应用数学和力学, 第 19 卷 第 5 期(1998 年 5 月)
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

解三维抛物型方程的一个新的高精度显格式

马明书[1]

(张鸿庆推荐, 1997 年 6 月 17 日收到)

摘　　要

本文构造了一个解三维抛物型方程的高精度三层显式差分格式, 其稳定性条件为 $r=\Delta t/\Delta x^2=\Delta t/\Delta y^2=\Delta t/\Delta z^2\leqslant 1/4$, 截断误差为 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$·

关键词　高精度　显式差分格式　三维抛物型方程

中图分类号　O241

§1. 引　　言

在扩散、渗流、热传导等很多领域, 经常会遇到求解抛物型方程的问题, 在三维情形, 其模型为如下初边值问题

$$
\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (0<x,y,z<1,\ t>0) & (1.1)\\
u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z) \quad (0\leqslant x,y,z\leqslant 1) & (1.2)\\
u(0,y,z,t)=f_1(y,z,t),\ u(1,y,z,t)=f_2(y,z,t) \quad (0\leqslant y,z\leqslant 1,\ t\geqslant 0) & (1.3)\\
u(x,0,z,t)=\mu_1(x,z,t),\ u(x,1,z,t)=\mu_2(x,z,t) \quad (0\leqslant x,z\leqslant 1,\ t\geqslant 0) & (1.4)\\
u(x,y,0,t)=\nu_1(x,y,t),\ u(x,y,1,t)=\nu_2(x,y,t) \quad (0\leqslant x,y\leqslant 1,\ t\geqslant 0) & (1.5)
\end{array}\right.
$$

解上述问题的差分格式, 精度高且能显式计算者, 当属文[1]、[2]中的格式· 本文构造的显格式, 保持了这些格式的高精度性(即有相同的误差阶), 但表达式要简单得多, 且突破了[1]、[2]中格式稳定性条件只有 $r\leqslant 1/6$ 的限制· 文末的数值例子表明数值结果与理论分析相符·

§2. 差分格式的构造

设 Δt 为时间步长, Δx, Δy, Δz 依次为 x, y, z 方向空间步长· 为简便起见, 取 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=1/M$ (M 为正整数)· 用如下的含参数的差分方程逼近微分方程(1.1)

---

① 河南师范大学数学系, 河南新乡 453002

$$\frac{1}{\Delta t}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12r}\right)\Delta u_{ijk}^{n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)\Delta u_{ijk}^{n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta x^2}\left[\left(\frac{\theta_1}{4}\Box+\frac{\theta_2}{2}\Diamond\right)u_{ijk}^{n}+\left(\frac{\theta_3}{4}\Box+\frac{\theta_4}{2}\Diamond\right)u_{ijk}^{n-1}\right] \tag{2.1}$$

其中, $r=\Delta t/\Delta x^2$, u_{ijk}^n 表示 u 在节点 $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$ 处的值,

$$\Delta u_{ijk}^n = u_{ijk}^{n+1}-u_{ijk}^n,$$

$$\Box u_{ijk}^n = ({}_x\Box+{}_y\Box+{}_z\Box)u_{ijk}^n,$$

$$\Diamond u_{ijk}^n = ({}_x\Diamond+{}_y\Diamond+{}_z\Diamond)u_{ijk}^n,$$

$${}_x\Box u_{ijk}^n = u_{i,j+1,k+1}^n+u_{i,j-1,k+1}^n+u_{i,j+1,k-1}^n+u_{i,j-1,k-1}^n-4u_{ijk}^n,$$

$${}_x\Diamond u_{ijk}^n = u_{i,j+1,k}^n+u_{i,j-1,k}^n+u_{i,j,k+1}^n+u_{i,j,k-1}^n-4u_{ijk}^n,$$

其余类推, $\theta_1\sim\theta_4$ 是待定参数•

当微分方程(1.1)的解充分光滑时, 下式成立

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^q u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^{p+q} u \qquad (p,\ q \text{ 为非负整数}) \tag{2.2}$$

