应用数学和力学, 第 19 卷 第 5 期(1998 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

求解高维波动方程的半离散方法

吴建成[①]　　蔡日增[②]

(苏煜城推荐, 1996 年 7 月 15 日收到, 1997 年 12 月 19 日收到修改稿)

摘　　要

本文用半离散方法将高维波动方程离散为一维耦合波动方程组· 文中给出了离散的收敛性及一维耦合波动方程组的适定性结果· 数值例子表明这种方法收敛速度是很快的·

关键词　半离散　高维波动方程　收敛性　适定性
中图分类号　O241

§1. 引　　言

波动方程由于其在地球物理、弹性力学等学科中起着重要作用, 始终是一个引人注目的问题· 尽管波动方程的理论与计算已有丰富的成果[1][2], 但新的问题, 新方法仍不断出现·[3][4] 文[5] 提出了将二维波动方程化为一维耦合波动方程组的方法, 但对变系数方程及高维方程难以推广· 本文用半离散方法将变系数高维波动方程化为一维耦合波动方程组求解· 为简单起见, 以三维波动方程为例讨论·

设 $t\geqslant 0$ 表示时间变量, $x\geqslant 0$ 是空间变量(常表示深度), Ω 为 yOz 平面上有界开区域, $\partial\Omega$ 为边界, $\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$, 考虑如下定解问题, 求函数 $u(x,y,z,t)$ 满足:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2(x,y,z)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0$$

$$(t>0,\ x>0,\ (y,z)\in\Omega)\qquad(1.1)$$

$$t=0\text{时},\quad u=\varphi_1(x,y,z),\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\varphi_2(x,y,z)\qquad(x\geqslant 0,\ (y,z)\in\Omega)\qquad(1.2)$$

$$x=0\text{时},\quad u=f(y,z,t)\qquad((y,z)\in\Omega,\ t\geqslant 0)\qquad(1.3)$$

$$(y,z)\in\partial\Omega\text{时},\quad u=G(x,y,z,t)\qquad(t\geqslant 0,\ x\geqslant 0)\qquad(1.4)$$

其中, $a(x,y,z)>0$ 为声速, $\varphi_i(x,y,z)(i=1,2)$, $f(y,z,t)$, $G(x,y,z,t)$ 均为已知函数, 满足一定的光滑性、相容性条件·

在第二部分将给出半离散方法及收敛性结果, 第三部分将给出一维耦合波动方程组解的存在性, 唯一性等适定性结果及算例·

---

① 江苏石油化工学院, 江苏, 常州 213016
② 无锡轻工大学, 无锡 214036

§ 2. 半离散方法及收敛性

以 $h > 0$ 为步长, 用正方形网线划分区域 Ω· Ω内部不和边界$\partial\Omega$相邻的结点记为边界结点· 规定一个边界结点仅和一个内结点相邻· (若和两个内结点相邻则作为两个边界结点)

设边界$\partial\Omega$满足: 对任意 $h > 0$, 通过对边界结点作适当修改, 可使得对任一边界结点 P 总存在边界$\partial\Omega$上若干个点 $S_1, S_2, \ldots, S_K$ 使得

$$u_P - u_R = -A_R u_R + \sum_{i=1}^{K} A_{Si} G_{Si} + o(h^2) \tag{2.1}$$

这里, u_P, u_R, G_{Si} 等表示函数 u, G 在点 P, R, S_i 的取值, R 是和边界结点 P 相邻的内结点, A_K, A_{Si} 为插值系数且满足

$$0 < C_1 h^{\alpha} \leqslant A_R \leqslant C_2 \qquad (0 \leqslant \alpha < 1,\ C_1, C_2 \text{ 与 } h \text{ 无关}) \tag{2.2}$$

