

箱式封闭油藏中水平井压力分析

王晓冬^① 刘慈群^①

(1996 年 6 月 18 日收到, 1997 年 9 月 8 日收到修改稿)

摘 要

本文研究了箱式封闭油藏水平井之三维不定常渗流问题。用积分变换、汇源叠加等方法求得其数学模型的 Laplace 变换解式并建立了快速、实用的应用方法, 其中包括: 水平井压力分布公式、井壁压力典型曲线计算方法、控制参数(团)调参分析。因而本文的结果可方便地用于水平井不稳定试井资料的分析与解释。

关键词 水平井 不定常渗流 数学模型 压力 压力导数 试井

中图分类号 TE312

符 号 说 明

B —体积系数, %;	Skin—表皮因子;
C —井筒存储系数, m^3/MPa ;	s —Laplace 变换量;
c_t —总压缩系数, $1/\text{MPa}$;	t —时间, h;
h —有效层厚, m;	x —坐标, m;
k —渗透率, μm^2 ;	y —坐标, m;
$K_0(\cdot)$ —0 阶修正第二类 Bessel 函数;	z —坐标, m;
L —水平井半长, m;	x_e, y_e —外边界距离, m;
P —压力, MPa;	z_w —水平井垂向位置, m;
q —产量, m^3/s ;	μ —粘度, $\text{mPa}\cdot\text{s}$;
r_w —水平井筒半径, m;	ϕ —孔隙度;
下标: D —无量纲; w —井壁; i —初始状态; eD —无量纲外边界; h —水平向; v —垂向	

§ 1. 数学模型及其 Laplace 空间解

箱式封闭油藏 6 个边界面皆为封闭, 其中一口井段长为 $2L$ 的均匀流量水平井以常产量 q 产出微可压缩、常粘度流体。本文思路是将水平井段抽象为直线汇给出控制方程组, 再通过 Laplace 变换、有限 Fourier 余弦积分变换后求得影像空间二维点汇解, 然后进行积分叠加、Fourier 余弦积分反变换得到 Laplace 空间解, 最后由 Laplace 数值反演^[6]方法进行计算分析。以箱式封闭油藏左下角为坐标原点, 则三维空间不定常渗流控制方程组为^[1,2,3,4]:

① 中国科学院渗流流体力学所, 河北廊坊 102801

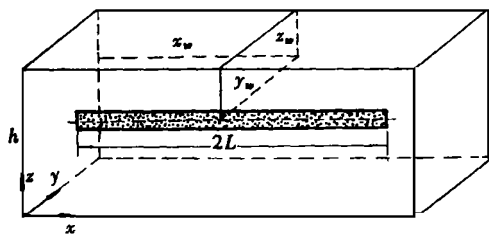


图 1 箱式封闭油藏中一口水平井示意图

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2 P_D}{\partial y_D^2} + L_D^2 \frac{\partial^2 P_D}{\partial z_D^2} = \frac{\partial P_D}{\partial t_D}$$

$$0 \leq x_D \leq x_{eD},$$

$$0 \leq y_D \leq y_{eD}, 0 \leq z_D \leq 1 \quad (1.1)$$

$$P_D(x_D, y_D, z_D, 0) = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial P_D(x_D, 0, z_D, t_D)}{\partial x_D} = \frac{\partial P_D(x_D, y_{eD}, z_D, t_D)}{\partial x_D} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial P_D(0, y_D, z_D, t_D)}{\partial y_D} = \frac{\partial P_D(x_{eD}, y_D, z_D, t_D)}{\partial y_D} = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial P_D(x_D, y_D, 0, t_D)}{\partial z_D} = \frac{\partial P_D(x_D, y_D, 1, t_D)}{\partial z_D} = 0 \quad (1.5)$$

