^{\lambda} \left\{ (k_3 + \lambda)[h_1\sin(\lambda - 1)\theta + h_2\cos(\lambda - 1)\theta] \right. \\ &\quad \left. + [m_1\sin(\lambda + 1)\theta + m_2\cos(\lambda + 1)\theta] \right\} a \\ \sigma_{3rr} &= r^{\lambda-1} \left\{ \lambda(3 - \lambda)[h_1\cos(\lambda - 1)\theta - h_2\sin(\lambda - 1)\theta] \right. \\ &\quad \left. - \lambda[m_1\cos(\lambda + 1)\theta - m_2\sin(\lambda + 1)\theta] \right\} a \\ \sigma_{3\theta\theta} &= r^{\lambda-1} \left\{ \lambda(1 + \lambda)[h_1\cos(\lambda - 1)\theta - h_2\sin(\lambda - 1)\theta] \right. \\ &\quad \left. + \lambda[m_1\cos(\lambda + 1)\theta - m_2\sin(\lambda + 1)\theta] \right\} a \\ \sigma_{3r\theta} &= r^{\lambda-1} \left\{ \lambda(\lambda - 1)[h_1\sin(\lambda - 1)\theta + h_2\cos(\lambda - 1)\theta] \right. \\ &\quad \left. + \lambda[m_1\sin(\lambda + 1)\theta + m_2\cos(\lambda + 1)\theta] \right\} a \end{aligned} \right\} \quad (4.14a)$$

当 $\alpha \leq \theta \leq \pi$ 时

$$\left. \begin{aligned} u_{1r} &= (2G_1)^{-1}r^{\lambda} \left\{ (k_1 - \lambda)[e_1\cos(\lambda - 1)\theta - e_2\sin(\lambda - 1)\theta] \right. \\ &\quad \left. - [f_1\cos(\lambda + 1)\theta - f_2\sin(\lambda + 1)\theta] \right\} a \\ u_{1\theta} &= (2G_1)^{-1}r^{\lambda} \left\{ (k_1 + \lambda)[e_1\sin(\lambda - 1)\theta + e_2\cos(\lambda - 1)\theta] \right. \\ &\quad \left. + [f_1\sin(\lambda + 1)\theta + f_2\cos(\lambda + 1)\theta] \right\} a \\ \sigma_{1rr} &= r^{\lambda-1} \left\{ \lambda(3 - \lambda)[e_1\cos(\lambda - 1)\theta - e_2\sin(\lambda - 1)\theta] \right. \\ &\quad \left. - \lambda[f_1\cos(\lambda + 1)\theta - f_2\sin(\lambda + 1)\theta] \right\} a \\ \sigma_{1\theta\theta} &= r^{\lambda-1} \left\{ \lambda(1 + \lambda)[e_1\cos(\lambda - 1)\theta - e_2\sin(\lambda - 1)\theta] \right. \\ &\quad \left. + \lambda[f_1\cos(\lambda + 1)\theta - f_2\sin(\lambda + 1)\theta] \right\} a \\ \sigma_{1r\theta} &= r^{\lambda-1} \left\{ \lambda(\lambda - 1)[e_1\sin(\lambda - 1)\theta + e_2\cos(\lambda - 1)\theta] \right. \\ &\quad \left. + \lambda[f_1\sin(\lambda + 1)\theta + f_2\cos(\lambda + 1)\theta] \right\} a \end{aligned} \right\} \quad (4.14b)$$

其中

$$F = f_1 + if_2, \quad H = h_1 + ih_2, \quad M = m_1 + im_2 \quad (4.15a, b, c)$$

对于状态 II, 反对称条件(2.4a)和(2.4b)可表示为

$$\overline{A'_3(1 + \lambda)} + \overline{A_3(1 + \lambda)} + \overline{B'_3} + B_3 = 0 \quad (4.15d)$$

$$\overline{A'_3(k_3 - \lambda)} + \overline{A_3(k_3 - \lambda)} - \overline{B'_3} - B_3 = 0 \quad (4.15e)$$