在二维情形 $\alpha = 0$, $A_R = 1$· 在三维情形通常的凸分段光滑曲线$\partial\Omega$围成的区域满足上述要求·

记 D 为内结点点集, ∂D 为边界结点点集, $u_{ij} = u_{ij}(x, t)$ 简记为 $u(x, y_i, z_j, t)$, $\triangle_h u_{ij} = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{ij+1} + u_{ij-1} - 4u_{ij})$, u_x, u_t 等分别表示函数关于 x, t 的偏导数· 则问题(1.1) ~ (1.4) 离散为求函数 $u_{ij}(x, t)$, $(y_i, z_j) \in D$ 满足

$$u_{ijtt} - a_{ij}^2(x)(u_{ijxx} + \triangle_h u_{ij}) = 0 \qquad (x > 0,\ t > 0) \tag{2.3}$$

$$t = 0 \text{ 时}, \quad u_{ij} = \varphi_{1ij}(x), \quad u_{tij} = \varphi_{2ij}(x) \qquad (x \geqslant 0) \tag{2.4}$$

$$x = 0 \text{ 时}, \quad u_{ij} = f_{ij}(t) \qquad (t \geqslant 0) \tag{2.5}$$

$$P \in \partial D,\ R \in D \text{ 时}, \quad u_P - u_R = -A_K u_K + \sum_{i=1}^{K} A_{Si} G_{Si} \tag{2.6}$$

设 $u(x, y, z, t)$ 是定解问题(1.1) ~ (1.4) 的解, 它关于 y, z 有四阶连续偏导数, u_{ij} 是定解问题(2.3) ~ (2.6) 的解· 令 $e_{ij} = u(x, y_i, z_j, t) - u_{ij}(x, t)$, 由泰勒展开 $\triangle_h e_{ij} = r_{ij}(x, t)h^2$, $e_P - e_R = -A_R e_R + r_R(x, t)h^2$, 因此对 $(y_i, z_j) \in D$ 有

$$e_{ijtt} - a_{ij}^2(e_{ijxx} + \triangle_h e_{ij}) = a_{ij}^2 r_{ij} h^2 \qquad (x > 0,\ t > 0) \tag{2.7}$$

$$e_{ij}(x, 0) = e_{ijt}(x, 0) = e_{ij}(0, t) = 0 \qquad (x \geqslant 0,\ t \geqslant 0) \tag{2.8}$$

记 $\sum_D e_{ij}$ 表示对所有 $(y_i, z_j) \in D$ 求和, $\sum_{D,D}(e_{i+1,j} - e_{ij})$ 表示对所有 $(y_{i+1}, z_j), (y_i, z_j) \in D$ 求和, $\sum_{\partial D, D}(e_P - e_R)$ 表示对所有相邻的 $P \in \partial D$, $R \in D$ 求和· 经计算有

$$\begin{aligned} h^2 \sum_D a_{ij}^2 e_{ijt} \triangle_h e_{ij} = {} & \sum_{\partial D, D} a_R^2 e_{Rt}(e_P - e_R) - \sum_{D,D} a_{ij}^2 (e_{i+1,jt} - e_{ijt})(e_{i+1,j} - e_{ij}) \\ & - \sum_{D,D} a_{ij}^2 (e_{ij+1t} - e_{ijt})(e_{ij+1} - e_{ij}) \end{aligned} \tag{2.9}$$

设 $X \geqslant 0$ 为任一实数值· 记 $A = \max\limits_{\Omega\times[0,X]} |a(x, y, z)|$, $A_X = \max\limits_{\Omega\times[0,X]} \left|\frac{\partial}{\partial x} a(x, y)\right|$, A_y, A_z 类似定义· $A_{\min} = \min\limits_{\Omega\times[0,X]} |a(x, y, z)| > 0$, $\sigma_X = \left\{(x, t)\ 0 \leqslant x + At \leqslant X,\ x \geqslant 0,\ t \geqslant 0\right\}$,

$$E(t) = \int_0^{X-At} \left\{ \sum_D (e_{ijt}^2 + a_{ij}^2 e_{ijx}^2) + \sum_{D,D} a_{ij}^2 (e_{i+1,j} - e_{ij})^2 / h^2 + \sum_{D,D} (e_{ij+1} - e_{ij})^2 / h^2 \right.$$

$$+ \sum_{\partial D,\, D} \frac{1}{A_R} a_R^2 (e_P - e_R)^2 / h^2 \Big\} dX \qquad (0 \leqslant t \leqslant X/A)$$