沿 z 方向在 z_{wD} 处取一小量 ε , 考虑水平井段上某一点汇时内边界条件可以概括为^[1]:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \lim_{r_D \rightarrow 0} \int_{z_{wD} - \varepsilon/2}^{z_{wD} + \varepsilon/2} r_D \frac{\partial P_D}{\partial r_D} dz_{wD} \right\} = \begin{cases} 0, & z_D > (z_{wD} + \varepsilon/2) \\ -1/2, & (z_{wD} + \varepsilon/2) \geq z_D \geq (z_{wD} - \varepsilon/2) \\ 0, & z_D < (z_{wD} - \varepsilon/2) \end{cases} \quad (1.6)$$

定义无量纲量及相应关系式:

$$P_D = \frac{k h (P_i - P)}{1.842 \times 10^{-3} q \mu B}, \quad t_D = \frac{3.6 k t}{\phi \mu c_{it} r_w^2}, \quad h_D = \frac{h}{r_w}, \quad C_D = \frac{C}{2 \pi \phi c_{it} r_w^2}$$

$$x_D = \frac{x}{L}, \quad y_D = \frac{y}{L}, \quad z_D = \frac{z}{h}, \quad L_D = \frac{L}{h}, \quad r_D^2 = x_D^2 + y_D^2$$

定义 Laplace 变换式

$$\tilde{P}_D = \int_0^{\infty} P_D \exp[-st_D] dt_D$$

定义有限 Fourier 余弦变换式:

$$P_D = \int_0^1 P_D \cos(\beta_n z_D) dz_D, \quad P_D = \sum_n P_D \frac{\cos(\beta_n z_D)}{N(n)}$$

$$N(n) = \int_0^1 \cos^2(\beta_n z_D) dz_D$$

经 Laplace 变换和 Fourier 有限余弦积分变换后, 式(1.1)~(1.6)相应为:

$$\frac{\partial^2 \hat{P}_D}{\partial x_D^2} + \frac{\partial^2 \hat{P}_D}{\partial y_D^2} = \left[\frac{s}{h_D^2 L_D^2} + m^2 \pi^2 L_D^2 \right] \hat{P}_D,$$

$$0 \leq x_D \leq x_{eD}, \quad 0 \leq y_D \leq y_{eD} \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \hat{P}_D(x_D, 0, z_D, t_D)}{\partial x_D} = \frac{\partial \hat{P}_D(x_D, y_{eD}, z_D, t_D)}{\partial x_D} = 0 \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial \hat{P}_D(0, y_D, z_D, t_D)}{\partial y_D} = \frac{\partial \hat{P}_D(x_{eD}, y_D, z_D, t_D)}{\partial y_D} = 0 \quad (1.9)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \lim_{r_D \rightarrow 0} \int_{z_{wD} - \varepsilon/2}^{z_{wD} + \varepsilon/2} r_D \frac{\partial \hat{P}_D}{\partial r_D} dz_{wD} \right\} = -\frac{1}{2s} \quad (1.10)$$

有分离变量法求得式(1.7)~(1.10)解式为:

$$\begin{aligned} \hat{s}\tilde{P}_D &= \frac{\gamma eD}{4} G(\gamma_D, \varepsilon_{m0}) + \frac{\gamma eD}{2} \sum_{n=1}^{\infty} G(\gamma_D, \varepsilon_{mn}) \\ &\cdot \cos\left[\frac{n\mathbb{K} wD}{x eD}\right] \cos\left[\frac{n\mathbb{K} xD}{x eD}\right] \quad x \quad y \end{aligned} \quad (1.11)$$

这里,

$$\begin{aligned} G(\gamma_D, \varepsilon_{mn}) &= \frac{\cosh\left\{\int \gamma eD - (\gamma_D \pm \gamma wD) \right\} \varepsilon_{mn}}{\varepsilon_{mn} \sinh(\gamma eD \varepsilon_{mn})} \quad z D \\ \varepsilon_{mn} &= \sqrt{\frac{s}{h b L^2} + m^2 \pi^2 L_D^2 + \frac{n^2 \mathbb{K}^2}{x eD}} \end{aligned}$$