由(4.15d)和(4.15e)可得

$$A_3 = ia_3, \quad B_3 = ib_3 \quad (4.16a, b)$$

其中, a_3 和 b_3 为实数。

与状态 I 相同, 可得

$$A_1 = E a', \quad B_1 = F a' \quad (4.17a, b)$$

$$A_3 = H a', \quad B_3 = M a' \quad (4.17c, d)$$

其中

$$\begin{aligned} F' &= -\overline{E} e^{-2\pi i \lambda} - \frac{\lambda E'}{\overline{E}} \\ H' &= i(f_1 E' + f_2 \overline{E}') \\ M' &= i(f_3 E' + f_4 \overline{E}') \\ f_1' &= \frac{d_4 d_5 - d_1 d_8}{d_3 d_8 - d_7 d_4}, \quad f_2' = \frac{d_4 d_6 - d_2 d_8}{d_3 d_8 - d_7 d_4} \\ f_3' &= \frac{d_1 d_7 - d_3 d_5}{d_3 d_8 - d_7 d_4}, \quad f_4' = \frac{d_2 d_7 - d_3 d_6}{d_3 d_8 - d_7 d_4} \\ d_1' &= e^{2i\lambda a} - e^{2\pi i \lambda}, \quad d_2' = \lambda(e^{2ia} - 1), \quad d_3' = i(\lambda e^{2ia} - e^{2ia\lambda}), \quad d_4' = i \\ d_5' &= \kappa_1 e^{2i\lambda a} + e^{2\pi i \lambda}, \quad d_6' = -\lambda(e^{2ia} - 1), \quad d_7' = -iG_{13}(\kappa_3 e^{2ia\lambda} + \lambda e^{2ia}), \\ d_8' &= -iG_{13} \end{aligned}$$

$$E' = e_1 + ie_2$$

E' 可用状态 I 下求 E 的方法确定。

状态 II 下的应力位移场与状态 I 下的表达式形式一致, 仅需将 $e_1, e_2, f_1, f_2, h_1, h_2, m_1, m_2$ 以及 a 用 $e_1', e_2', f_1', f_2', h_1', h_2', m_1', m_2'$ 和 a' 代替即可, 这里 $F' = f_1' + if_2' H' = h_1' + h_2', M' = m_1' + im_2'$ 。

对于实特征值情形, 裂纹应力强度因子可定义如下:

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_0 r^{1-\lambda_1} \sigma_{\theta\theta}(\theta=0), \quad K_{II} = \sqrt{2\pi} \lim_0 r^{1-\lambda_1} \sigma_{\theta r}(\theta=0) \quad (4.18)$$

其中

$$a = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda_1[(\lambda_1+1)h_1+m_1]}, \quad a' = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\lambda_1[(\lambda_1-1)h_1+m_1]}$$

整个问题的位移应力场可通过状态 I 和 II 的迭加表示如下:

$$u_{rj} = \frac{K_I r^{\lambda_1}}{\sqrt{2\pi}} F_{1j}^I(\theta) + \frac{K_{II} r^{\lambda_1}}{\sqrt{2\pi}} F_{1j}^{II}(\theta) \quad (4.19a)$$

$$u_{\theta j} = \frac{K_I r^{\lambda_1}}{\sqrt{2\pi}} F_{2j}^I(\theta) + \frac{K_{II} r^{\lambda_1}}{\sqrt{2\pi}} F_{2j}^{II}(\theta) \quad (4.19b)$$

$$\sigma_{rj} = \frac{K_I r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi}} F_{3j}^I(\theta) + \frac{K_{II} r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi}} F_{3j}^{II}(\theta) \quad (4.19c)$$

$$\sigma_{\theta j} = \frac{K_I r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi}} F_{4j}^I(\theta) + \frac{K_{II} r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi}} F_{4j}^{II}(\theta) \quad (4.19d)$$

$$\sigma_{\theta r} = \frac{K_I r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi}} F_{5j}^I(\theta) + \frac{K_{II} r^{\lambda_1-1}}{\sqrt{2\pi}} F_{5j}^{II}(\theta) \quad (4.19e)$$