引理 1 存在和 h 无关的正常数 $C_3 > 0$，使得

$$\frac{dE(t)}{dt} \leqslant C_3 E(t) + \int_0^{X-At} \left(\sum_D a_{ij}^4 r_{ij}^2 h^2 + \sum_{\partial D,\, D} \frac{a_R^2}{A_R} r_{tR}^2 h^2 \right) dx$$

证 直接计算并将 e_{ijtt} 满足的式(2.7)代入可得

$$\frac{dE(t)}{dt} \leqslant -A \sum_D (e_{ijt}^2 + a_{ij}^2 e_{ijx}^2) \Big|_{x=X-At} + 2\int_0^{X-At} \Big\{ \sum_D a_{ij}^2 [e_{ijt}(r_{ij}h^2$$

$$+ e_{ijxx} + \therefore_h e_{ij}) + e_{ijx} e_{ijxt}] + \frac{1}{h^2} \sum_{D,\, D} a_{ij}^2 [(e_{ij+1} - e_{ij})(e_{ij+1t} - e_{ijt})$$

$$+ (e_{i+1,j} - e_{ij})(e_{i+1jt} - e_{ijt})] + \sum_{\partial D,\, D} \frac{1}{A_R} a_R^2 (e_P - e_R)(e_{Pt} - e_{Rt}) / h^2 \Big\} dx$$

由式(2.9)注意到 $(e_{ijt}e_{ijx})_x = e_{ijtx}e_{ijx} + e_{ijt}e_{ijxx}$，由分部积分可得：

$$\frac{dE(t)}{dt} \leqslant \Big[-A \sum_D (e_{ijt}^2 + a_{ij}^2 e_{ijx}^2) + 2\sum_D a_{ij}^2 (e_{ijt} e_{ijx}) \Big] \Big|_{x=X-At} + 2A_x \int_0^{X-At} \sum_D (e_{ijt}^2$$

$$+ a_{ij}^2 e_{ijx}^2) dx + 2\int_0^{X-At} \Big\{ \sum_D a_{ij}^2 e_{ijt}^2 r_{ij} h^2 + \frac{1}{2} A_y \left(1 + \frac{A}{A_{\min}}\right) \sum_{D,\, D} \Big[e_{i+1jt}^2$$

$$+ a_{ij}^2 \left(\frac{e_{i+1j} - e_{ij}}{h} \right)^2 \Big] + \frac{1}{2} A_z \left(1 + \frac{A}{A_{\min}}\right) \sum_{D,\, D} \Big[e_{ij+1t}^2 + a_{ij}^2 \left(\frac{e_{ij+1} - e_{ij}}{h} \right)^2 \Big]$$

$$+ \sum_{\partial D,\, D} \frac{a_R^2}{A_R} r_{Rt} (e_P - e_R) \Big\} dx$$

$$\leq (A_x + A_y + A_z) \left(1 + \frac{A}{A_{\min}}\right) \int_0^{X-At} \Big\{ \sum_D (e_{ijt}^2 + a_{ij}^2 e_{ijx}^2) + \sum_{D,\, D} a_{ij}^2 \left(\frac{e_{i+1j} - e_{ij}}{h} \right)^2$$

$$+ \sum_{D,\, D} a_{ij}^2 \left(\frac{e_{ij+1} - e_{ij}}{h} \right)^2 \Big\} dx + \int_0^{X-At} \sum_D (e_{ijt}^2 + a_{ij}^4 r_{ij}^2 h^4) dx$$

$$+ \int_0^{X-At} \sum_{\partial D,\, D} \Big[\frac{a_R^2}{A_R} \left(\frac{e_P - e_R}{h} \right)^2 + \frac{a_R^2}{A_R} r_{Rt}^2 h^2 \Big] dx \tag{2.10}$$