其中,“ \pm ”表示分取符号后求和 \cdot 对解式(1.11)做叠加积分,可得到水平井(条带汇)之压力分布公式,为:

$$\begin{aligned} \hat{s}\tilde{P}_D &= \frac{\gamma eD}{2} G(\gamma_D, \varepsilon_{m0}) + \frac{\gamma eD x eD}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} G(\gamma_D, \varepsilon_{mn}) \\ &\cdot \sin\left[\frac{n\mathbb{K}}{x eD}\right] \cos\left[\frac{n\mathbb{K} wD}{x eD}\right] \cos\left[\frac{n\mathbb{K} xD}{x eD}\right] \quad \text{件可} \end{aligned} \quad (1.12)$$

为解决计算时测压点的选取问题,沿水平井段对 x_D 取积分平均^[1]:

$$\begin{aligned} \hat{s}\tilde{P}_D &= \frac{\gamma eD}{2} G(\gamma_D, \varepsilon_{m0}) + \frac{\gamma eD x eD}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} G(\gamma_D, \varepsilon_{mn}) \\ &\cdot \sin^2\left[\frac{n\mathbb{K}}{x eD}\right] \cos^2\left[\frac{n\mathbb{K} wD}{x eD}\right] \quad - \quad \varepsilon \end{aligned} \quad (1.13)$$

再对式(1.13)进行 Fourier 积分反变换,得:

$$\begin{aligned} \hat{s}\tilde{P}_D &= \frac{\gamma eD}{2} G(\gamma_D, \varepsilon_{00}) + \frac{\gamma eD x eD}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} G(\gamma_D, \varepsilon_{0n}) \\ &\cdot \sin^2\left[\frac{n\mathbb{K}}{x eD}\right] \cos^2\left[\frac{n\mathbb{K} wD}{x eD}\right] \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\gamma eD}{2} G(\gamma_D, \varepsilon_{m0}) + \frac{\gamma eD x eD}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} G(\gamma_D, \varepsilon_{mn}) \right. \\ &\cdot \sin^2\left[\frac{n\mathbb{K}}{x eD}\right] \cos^2\left[\frac{n\mathbb{K} wD}{x eD}\right] \left. \cos(m\mathbb{K} x_D) \cos(m\mathbb{K} w_D) \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

§ 2. 井壁压力计算方法

由于数学模型中考虑了三维流动,在箱式封闭油藏中影响水平井井壁压力的参数相对多一些,而在微机上实现一种快速计算方法则是应用之前提 \cdot 沿水平井段对 x_D 取积分平均后,井壁压力计算条件应满足如下方程:

$$y_D^2 + \frac{(z_D - z_{wD})^2}{L_D^2} = r_{wD}^2 \quad (2.1)$$

根据以往的经验,保证一定的精度(10^{-7})同时程序中采用了双精度变量进行 Laplace 数值反演计算效果较好,但注意对于大的 s (小 td)应避免数据溢出 \cdot 由于一般计算机不会发生下溢出,而对于上溢出采用下式以达到计算精度:

$$\frac{\cosh[\sqrt{a}(\gamma eD - \bar{\gamma})]}{\sinh(\sqrt{a} \gamma eD)} = \left\{ \exp[-\sqrt{a}(2\gamma eD - \bar{\gamma})] \right.$$

$$+ \exp(-\sqrt{ay}) \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-2i\sqrt{ay}d) \right\} \quad (2.2)$$

在计算中, 还应注意解决下列无穷慢收敛序列求和问题:

$$\text{sum}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\pi/x_{eD}) \cos^2(n\pi x_{wD}/x_{eD})}{n^3} \quad (2.3)$$

$$\text{sum}_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(m\pi z_D) \cos(m\pi z_{wD})}{\epsilon_{n0}} \quad (2.4)$$

式(2.3)可以归结为下式的求和^[5]:

$$\text{sum}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi x_{wD}/x_{eD})}{n^3} = \int_0^x (x-\tau) \ln \left[2\sin \frac{\tau}{2} \right] d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \quad (2.5)$$

而

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \approx 1.2020569$$

通过 Poisson 求和公式及 Laplace 变换, 可得到式(2.4)的另外一种求和为^[2]:

$$\text{sum}_2 = \frac{1}{2\pi z_D} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} K_0 \left[\sqrt{s(z_D \pm z_{wD} - 2m)^2 / L_D^2} \right] - \frac{1}{2\sqrt{s}} \quad (2.6)$$