将(2.1)式中各节点上的 u 以其在节点 $(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t)$ 处展开的 Taylor 级数代入, 并使用(2.2)式, 经整理可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{12r}\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+O(\Delta t^2)=(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)\frac{\partial u}{\partial t}-(\theta_3+\theta_4)\Delta t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$+\frac{1}{12}\Delta x^2(\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{12}\Delta x^2[(\theta_1+\theta_3)-2(\theta_2+\theta_4)]$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial z^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\partial x^2}\right)+O(\Delta t\Delta x^2+\Delta t^2+\Delta x^4)$$

当下列诸等式

$$\left.\begin{aligned}&\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=1\\&\theta_3+\theta_4=0\\&\theta_1+\theta_3-2\theta_2-2\theta_4=0\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

成立时, (2.1)式的截断误差可达 $O(\Delta t\Delta x^2+\Delta t^2+\Delta x^4)$• 由于

$$O(\Delta t\Delta x^2)\leqslant\max\{O(\Delta t^2), O(\Delta x^4)\}$$

(2.1)式的误差阶实为 $O(\Delta t^2+\Delta x^4)$• 解(2.3)式得

$$\theta_1=\theta,\quad \theta_2=1-\theta,\quad \theta_3=\frac{2}{3}-\theta,\quad \theta_4=-\frac{2}{3}+\theta$$

将以上各值代入(2.1)式, 可得如下的三层高精度显式差分格式

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12r}\right)u_{ijk}^{n+1}=\left[\frac{1}{6r}+r\left(\frac{\theta}{4}\Box+\frac{1-\theta}{2}\Diamond\right)\right]u_{ijk}^{n}+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{6}-\frac{\theta}{4}\right)r\Box+\left(\frac{\theta}{2}-\frac{1}{3}\right)r\Diamond\right]u_{ijk}^{n-1} \tag{2.4}$$

其中, θ 为任意实数, 当 $\theta=2/3$ 时, 格式(2.4)有更为简单的形式

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12r}\right)u_{ijk}^{n+1}=\left[\frac{1}{6r}+\frac{r}{6}(\Box+\Diamond)\right]u_{ijk}^{n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)u_{ijk}^{n-1} \tag{2.5}$$

§ 3. 稳定性分析

方程(2.5)是三层格式，根据 R. D. Richtmyer 理论，对多层差分方程组，引进新的因变量，写出与之等价的两层方程组，然后研究其稳定性• 与(2.5)式等价的两层方程组为

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{12r}\right)u_{ijk}^{n}=\left[\frac{1}{6r}+\frac{r}{6}(\Box+\theta\Diamond)\right]u_{ijk}^{n}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12r}\right)v_{ijk}^{n}\\&v_{ijk}^{n+1}=u_{ijk}^{n}\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

根据稳定性分析的 Fourier 方法，令

$$\left.\begin{aligned}&u_{ijk}^{n}=u^{n}\exp[I(p\pi x_i+q\pi y_j+l\pi z_k)]\\&v_{ijk}^{n}=v^{n}\exp[I(p\pi x_i+q\pi y_j+l\pi z_k)]\end{aligned}\quad (I=\sqrt{-1})\right\}\tag{3.2}$$

经过简单的计算可知

$$\Diamond u_{ijk}^{n}=-8A_1u_{ijk}^{n},\qquad \Box u_{ijk}^{n}=-16B_1u_{ijk}^{n}\tag{3.3}$$

其中，$A_1=s_1^2+s_2^2+s_3^2$, $B_1=s_1^2+s_2^2+s_3^2-s_1^2s_2^2-s_2^2s_3^2-s_3^2s_1^2$, $s_1=\sin\frac{p\pi\Delta x}{2}$, $s_2=\sin\frac{q\pi\Delta y}{2}$, $s_3=\sin\frac{l\pi\Delta z}{2}$

将(3.2)式代入(3.1)式并利用(3.3)式，可得

$$\begin{bmatrix}u^{n+1}\\v^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-B/A & -C/A\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u^{n}\\v^{n}\end{bmatrix}$$