取 $C_3 = 1 + (A_x + A_y + A_z)\left(1 + \frac{A}{A_{\min}}\right)$，则引理 1 证毕。

引理 2 设 $0 \leqslant t \leqslant X/A$，则存在常数 $C_4 > 0$ 和 h 无关，使得

$$E(t) \leqslant C_4 h^{1-\alpha}$$

由 $E(0) = 0$ 及熟知的微分不等式并注意到 $\sum_D h^2 \leqslant 2S \sum_{\partial D,\, D} h \leqslant 4d$，$S$ 为区域 σ_x 的面积，d 为直径即可证得。

定理 1 设定解问题(1.1)～(1.4)的解 $u(x, y, z, t)$ 在区域 Ω 上关于 y, z 有四阶连续偏导数，区域的边界满足(2.1)(2.2)，则在区域 σ_x 上存在和 h 无关的正常数 $C_5 > 0$，使得

$$\int_0^{X-At} e_{ij}^2 dx \leqslant C_5 h^{2-2\alpha} \quad ((y_i, z_j) \in D) \tag{2.11}$$

因此

$$\int_D \int [u_{ij} - u(x, t_i, z_j, t)]^2 dx dt \to 0 \quad (h \to 0) \tag{2.12}$$

证 由定理假定，存在正常数 r 使得 $|r_{ij}(x, t)| \leqslant r \; ((y_i, z_j) \in D)$。固定 i，记 P_1 为网

线 $y = ih$ 下方边界结点, $R_1(y_i, z_{j1})$ 为相邻的内结点, 则有

$$e_{ij} = \sum_{k=j_1}^{j-1}(e_{ik+1} - e_{ik}) + \frac{1}{A_R}r_{R_1}h^2 - \frac{1}{A_R}(e_{P_1} - e_{R_1})\int_0^{X-At} e_{ij}^2 dx$$

$$d \leqslant (j - j_1 + 2)\int_0^{X-At}\sum_{k=j_1}^{j-1}\left(\frac{e_{ik+1} - e_{ik}}{h}\right)^2 h^2 + \frac{1}{A_R^2}(e_{P_1} + - e_{R_1})^2 + \frac{1}{A_R^2}r_{R_1}^2 h^4 dx$$

$$\leqslant (j - j_1 + 2)\left[\frac{C_1}{A_{\min}^2}h^{2-\alpha}E(t) + C_1^2 r(X - At)h^{4-2\alpha}\right.$$

由引理 2 即得式(2.11)成立•

§3. 半离散问题的求解及适定性

作变换 $s = C_{ij}(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{a_{ij}(\xi)}$• 由于 $a_{ij}(x) > 0$, 因而逆变换 $X = C_{ij}^{-1}(s)$ 存在• 记 $v_{ij} = v_{ij}(s, t) = u_{ij}(x, t)$, $a_{ij}(s) = a_{ij}(x)$, $\varphi_{kij}(s) = \varphi_{kij}(x)(k = 1, 2)$, $q_{ij}(s) = a_{ij}'(x) = \frac{1}{a_{ij}(s)}\frac{da_{ij}}{ds}$, $F_{ij}(s, t) = a_{ij}^2(s)\therefore_h u_{ij}(C_{ij}^{-1}(s), t) - q_{ij}(s)v_{ijs}'(s, t)$, 则半离散问题变换为求 $v_{ij}(s, t)$ 满足

$$v_{ijtt} - v_{ijss} = F_{ij}(s, t) \qquad (s > 0, t > 0) \tag{3.1}$$

$$v_{ij}(s, 0) = \varphi_{1ij}(s), v_{ijt}(s, 0) = \varphi_{2ij}(s) \qquad (s \geqslant 0) \tag{3.2}$$

$$v_{ij}(0, t) = f_{ij}(t) \qquad (t \geqslant 0) \tag{3.3}$$

$$v_P(s, t) = (1 - A_R)v_R(s, t) + \sum_{i=1}^{K}A_{Si}G_{Si}(s, t) \qquad (R \in D, P \in \partial D) \tag{3.4}$$