这里, “±”表示分取符号后求和, 对于大 s (小 t_D), 用式(2.6)代替式(2.4)计算效果较好。

由于钻井、完井过程中外来液容易侵入近井地带, 造成地层伤害, 产生所谓的“表皮效应”; 又由于井筒具有一定的体积以及地下流体具有微可压缩性, 在现场不稳定测试过程中早期测试数据常常受到“井筒存储”效应的影响, 利用 Duhamel 叠加原理可以将表皮效应(Skin)和“井筒存储”效应(C_D)解析地包含进来。对某一的给定线源解 $\tilde{P}_{sD}(s)$, 由有效井径模型和 Duhamel 叠加原理有:

$$\tilde{P}_{wD}(s) = \left\{ s \left[s + \frac{1}{s\tilde{P}_{sD}(s)} \right] \right\}^{-1} \quad (2.7)$$

(2.7)中 s 是对应于 (t_D/C_D) 的 Laplace 变换量。再按照数值反演方法可快速获得水平井试井分析压力和压力导数典型曲线, 以此为基础, 通过调参拟和可以分析实测资料。

§ 3. 主要参数影响分析

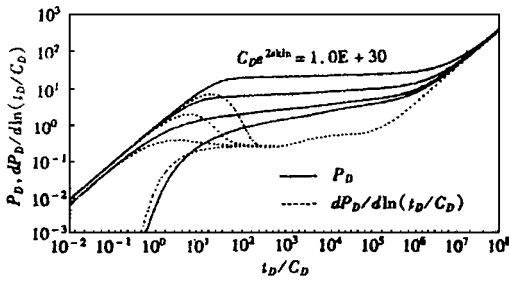
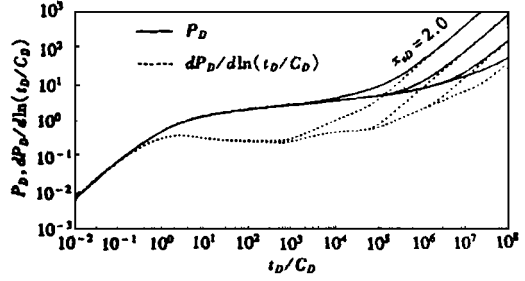
由上述算法, 在选定某一参数变化而其它参数相对给定情形下计算模型中主要参数的影响。如图 2 和图 4, 这些图版展示了参数调整时水平井压力诊断曲线的变化趋势, 图中反应了流动期特征。

$$\begin{aligned} r_w &= 0.0001, \quad h_D L_D / \sqrt{C_D} = 100, \quad z_{wD} = 0.5, \quad L_D = 1.0 \\ x_{eD} &= 20, \quad y_{eD} = 10, \quad x_{wD} = 10, \quad y_{wD} = 5 \\ C_D e^{2s} &= 1.0E-1, \quad 1.0E+1, \quad 1.0E+8, \quad 1.0E+30 \end{aligned}$$

如图 2, 箱式封闭油藏水平井的压力曲线簇在晚期达到拟稳态, 由边界的位置所决定, 压力、压导曲线簇在对应处开始趋近斜率为 1 的直线, 这体现了封闭油藏的本质特征。

$$\begin{aligned} r_w &= 0.0001, \quad h_D L_D / \sqrt{C_D} = 100, \quad z_{wD} = 0.5, \quad C_D e^{2s} = 10.0 \\ L_D &= 1.0, \quad y_{eD} = 10.0, \quad x_{eD} = 2.0, \quad 10.0, \quad 50.0, \quad 200.0 \end{aligned}$$

如图 3, 在中晚期, 和正方箱式封闭油藏相比, 长方箱式封闭油藏容易出现由于平行边界作用

图2 箱式油藏水平井无量纲压力图版($C_D e^{2s}$)图3 箱式油藏水平井无量纲压力图版(x_{eD})