其中, F_{ij}^I 可由(4.14) 得出, F_{ij}^{II} 可用与 F_{ij}^I 同样方法推导, 这里因篇幅所限省略。

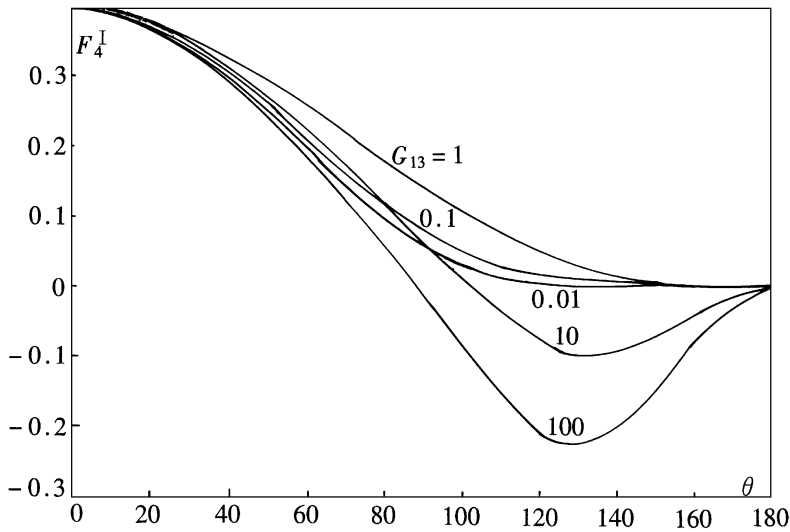


图 6 不同 G_{13} 下的 $F_4^I(\theta)$ 分布, $\alpha = 120^\circ$

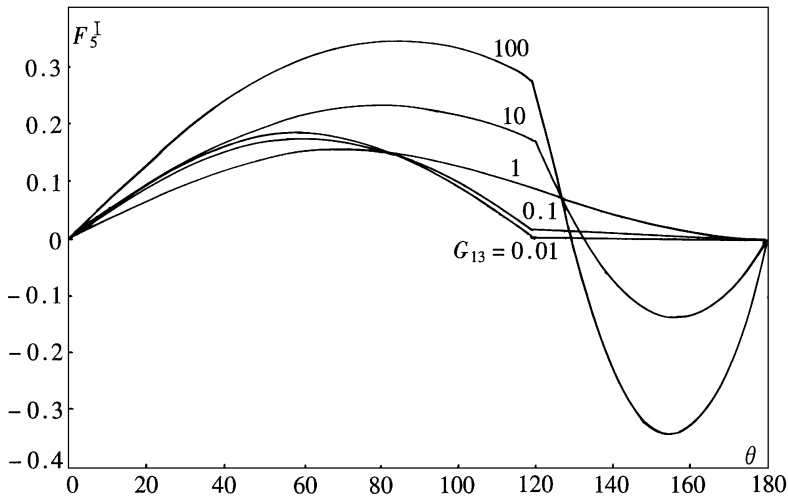


图 7 不同 G_{13} 下的 $F_5^I(\theta)$ 分布, $\alpha = 120^\circ$

图 6 和图 7 给出对称状态下, $F_4^I(\theta)$ 和 $F_5^I(\theta)$ 随 θ 变化而变化的规律, $\alpha = 120^\circ$. $F_4^I(\theta)$ 在 $\theta = 0^\circ$ 处达到最大值, 也即对于不同的 G_{13} , $F_4^I(\theta)$ 在角区分角线上达到其最大值, 与其它各种情形相比, $G_{13} = 1$ 时, $F_4^I(\theta)$ 最大. 至于 $F_5^I(\theta)$, 图 7 表明其变化曲线斜率在两种材料的交界面处发生突变. 通常情况下, G_{13} 越大, $GF_4^I(\theta)$ 和 $F_5^I(\theta)$ 随 θ 变化得越多.

图 8 和图 9 表明在反对称状态下, $F_4^{II}(\theta)$ 和 $F_5^{II}(\theta)$ 随 θ 变化的规律, 其中 $\alpha = 120^\circ$. $F_4^{II}(\theta)$ 总是负值, 并且随着 θ 的增长, $F_4^{II}(\theta)$ 首先减小, 当达到最大绝对值后, 又转为增长, G_{13} 的值越小, 该函数的绝对最大值越大. 图 9 表明 $F_5^{II}(\theta)$ 在两种材料的交界面上发生突变的现象, 并且它在角区的分角线上达到最大值. G_{13} 越大, $F_4^{II}(\theta)$ 和 $F_5^{II}(\theta)$ 随着 θ 变