对方程沿特征线积分, 利用初边值条件得

$$v_{ij}(s, t) = \Phi_{ij}(s, t) + \frac{1}{2}\int_0^t d\tau\int_{|s+\tau-t|}^{s+t-\tau}F_{ij}(\xi, \tau)d\xi \tag{3.5}$$

$$v_{ijs}'(s, t) = \Phi_{ijs}'(s, t) + \frac{1}{2}\int_0^t F_{ij}(s + t - \tau, \tau)$$

$$- \operatorname{sgn}(s + \tau - t)F_{ij}(|s + \tau - t|, \tau] d\tau \tag{3.6}$$

这里

$$\Phi_{ij}(s, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\varphi_{1ij}(s + t) + \varphi_{1ij}(s - t)] + \frac{1}{2}\int_{s-t}^{s+t}\varphi_{2ij}(\xi)d\xi & (s \leqslant t) \\ \frac{1}{2}[\varphi_{1ij}(s + t) - \varphi_{1ij}(t - s)] + \frac{1}{2}\int_{t-s}^{s+t}\varphi_2(\xi)d\xi + f_{ij}(t - s) & (t \leqslant s) \end{cases}$$

设 $t > 0$ 为正常数, 在区域 $x \in [0, +\infty)$, $t \in [0, t]$ 上求解耦合方程组(3.5)、(3.6)

(i) 给初值 $u_{ij}^{(0)}(x, t)$ 满足初边值条件(2.4)、(2.5), 并在边界结点上由式(2.6)计算 $u_P^{(0)}$, 在内结点上计算 $F_{ij}^{(0)}(s, t)$, $0 \leqslant x, s < +\infty, 0 \leqslant t \leqslant t$•

(ii) 设 $v_{ij}^{(k)}(s, t)$, $v_{ijs}'(s, t)$, $F_{ij}^{(k)}(s, t)$ 已求得, 将方程(3.5)、(3.6)右边 F_{ij} 由 $F_{ij}^{(k)}$ 代替计算结果作为 $v_{ij}^{(k+1)}(s, t)$, $v_{ijs}'^{(k+1)}(s, t)$, 再计算 $u_{ij}^{(k+1)}(x, t) = v_{ij}^{(k+1)}(C_{ij}(x), t)$, $\therefore_h u_{ij}^{(k+1)}$, 又得 $F_{ij}^{(k+1)}(s, t) = a_{ij}(s)\therefore_h u_{ij}^{(k+1)}(C_{ij}^{-1}(s), t) - q_{ij}(s)v_{ijs}^{(k+1)}(s, t)$, $0 \leqslant x, s < +\infty, 0 \leqslant t \leqslant t$•

由此得到解的逼近叙列 $\{u_{ij}^{(k)}(x, t)j\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$•

定理 2 设 $\Phi_j(s, t) \in C^2([0, +\infty) \times [0, t])$, $a_{ij}(x) \in C^1([0, +\infty))$, 且均为有界函数, 则 $u_{ij}^{(k)}(x, t)$ 在区域 $[0, +\infty) \times [0, t]$ 上一致收敛到问题(2.3) ~ (2.6)的解 $u_{ij}^*(x,$

$t)$. $u_{ij}^{*}(x,t)\in C^2([0,+\infty)\times[0,t])$ 是存在的, 唯一的, 稳定的.

证 直接验证知问题(2.3)~(2.6)和积分方程(3.5)、(3.6)等价, 因而只要证明积分方程(3.5)、(3.6)存在唯一的解, 且连续依赖于数据 $\Phi_{ij}(s,t)$.