其中，$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{12r}$, $B=-\frac{1}{6r}+\frac{4}{3}A_1r+\frac{8}{3}B_1r$, $C=-\frac{1}{2}+\frac{1}{12r}$• 故格式(3.1)的传播矩阵为

$$G(s_1^2,s_2^2,s_3^2)=\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-B/A & -C/A\\1 & 0\end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0\tag{3.4}$$

下面我们直接给出几个对分析稳定性十分有用的结果，作为引理•

引理 1[3] 实系数二次方程(3.4)($A>0$)的两根按模小于等于 1 的充要条件是

$$A-C\geqslant 0,\quad A+B+C\geqslant 0,\quad A-B+C\geqslant 0\tag{3.5}$$

引理 2[4] 差分格式(3.1)或(2.5)稳定，即矩阵族 $G^n(s_1^2,s_2^2,s_3^2)$ $(s_1^2,s_2^2,s_3^2\in[0,1],\ n=1,2,\cdots)$ 一致有界的充要条件是

(1) $|\lambda_{1,2}|\leqslant 1$ ($\lambda_{1,2}$ 是(3.1)式的传播矩阵的特征方程(3.4)的根)，

(2) $N_0^1\left(\left(1-\frac{1}{4}|g_{11}+g_{22}|^2\right)^2\right)\cap N_0^1\left(|(g_{11}-g_{22})^2+4g_{12}g_{21}|\right)$

$\subseteq N_0^1((g_{11}-g_{22})^2)\cap N_0^1(g_{12}^2)\cap N_0^1(g_{21}^2)$

其中，$N_0^1(f(s_1^2,s_2^2,s_3^2))$ 表示多项式 $f(s_1^2,s_2^2,s_3^2)$ 在 $[0,1]$ 区间内所有实根的集合(重根要重复计)•

定理 当 $r\leqslant 1/4$ 时差分格式(3.1)即(2.5)稳定•

证明 首先检验引理 2 中的条件(1)• 根据引理 1，此条件与不等式组(3.5)等价，经计算知

$$A - C = \frac{1}{2} + \frac{1}{12r} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12r} = 1 \geqslant 0,$$

$$A + B + C = \frac{4}{3}A_1 r + \frac{8}{3}B_1 r \geqslant 0 \text{ (因 } A_1, B_1 \geqslant 0),$$

$$A - B + C = \frac{1}{3r} + \frac{8}{3}(s_1^2 s_2^2 + s_2^2 s_3^2 + s_3^2 s_1^2) r - 4(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) r$$

用微分学的知识可以求出 $f(s_1^2, s_2^2, s_3^2) = \frac{1}{3r} + \frac{8}{3}(s_1^2 s_2^2 + s_2^2 s_3^2 + s_3^2 s_1^2) r - 4(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) r$ 的唯一驻点$(3/4, 3/4, 3/4)$, 于是 $A - B + C$ 的最小值 $= \min\{f(0,0,0), f(1,0,0), f(1,1,0), f(0,1,0), f(0,0,1), f(1,0,1), f(1,1,1), f(0,1,1), f(3/4,3/4,3/4)\} = \frac{1}{3r} - \frac{16r}{3}$, 只要 $\frac{1}{3r} - \frac{16r}{3} \geqslant 0$, 即 $r \leqslant 1/4$, 就有 $A - B + C \geqslant 0$•

综上所述, 当 $r \leqslant 1/4$ 时, 条件(1) 满足• 下面来检验条件(2), 因为 $g_{21} = 1$, 所以 $N_0^1(g_{21})$ 是空集, 故条件(2) 成立的充要条件是使 $1 - \frac{1}{4}g_{11}^2 = g_{11}^2 + 4g_{12} = 0$ 成立的 s_1^2, s_2^2, s_3^2 或者不存在, 或者不属于$[0, 1]$• 由 $1 - \frac{1}{4}g_{11}^2 = 0$ 得 $g_{11}^2 = 4$, 代入 $g_{11}^2 + 4g_{12} = 0$ 得 $g_{12} = -1$, 但 $g_{12}^2 =$
$-C/A$, 于是 $A = C$, 即 $\frac{1}{2} + \frac{1}{12r} = \frac{1}{12r} - \frac{1}{2}$, 显然对任意的 $r > 0$, 使这个等式成立的 s_1^2, s_2^2, s_3^2 并不存在• 于是, 只要 $r \leqslant 1/4$, 差分格式(3.1) 即(2.5) 稳定• 定理证毕•