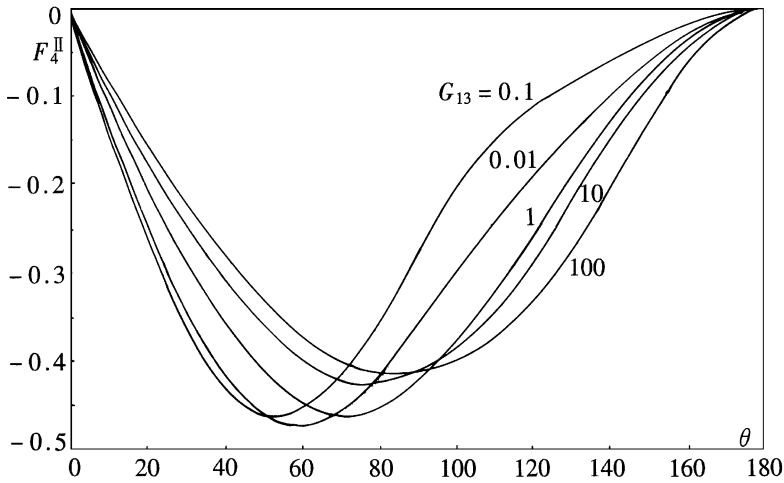


图 8 不同 G_{13} 下的 $F_4^I(\theta)$ 分布, $\alpha = 120^\circ$

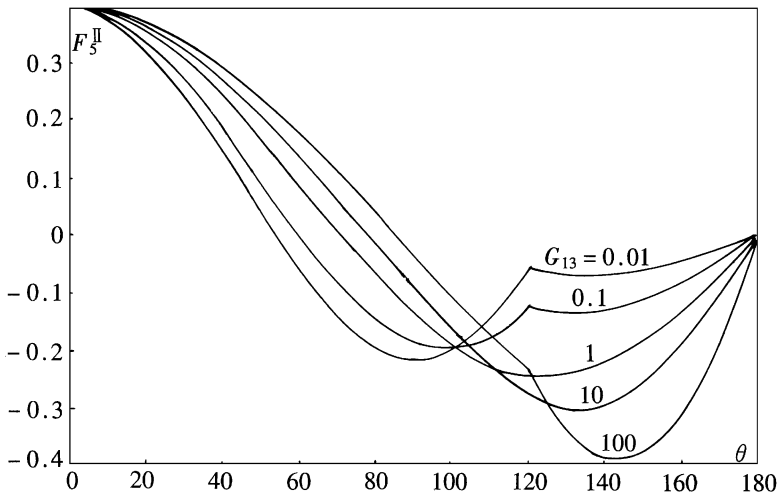


图 9 不同 G_{13} 下的 $F_5^I(\theta)$ 分布, $\alpha = 120^\circ$

化得越快。

对于实际问题,除了考虑上述关于 F_j^I 和 F_j^{II} ($j = 1, \dots, 5$) 的特性以外,还需根据问题边界位移和荷载条件确定裂纹的应力强度因子。

当 $G_{13} = 1$, 或者 $\alpha = 0^\circ$ 或 180° 时, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$, 可以证明表达式(4.19)将转化为均质材料中的裂纹问题。

§ 5. 结 论

利用特征函数法,本文详细分析了两种材料尖端产生的分角线上的裂纹问题。对于不同的角区张角和材料比值,本文给出了对称和反对称两种状态下裂纹的奇异性变化规律。裂纹

尖端的位移应力场也通过显式表式出来。进一步地可以考虑两种材料尖端产生的任意方向裂纹现象, 裂纹的应力强度因子可以通过本文解答与各种计算方法结合形式求出。

参 考 文 献

- 1 D. B. Bogy and K. C. Wang, Stress singularities at interface corners in bonded dissimilar isotropic elastic materials, *Int J. Solids Structures*, **7** (1971), 993—1005.
- 2 W. C. Carpenter and C. Byers, A path independent integral for computing stress intensities for V-notched cracks in a bi-material, *Int. J. Fract.*, **35** (1987), 245—268.
- 3 D. H. Chen and H. Nisitani, Singular stress field near the corner of jointed dissimilar materials, *Journal of Applied Mechanics*, **60** (1993), 607—613.
- 4 D. H. Chen, A crack normal to and terminating at a bimaterial interface, *Engineering Fracture Mechanics*, **49** (1994), 517—532.
- 5 D. H. Chen, Analysis of singular stress field around the inclined corner tip, *Engineering Fracture Mechanics*, **49**(4) (1994), 533—546.
- 6 J. P. Dempsey and G. H. Sinclair, On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge, *J. Elasticity*, **9** (1979), 373—391.
- 7 D. N. Fenner, Stress singularities in composite materials with an arbitrarily oriented crack meeting an interface, *Int. J. of Fracture*, **12** (1976), 705—721.
- 8 N. I. Muskhelishvili, Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity, 4th Ed., Noordhoff, The Netherlands, (1963).
- 9 W. C. Wang and J. T. Chen, Singularities of an arbitrarily inclined semi-infinite crack meeting a bi-material interface, *Engineering Fracture Mechanics*, **49**(5) (1994), 671—680.
- 10 M. L. Williams, Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension, *Journal of Applied Mechanics*, **19** (1952), 526—528.

A Crack Emanating from the Tip of Bonded Dissimilar Materials

Qian Jun

(Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210000, P. R. China)

Norio Hasebe

(Nagoya Institute of Technology, Japan)

Abstract

A crack is assumed to emanate from the tip of bonded dissimilar materials with the crack on the bisector of one of the bonded wedges. The problem is firstly divided into symmetric and anti-symmetric modes according to the characteristics of the local geometry. By eigenexpansion method, the eigenequations for the two modes are derived, respectively, and the corresponding eigenvalues are obtained with different ratios of dissimilar material constants and angles of the wedges. The singularity of the crack is then analyzed by the eigenvalues that are less than one. The fields of displacement and stress in the vicinity of the tip of the crack are finally derived in an explicit form.

Key words Dissimilar material, singularity, fields of displacement and stress