注意到对任意 $z\in[0,+\infty)$ 有

$$\frac{1}{2}\int_0^t \tau^n d\tau \int_{|z+\tau-t|}^{z+t-\tau} d\xi \leqslant \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$

从而可选择初值 $u_{ij}^{(0)}(x,t)$ 使得 $F_{ij}^{(0)}(z,t)$, $F_{ij}^{(1)}(z,t)$ 均为有界.

记 $A=\max\limits_{\substack{x\in[0,+\infty)\\(y_i,z_j)\in D}}(|a_{ij}(x)|,|a'_{ijx}(x)|)$, $\Phi=\max\limits_{\substack{s\in[0,+\infty)\\(y_i,z_j)\in D\\t\in[0,t]}}(|\Phi(s,t)|,|\Phi'_s(s,t)|)$,

$M_0=\max\limits_{\substack{s\in[0,+\infty)\\t\in[0,t]\\(y_i,z_j)\in D}}(|F_{ij}^{(0)}(s,t)|+|F_{ij}^{(1)}(s,t)|)$ 则可由归纳法证得如下不等式

$$|v_{ij}^{(n+1)}(s,t)-v_{ij}^{(n)}(s,t)|\leqslant M_0M^{n+1}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$|v'^{(n+1)}_{ijs}(s,t)-v_{ijs}^{(n)}(s,t)|\leqslant M_0M^{n-1}\frac{t^n}{n!}$$

$$|F_{ij}^{(n+1)}(s,t)-F_{ij}^{(n)}(s,t)|\leqslant M_0M^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|v_{ij}^{(n)}(s,t)|\leqslant\Phi+M_0(1+Mt+\cdots+M^nt^n/n!)\leqslant\Phi+M_0e^{Mt}$$

$$|v_{ijs}^{(n)}(s,t)|\leqslant\Phi+M_0e^{Mt}$$

$(y_i,z_j)\in D$, $s\in[0,+\infty)$, $0\leqslant t\leqslant t$, 其中 $M=\dfrac{8A^2}{h^2}+A$, 于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_{ij}^{(n+1)}-u_{ij}^{(n)}|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|v_{ij}^{(n+1)}(s,t)-v_{ij}^{(n)}(s,t)|$ 当 $0\leqslant t\leqslant t$ 时一致收敛, 从而 $u_j^{(n)}(x,t)$ 一致收敛到某函数 $u_{ij}^{*}(x,t)=v_{ij}^{*}(s,t)$, 它是积分方程的解. 当 $\Phi_{ij}(s,t)\in C^2$ 时 $v_{ij}^{*}(s,t)$ 所有的二阶导数满足类似的积分方程从而 $u_{ij}^{*}(x,t)$ 满足方程(3.1)及初边值条件(3.2)、(3.3). 唯一性、稳定性同样可得到.

在数值计算时必须在有限区域求解 $u_{ij}(x,t)$, 为此假定 x 适当大时 $\int_0^x\dfrac{d\xi}{a_{ij}(\xi)}$ 近似相等. 定义区域 $\sigma_{ijx}=\left\{(x,t)\,|\,x\geqslant0, 0\leqslant t\leqslant t, \int_0^x\dfrac{d\xi}{a_{ij}(\xi)}+t\leqslant\int_0^x\dfrac{d\xi}{a_{ij}(\xi)}\right\}$, $\sigma_{ijz}=\left\{(z,t)\,|\,0\leqslant z, 0\leqslant t\leqslant t, 0\leqslant z+t\leqslant z_{ij}\right\}$ 其中 $z_{ij}=C_{ij}(x)$, 因此区域 σ_{ijx}, (σ_{ijz}) 近似相同, 在有界域 σ_{ijz} 中求解方程(3.5)、(3.6), 对于函数 v_{ij+1}, v_{ij-1}, v_{i+1j}, v_{i-1j} 在域 σ_{ijz} 中的取值根据假定可由插值而得到.