引起的线性流态。

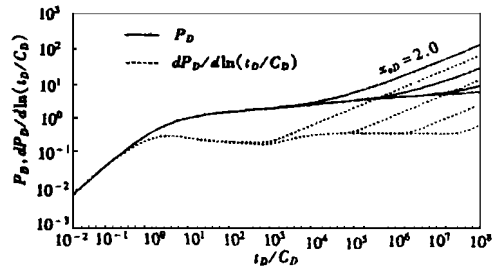
$$r_w = 0.0001, h_D L_D / \sqrt{C_D} = 100$$

$$z_{wD} = 0.5, C_D e^{2s} = 10.0$$

$$L_D = 1.0, y_{eD} \rightarrow \infty$$

$$x_{eD} = 2.0, 10.0, 50.0, 200.0$$

如图4, 当 x 方向或 y 方向的外边界有一对趋向于无穷远, 另一对保持为定值, 同时水平井平面位置相应变化则箱式封闭油藏简化为河道型油藏, 在晚期井壁压力将保持由平行边界作用引起的线性流态; 如水平井平面位置保持定值, 则箱式封闭油藏简化为 U 型油藏。无量纲井长 L_D 主要影响曲线簇水平位置和对各个流态特征曲线出现和消失。水平井压力动态可划分为当 L_D 较小时: 初期径向流 \rightarrow 球形流 \rightarrow (线性流) \rightarrow 拟稳态; 而当 L_D 较大时: 初期径向流 \rightarrow 中期线性流 \rightarrow (线性流) \rightarrow 拟稳态。

图4 箱式油藏水平井无量纲压力图版(x_{eD})

§ 4. 总 结

均匀流量水平井不定常渗流理论有两个难点, 其一是模型较复杂, 控制参数多, 其二是不易建立一个实用性、准确性皆佳的适合于微机的井壁压力计算方法。文中用积分变换、汇源叠加等方法给了箱式封闭油藏水平井之三维不定常渗流 Laplace 变换解式及井壁压力动态计算方法。计算分析表明, 箱式封闭油藏水平井井壁压力行为可能出现径向流、球形流、线性流、拟稳态等四种流动特征。通过极限分析, 由箱式封闭油藏模型可以得到平面无穷大油藏、河道型油藏模型、U 型油藏模型等特例, 推广公式(1.14)还可以得到双重孔隙介质、双重渗透介质模型的压力分布公式及井壁压力计算方法。本文所建立的井壁压力计算方法在 486 档次微机上计算速度快、结果准确, 为油田实际应用奠定了切实基础。

参 考 文 献

- 1 F. J. Kuchuk, et al., Pressure transient behavior of horizontal wells with and without gas cap or aquifer, Paper SPE 17413 (1988).
- 2 E. Ozkan and R. Reghavan, New solutions for well_test_analysis problems Part1 — Analytical considerations, Paper SPE 23593 (1991).

- 3 刘慈群、王晓冬, 双重孔隙介质中水平井试井分析方法, Paper SPE 25086 (1992).
- 4 E. Ozkan and R. Reghavan, New solutions for well_test_analysis problems Part3—Additional algorithm, Paper SPE 28424 (1994).
- 5 钱伟长,《应用数学》,安徽科学技术出版社 (1993), 901—903.
- 6 H. Stehfest, Algorithm 368, numerical inversion of Laplace transforms, D_5 Communications of the ACM, 13(1) (1970), 47—49.

Horizontal Well Pressure Analysis in Box_Bounded Reservoirs

Wang Xiaodong Liu Ciqun

(Institute of Porous Flow and Fluid Mechanics, Academia Sinica,
Langfang, Hebei 102801, P. R. China)

Abstract

In this paper, solutions to the 3D transient flow mathematical model for horizontal wells in box_ rounded reservoirs are presented. The solutions are derived in Laplace transform domain by employing integral transform and point_source superposition. Both efficient computation of pressure responses and practical technology of oil field application mentioned here may be used to interpret the data from unsteady_state horizontal well testing.

Key words horizontal well, transient flow in porous media, mathematical model, pressure, pressure derivatives, well test analysis