当 $r = 1/6$ 时, 格式(2.5) 成为一个稳定的两层显格式

$$u_{ijk}^{n+1} = \left[1 + \frac{1}{36}(\square + \diamondsuit)\right] u_{iju}^{n} \tag{3.6}$$

此即文[2] 中的格式(14)•

§4. 数 值 例 子

考虑初边值问题

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (0 < x, y, z < 1, t > 0)\\
&u(x, y, z, 0) = \sin(x, y, z) \quad (0 \leqslant x, y, z \leqslant 1)\\
&\left.\begin{aligned}u(0, y, z, t) &= \exp[-3t]\sin(y + z)\\ u(1, y, z, t) &= \exp[-3t]\sin(1 + y + z)\end{aligned}\right. \quad (0 \leqslant y, z \leqslant 1, t \geqslant 0)\\
&\left.\begin{aligned}u(x, 0, z, t) &= \exp[-3t]\sin(x + z)\\ u(x, 1, z, t) &= \exp[-3t]\sin(x + 1 + z)\end{aligned}\right. \quad (0 \leqslant x, z \leqslant 1, t \geqslant 0)\\
&\left.\begin{aligned}u(x, y, 0, t) &= \exp[-3t]\sin(x + y)\\ u(x, y, 1, t) &= \exp[-3t]\sin(x + y + 1)\end{aligned}\right. \quad (0 \leqslant x, y \leqslant 1, t \geqslant 0)
\end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

其中

利用本文格式(2.5) 计算问题(4.1) 的数值解•

为简便计, 用问题(4.1) 的精确解 $u(x, y, z, t) = \exp[-3t]\sin(x + y + z)$ 计算第一层的值 u_{ijk}^1, 然后用格式(2.5) 计算到五十层的结果如表 1•

表 1 $\Delta t = 0.01,\ \Delta x = 0.2,\ r = 1/4$

(x, y, z)	格式(2.5)	精确解	(x, y, z)	格式(2.5)	精确解
(0.2, 0.2, 0.2)	0.125990	0.125989	(0.8, 0.2, 0.6)	0.223037	0.223035
(0.4, 0.2, 0.2)	0.160066	0.160064	(0.8, 0.2, 0.8)	0.217296	0.217295
(0.6, 0.2, 0.2)	0.187760	0.187758	(0.8, 0.4, 0.8)	0.202894	0.202892
(0.8, 0.2, 0.2)	0.207968	0.207966	(0.8, 0.6, 0.8)	0.180402	0.180400
(0.8, 0.2, 0.4)	0.219886	0.219884	(0.8, 0.8, 0.8)	0.150718	0.150716

表 1 表明三层显格式(2.5)的精度是相当高的，与理论分析完全相符•

参 考 文 献

1 曾文平，三维抛物型方程的一个新的高精度显式差分格式，工科数学，**18**(4) (1992)，20—25.

2 曾文平，解三维抛物型方程的高精度显式格式，华侨大学学报(自然科学版)，**16**(2) (1995)，128—133.

3 S. Mckee, A generalizalion of the Du Fort_Frakel Scheme, *J. Inst. Maths. Appliecs*, **1** (1972), 42—48.

4 马驷良，二阶矩阵族 $G^n(k, \Delta t)$ 一致有界的充要条件及其对差分方程稳定性的应用，高等学校计算数学学报，**2**(2) (1980)，41—53.

A New High_Order Accuracy Explicit Difference Scheme for Solving Three_Dimensional Parabolic Equations

Ma Mingshu

(Department of Mathematics, Henan Normal University, Xinxiang Henan 453002, P.R.China)

Abstract

In this paper, a new three_level explicit difference scheme with high accuracy is proposed for solving three_dimensional parabolic equations. It is shown that the truncation error of the scheme is $O(\Delta t^2 + \Delta x^4)$ and the condition of stability of the scheme is $r \leqslant 1/4$.

Key words high_order accuracy, explicit difference scheme, three_dimensional parabolic equation