在二维情形, 我们给出如下算例:

1. $u=\sin t\exp[1-0.2x-0.25y^2]$, $\quad a(x,y)=1/\sqrt{0.46-0.25y^2}$
2. $u=\sin t\exp[1-0.2x^2-0.25y^2]$, $\quad a(x,y)=1/\sqrt{0.6-0.16x^2-0.04y^2}$
3. $u=\cos t\sqrt{3-x-y}$, $\quad a(x,y)=\sqrt{2}(3-x-y)$

$x=1$, $t=1$, $0\leqslant y\leqslant1$, $h=0.1$, 函数 $C_j(x)$ 及反函数 $C_j^{-1}(s)$ 用四阶龙格库塔法数值计算, σ_{jz} 上的二重积分用三角形网格剖分近似计算, 记 e_j 表示真解与数值解在域 σ_{jx} 上的最大绝对误差. 计算结果列于表 1~ 表 3.

附 录 A

满足条件(2.1)、(2.2)的边界:

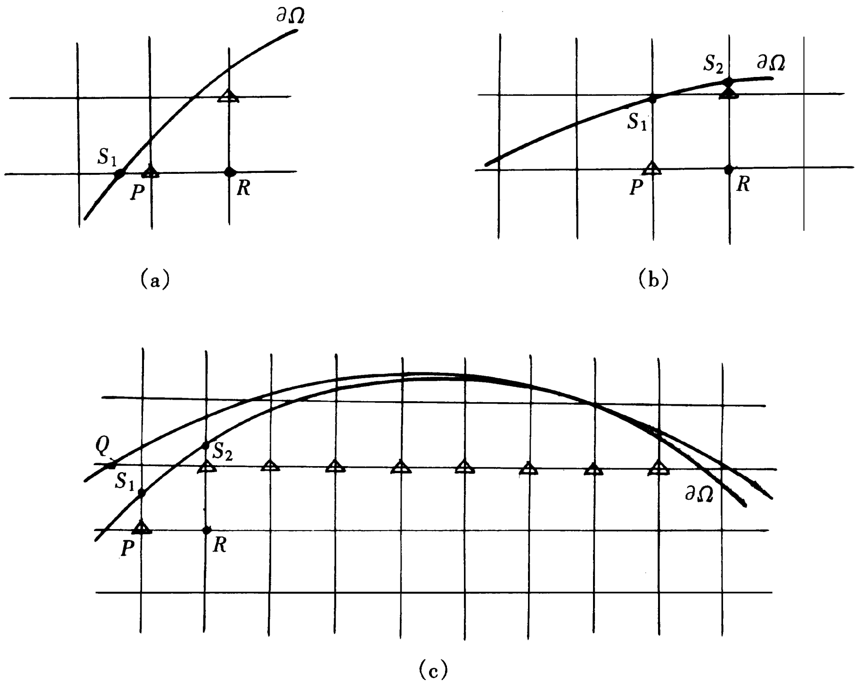
一、若区域 Ω 是凸多边形, 则 $\alpha = 0$, (2.1)、(2.2) 满足•

二、若区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 是分段光滑的凸曲线, 且在水平(铅直) 切线处存在一个圆与 $\partial\Omega$ 内切则条件 (2.1)、(2.2) 成立, $\alpha = \frac{1}{2}$•

分如下几种情况讨论:

(i) 设在边界 $\partial\Omega$ 上点 S 某邻域内, 曲线 $\partial\Omega$ 可表示为 $z = \varphi(y)$, 且 $C_1 \leqslant |\varphi'(y)| \leqslant C_2$, 则 $\alpha = 0$•

设 P 为边界结点, R 为相邻内结点, 如图 1(a), 若 P 和边界 $\partial\Omega$ 上点 S_1 相邻, 则用 S_1 与 R 两点的函数值作内插求 P 点函数值, 此时(2.1)、(2.2) 显然成立• ($\alpha = 0$) 如图 1(b), 若 P 之左边不和边界 $\partial\Omega$ 相邻则用点 P, R 上方边界 $\partial\Omega$ 上的点 S_1, S_2 和点 R 三点的函数值作内插求 P 点函数值, 有



(a) (b)

(c)

图 1

$$u_P - u_R = -\frac{z_{S_1} - z_{S_2}}{z_R - z_{S_2}}(u_R - u_{S_1}) + \frac{z_R - z_{S_1}}{z_R - z_{S_2}}(u_{S_1} - u_{S_2}) + o(h^2) \qquad (*)$$

$$A_R = \frac{z_{S_2} - z_{S_1}}{z_{S_2} - z_R} \leqslant \frac{z_{S_2} - z_R}{z_{S_2} - z_R} = 1$$

$$A_R = \frac{1}{1 + \dfrac{z_{S_1} - z_R}{z_{S_2} - z_{S_1}}} = \frac{1}{1 + \dfrac{z_{S_1} - z_R}{\varphi'(\xi) h}} \geqslant \frac{1}{1 + \dfrac{1}{C_1}}$$

(ii) 设在边界 $\partial\Omega$ 上某一段曲线可表示为 $z = \varphi(y)$, 且 $\varphi'(y_0) = 0$ 如图 1(c), 外曲线为圆, 内曲线为 $\partial\Omega$, 首先对边界结点作修改如图最高点下方第二条网线上位于 $\partial\Omega$ 内部的结点全部定义为边界结点, 用"△"表示这些点上的函数值均可用和下方相邻的内结点和上方边界上的点作内插, 此时 $\alpha = 0$, (2.1)、(2.2) 成立

由圆的性质可以推出在 Q 点的切线斜率 $k \geqslant \mathrm{const}\sqrt{h}$, 由曲线 $\partial\Omega$ 的凸性可知此时弧 $\overleftarrow{S_1S_2}$ 上的曲线斜率 $\varphi'(y) \geqslant c\sqrt{h}$, 因而对于此图(b) 的边界结点 P 和内结点 R 仍用 R, S_1, S_2 三点对 P 作内插此时式(*) 仍成立, 这时

$$A_R = \frac{z_{S_2} - z_{S_1}}{z_{S_2} - z_{S_1} + z_{S_1} - z_R} = \frac{\varphi'(\xi)h}{\varphi'(\xi)h + z_{S_1} - z_P} \geqslant \frac{\varphi'(\xi)h}{\varphi'(\xi)h + h}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{\varphi'(\xi)}} \geqslant \frac{C\sqrt{h}}{C\sqrt{h} + 1} \geqslant \frac{C}{1 + C}h^{\frac{1}{2}} \qquad (h < 1)$$

(iii)　铅直切线的边界可类似讨论•

参　考　文　献

1　R. Courant, D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Interscience New York, (1962).

2　郭本瑜,《偏微分方程的差分方法》, 科学出版社 (1988), 1—154, 300—338.

3　马在田,《地震成象技术——有限差分偏移》, 石油工业出版社 (1989).

4　谢干权, 声波方程系数逆演问题的时卷特征迭代法(TCC), 中国科学(A) **16**(12) (1988), 1253—1261.

5　张关泉, 波动方程的上行波和下行波的耦合方程组, 应用数学学报, **18**(2) (1993), 251—263.

The Semi_Discrete Method for Solving High_Dimension Wave Equation

Wu Jiancheng

(Jiangsu Petrochemical Technology Institute, Changzhou Jiangsu, 213016, P.R.China)

Cai Rizeng

(Wuxi Light Industry Institute, Wuxi, Jiangsu 214036, P. R. China)

Abstract

The article gives a semi_discrete method for solving high_dimension wave equation. By using the method, high_dimension wave equation is converted by means of discretization into 1_D wave equation system which is well_posed. The convergence of the semi_discrete method is given. The numerical calculating results show that the speed of convergence is high.

Key words　Semi_discrete method, High_dimension wave equation, well_posed, convergence